УДК 519.7

Игровые задачи о встрече движений в среде с сопротивлением, линейно зависящим от вектора скорости

С. В. Лутманов
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
mpu@psu.ru; 8(342)239-63-09

Исследуется конфликтная ситуация "преследования-убегания" двух летательных аппаратов в верхних слоях атмосферы в однородном поле тяжести. Аппараты отождествляются с управляемыми материальными точками. Со стороны среды на каждого из них действует сила сопротивления, являющаяся линейной функцией компонент вектора скорости. Конфликтная ситуация рассматривается как антагонистическая игра двух лиц, с точки зрения игрока-преследователя. В дальнейшем будем называть его игроком-союзником. За игрока-союзника определяется такой способ действия, который гарантирует ему программный максимин взаимного расстояния между игроками в финальный момент времени.

Ключевые слова: *дифференциальная игра; позиционная стратегия; программная стратегия; экстремальная стратегия; программный максимин.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-4-34-42

Введение

В работе исследуется конфликтная ситуация "преследования-убегания" двух летательных аппаратов в верхних слоях атмосферы в однородном поле тяжести. Математической моделью такого конфликта послужила линейная дифференциальная игра "преследование-убегание".

Существует обширная литература, посвященная этому вопросу.

В списке литературы [1–16], [18–20], представлены наиболее значительные работы в этой области. Игра рассматривалась с точки зрения игрока-преследователя. После сведения дифференциальной игры "преследование-убегание" к дифференциальной игре "наведение-убегание" для ее решения был использован подход (метод экстремального прицеливания), развитый Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным в книгах [5, 9, 12].

В частности, на конкретных числовых данных было показано отсутствие седловой точки в игре в классе программных стратегий. Переход первого игрока (союзника) к позиционной схеме управления позволил гарантировать ему программный максимин расстояния между игроками в конечный момент времени.

В результате игрