УДК 531.381;517.93

Применение динамической модели Лоренца к моделированию движения твердого тела

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Приведено качественное исследование поля фазовых траекторий системы динамических уравнений абсолютно твердого составного тела, движущегося вокруг неподвижного полюса под воздействием гироскопических, диссипативных сил и сил инерции Кориолиса. Выполнено приведение уравнений движения тела к динамической системе, порождающей аттрактор Лоренца. При специальных параметрических ограничениях, наложенных на уравнения динамической системы, описана структура ее фазовых траекторий, зависящая от значений величин параметров системы.

Ключевые слова: *составное твердое тело; динамическая система; поле фазовых траекторий; аттрактор Лоренца.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2021-1-32-36

Введение

Одним из эффективных инструментов моделирования детерминированных непериодических процессов является *динамическая система Э. Лоренца* [1], являющаяся основой одноименной физической модели. Лоренцем было обнаружено детерминированное непериодическое течение жидкости, происходящее в простой диссипативной системе с трехмерным фазовым пространством. Динамическая система, построенная им для исследования свойств этого течения и названная его именем, является одним из механизмов возникновения физического объекта − *странного аттрактора.* Эта система характеризует динамику эволюции данного аттрактора при непрерывном изменении управляющего параметра системы.

Внутри такого аттрактора фазовые траектории расположены нерегулярным образом и чувствительны к вариации начальных условий. Эти аттракторы порождают хаотическое и случайное поведение детерминистической модели [2].

Система уравнений Лоренца в пределах детерминистической модели может быть использована при аппроксимации сферического движения составного твердого тела, происходящего в однородной диссипативной среде под воздействием гироскопических сил и сил инерции Кориолиса. При этом предполагается, что в динамической системе Лоренца не возникают стохастические явления.

Прообразом модели со структурой такого рода является составное твердое тело с подвижными массами, контактирующими с основным твердым телом (*телом-носителем*), движущееся в среде с линейной диссипацией под действием кориолисовых сил инерции [3].

Динамическая система Лоренца как определенная аппроксимация может проистекать из уравнений Ж. Буссинеска, характеризующих термоконвекцию в нагретом горизонтальном слое однородной жидкости в случае, при котором данная задача ограничена анализом двумерных движений [4].

В настоящей статье применение детерминированной модели Лоренца позволяет построить простую интерпретацию характера движения составного твердого тела, происходящего при совокупном воздействии на него нескольких динамических факторов.

1. Предварительные положения

Неизменяемое твердое тело (*основное тело*) движется вокруг полюса O в линейно диссипативной однородной и изотропной среде, неся твердотельный ротор, вращающийся со скоростью, постоянной относительно основного (несущего) тела. При этом ось вращения ротора ориентирована неизменно относительно основного тела. Это тело несет систему *присоединенных тел*, совершающих стационарные движения относительно основного тела в соответствии с заданными связями. Данное движение вызывает появление сил инерции Кориолиса с результирующим вектор-моментом $\mathbf{L}^k$.

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в полюсе O: базис Γ_0, неизменно связанный с инерциальным пространством, и базис $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, оси которого Ox_j направлены по главным в полюсе O направлениям тензора инерции тела с матрицей $\mathbf{A}$.

Пусть A_1, A_2, A_3 − собственные значения оператора инерции тела, так что имеем $\mathbf{A} = \mathrm{diag}[A_1\ A_2\ A_3]$; $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3]^T$ − мгновенная абсолютная угловая скорость тела; $\mathbf{k} = [k_1\ k_2\ k_3]^T$ − кинетический момент ротора относительно полюса O.

Обозначим: $\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}) = [L_1\ L_2\ L_3]^T$ − результирующий вектор-момент сил сопротивления, $\mathbf{L}^\Gamma(\boldsymbol{\omega}) = [L_1^\Gamma\ L_2^\Gamma\ L_3^\Gamma]^T$ − гироскопический момент. Результирующие моменты действующих сил задаются в виде

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\omega}) = -\,[l_1\omega_1\ \ l_2\omega_2\ \ l_3\omega_3]^T,$$

$$\mathbf{L}^k(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\omega},\ \ \mathbf{L}^\Gamma(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{K}\boldsymbol{\omega}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{K}$ − матрица гироскопических сил; все величины $l_j > 0,\ k_j\ (j = 1, 2, 3)$ − заданные постоянные диссипативные параметры и гироскопические коэффициенты соответственно. Матрица сил Кориолиса $\mathbf{B}$ представляется в виде [3]

$$\mathbf{B}[b_{ij}] = \mathbf{D}[b_{ij}] - \mathrm{diag}\,[b_{11}\ b_{22}\ b_{33}],$$

где $\mathbf{D}$ − симметрическая матрица с заданными постоянными коэффициентами $b_{ij}\ (i \neq j)$.

В равенствах (1) вектор-моменты сил заданы относительно полюса O. Здесь и всюду далее все координатные элементы заданы в осях базиса Γ; (1, 2, 3) − символ циклической перестановки индексов j = 1, 2, 3.

Движение твердого тела при заданных предпосылках характеризуется системой уравнений:

$$\begin{gathered} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 = -\,l_1\omega_1 + \\ + k_2\omega_3 - k_3\omega_2 + L_1^k(\boldsymbol{\omega}), \end{gathered} \qquad (2)$$

$$L_1^k(\boldsymbol{\omega}) = -b_{11}\omega_1 + b_{12}\,\omega_2 + b_{13}\,\omega_3$$

$$(1, 2, 3).$$

Установим структуру поля фазовых траекторий динамической системы (2) в пространстве $\mathbf{R}^3$ при некоторых ограничениях, наложенных на ее структурно-динамические параметры.

2. Приведение уравнений движения к динамической системе Лоренца

Пусть $|\boldsymbol{\omega}(0)| = \Omega \neq 0$; введем постоянные величины и безразмерные параметры:

$$\begin{gathered} J = \max(A_1, A_2, A_3),\ \ a_j = J^{-1}A_j, \\ u_j = \Omega^{-1}\omega_j,\ m_j = J^{-1}(A_{j+2} - A_{j+1}), \\ c_j = (J\Omega)^{-1}l_j,\ c_{ij} = (J\Omega)^{-1}b_{ij}, \\ n_j = (J\Omega)^{-1}k_j,\ \tau = \Omega t\ \ (j = 1, 2, 3). \end{gathered} \qquad (3)$$

Выполняя преобразования (3), приведем систему уравнений (2) к безразмерной форме:

$$\begin{gathered} a_1u_1' + m_1u_2u_3 + (c_1 + c_{11})u_1 + \\ + (n_3 - c_{12})u_2 - (n_2 + c_{13})u_3 = 0 \end{gathered} \qquad (4)$$

$$(1, 2, 3),$$

где штрих обозначает производную по τ.

Вводя параметрические ограничения

$$\begin{gathered} A_1 = 2A_3,\quad A_2 = A_3, \\ k_1 = k_2 = 0,\ \ k_3 = k, \\ l_2 = A_3\Omega - b_{22}, \\ b_{11} = b_{j3} = b_{3j} = 0 \end{gathered} \qquad (5)$$

$$(j = 1, 2),$$

представим систему уравнений (4) в виде

$$\begin{aligned} u_1' &= m(u_2 - u_1), \\ u_2' &= -u_1 u_3 + r u_1 - u_2, \\ u_3' &= u_1 u_2 - b u_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Первое из ограничений (5) для структурно-динамических параметров тела соответствует одному из условий, налагаемых на главные осевые моменты инерции тела в динамической задаче Бобылева–Стеклова [5, с.581]. Второе ограничение определяет кинетическую симметрию тела относительно координатной оси Ox_1 , а в силу ограничений для компонент вектора $\mathbf{k}$ этот вектор коллинеарен координатной оси Ox_3. Параметры системы уравнений (6), согласно условиям (5), определяются выражениями:

$$\begin{aligned} m &= (2A_3\Omega)^{-1}(b_{12} - l_1 - k), \\ r &= (A_3\Omega)^{-1}(b_{21} + k), \\ b &= (A_3\Omega)^{-1}(b_{33} + l_3). \end{aligned} \tag{7}$$

Введем ограничения $(m,\ r,\ b) > 0$, что достигается применением очевидных условий, налагаемых на выражения (7). К этим условиям следует присоединить физически реальное ограничение, в силу которого, согласно соответствующему выражению (5), имеем

$$b_{22} < A_3\Omega. \tag{8}$$

Таким образом, система уравнений (6) с параметрами, определяемыми равенствами (7) при ограничениях (5), (8), по форме записи представляет собой *динамическую систему Лоренца* [1]. Эта система описывает детерминированный непериодический процесс (*метастабильный хаос*), соответствующий компактному инвариантному множеству в фазовом пространстве $\mathbf{R}^3$ − *аттрактору Лоренца* [1; 6, с. 193]. Характерной особенностью этого множества является свойство, согласно которому при непрерывном изменении величин параметров системы (6) ее аттрактор, как объект, сохраняется, а его структура также непрерывно изменяется [6].

Имея в виду исторически появившуюся гидродинамическую задачу, для которой первоначально была построена динамическая система (6), отметим, что ее параметр m есть аналог числа Прандтля, r − аналог нормированного числа Рэлея, b − постоянная, являющаяся аналогом характерного гидродинамического параметра в указанной физической задаче.

3. Качественные характеристики движения твердого тела на основе модели Лоренца

Применяя осцилляторную динамическую аналогию [7], сопоставим движению твердого тела с ротором в конфигурационном пространстве движение системы трех нелинейных осцилляторов, совершающееся в фазовом пространстве $\mathbf{R}^3$. Тогда, согласно динамической системе (6), вектор $(-\ mu_1,\ -\ u_2,\ -\ bu_3)$ определяет линейное затухание мод в колебательной системе; вектор $(mu_2,\ ru_1,\ 0)$ соответствует параметрическому возбуждению системы осцилляторов; вектор $(0,\ -\ u_1u_3,\ u_1u_2)$ обусловливает нелинейную трансляцию энергии в затухающую моду u_3 .

Качественная характеристика поля фазовых траекторий системы уравнений движения твердого тела с ротором сводится к следующему. Динамическая система (6), согласно [6], неустойчива на бесконечности. Кроме того, показано [8], что для любых значений $\tau > \tau_*$ все фазовые траектории этой системы содержатся в некотором ограниченном шаре, включающем фрактальное множество нулевой меры − аттрактор [6].

Структура поля фазовых траекторий системы уравнений (6) в зависимости от величин значений параметра r имеет следующие особенности.

При выполнении условия

$$\Delta = b_{21} + k < A_3\Omega \tag{9}$$

единственным состоянием равновесия системы является *устойчивый узел*, расположенный в начале координат, которое является аттрактором. Других устойчивых особых точек при данном условии не существует; это позволяет установить глобальную устойчивость нулевого положения равновесия данной системы [9].

Если, вне условия (9),

$$\Delta > A_3\Omega, \tag{10}$$

то в начале координат фазового пространства находится *седло*, порождающее два устойчивых *состояния равновесия* данной системы

$$(\pm g, \pm g, \rho), \tag{11}$$

где $\rho = r - 1,\ g = \sqrt{\rho b}$, а параметры b, Δ определяются равенствами (7), (9), соответственно.

Для нетривиального решения (11) системы (6) ее фазовые траектории спирально приближаются к асимптотическим точкам (11), что соответствует режиму асимптотического затухания колебаний.

Состояния динамического равновесия (11) соответствуют режимам стационарного движения твердого тела, из которых устойчивыми являются режимы, удовлетворяющие условию

$$r < m(m - b - 1)^{-1}(m + b + 3) = R$$

при $m \neq b + 1$. Здесь $r = R$ − критическое значение параметра r, при котором изменяется режим состояния динамической системы (6).

В окрестности состояний (11) расположены неустойчивые предельные циклы, проникающие при $r = R$ в это состояние, индуцируя их неустойчивость.

Если $r > R$, то эти состояния равновесия переходят в состояния, соответствующие типу *седло-фокус.* При этом одномерная сепаратриса устойчива, а на двумерной расположены спирали, раскручивающиеся относительно центров − *репеллеров*. Отсюда при $r > R$ в данной подобласти фазового пространства системы (6) все ее состояния равновесия неустойчивы.

В режиме, при котором $R_* < r < R$, где $r = R_*$ − фиксированное бифуркационное значение, вместе с устойчивым состоянием равновесия (11) имеется двумерное притягивающее множество − аттрактор Лоренца [10].

При $r \to R$ седловые предельные циклы, возникающие из замкнутых петель сепаратрис, стягиваются к состояниям равновесия (11). Если $r = R$, то эти циклы теряют устойчивость, и для $r \geq R$ аттрактор Лоренца является единственным множеством притяжения динамической системы (6).

4. Линеаризация детерминированной модели Лоренца

Применяя стандартный прием [11], рассмотрим поле фазовых траекторий динамической системы (6) в малой окрестности фиксированной точки (u_1^0, u_2^0, u_3^0) пространства состояний этой системы.

Введем матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -m & m & 0 \\ c & -1 & -b_1 \\ b_2 & b_1 & -b \end{bmatrix},$$

где $b_j = u_j^0\ (j = 1, 2, 3)$, $c = r - b_3$, и пусть $\mathbf{p}(\tau) = [p_1\ p_2\ p_3]^T$ − вектор малых отклонений от фиксированного (начального) состояния системы. Тогда $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}^0 + \mathbf{p}(\tau)$ и из системы уравнений (6) в линейном приближении следует динамическая система в отклонениях

$$\mathbf{p}' = \mathbf{C}\mathbf{p}. \tag{12}$$

Для системы уравнений (12) в нулевой точке равновесия при $r > b_3$ расположено *седло*, а при $r < b_3$ − *седло-фокус.* В окрестности этих точек находится двумерная сепаратрисная поверхность и две изолированные сепаратрисы, находящиеся по разные стороны от сепаратрисной поверхности [12]. Существование этих особенностей определяется ограничениями, соответственно

$$\Delta > A_3 h, \qquad \Delta < A_3 h, \tag{13}$$

где $h = \left|\omega_3^0\right|$, а параметр Δ устанавливается равенством (9).

Сравнивая между собой соответствующие условия (10) и (13), находим, что первое условие (13) определяет ослабление ограничения (10), а второе условие (13) является усилением ограничения (9).

В случае, при котором $\omega_1^0 = \omega_2^0 = 0$, имеем $\Omega = h$ и все соответствующие условия (9), (10), (13) совпадают между собой.

Комментарий

Сопоставление сферического движения составного твердого тела в комбинированном силовом поле состоянию аттрактора Лоренца путем сравнения их качественных характеристик обусловливает построение соответствующей динамической аналогии. Эта аналогия качественно отражает взаимосвязь свойств явлений, имеющих различную природу происхождения.

Отметим некоторые особенности этой аналогии. При достаточно больших значениях параметра $N = (A_3\Omega)^{-1}\Delta$ в динамической системе Лоренца возможен переход к стохастичности через перемежаемость [13]. При этом, если движение происходит со стороны больших значений параметра N, то в силу последовательности бифуркаций удвоения периода в динамической системе Лоренца (6) возникает явление стохастичности.

С учетом этого обстоятельства следует считать, что приведенная в данной статье динамическая аналогия имеет место только вне стохастического состояния системы.

Следует отметить, что переход к стохастической динамике через перемежаемость связан со слиянием и последующим исчезновением устойчивой и неустойчивой периодических фазовых траекторий системы.

Аттрактору Лоренца как негрубому объекту принадлежит счетное всюду плотное множество седловых предельных циклов, соответствующих периодическим движениям твердого тела. Эти предельные циклы имеют неограниченно возрастающие величины периодов и всюду плотное множество фазовых траекторий, устойчивых по Пуассону. Поскольку седловые циклы в аттракторе Лоренца всюду плотны, то при непрерывном изменении его параметров аттрактор как объект сохраняется, а его структура непрерывно изменяется [12, 14]. При этом сам аттрактор и свойство его негрубости сохраняются при малых возмущениях динамической системы (6).

Список литературы

1. *Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88−117.
2. *Rossler O.E.* Continuous chaos-four prototype equations // Annals. Ney York Academy of Sciences. 1979. Vol. 316. P. 376.
3. *Аминов М.Ш.* Некоторые вопросы движения и устойчивости твердого тела переменной массы // Тр. Казанского авиационного ин-та. Казань, 1959. Вып. 48. 118 с.
4. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2002. 320 с.
5. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат. 1946. 655 с.
6. *Йорке Дж., Йорке Е.* Метастабильный хаос: переход к устойчивому поведению в модели Лоренца // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.
7. *Junkins J.L., Jakobson I.D., Blanton J.N.* A nonlinear oscillator analog of rigid body dynamics // Celestial Mechanics. 1973. Vol. 7, № 4. P. 398−407.
8. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 552 с.
9. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 302 с.
10. *Lorenz E.N.* Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20. P. 130−141.
11. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
12. *Вильямс Р.Ф.* Структура аттракторов Лоренца // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. 256 с.
13. *Manneville P., Pomeau Y.* Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems // Physica. 1980. Vol. 1D. P. 219.
14. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел // Доклады Академии наук СССР. 1974. Т. 219. С. 1281−1285.

Application of the dynamic Lorentz model to modeling the motion of a rigid body

N. N. Makeyev
Problems of Precision Mechanics and Control Institute Russian Academy of Sciences
24, Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

A qualitative research of the field of phase trajectories of the system of dynamic equations of an absolutely rigid body was carried out, moving around the selected pole under the influence of gyroscopic, dissipative forces and Coriolis inertia forces. The equations of body motion are reduced to a dynamical system generating a Lorentz attractor. Under parametric constraints imposed on the equations of a dynamical system, the structure of its phase trajectories is described depending on the values of the system parameters.

Keywords: *rigid body; dynamic system; field of phase trajectories; attractor of Lorentz.*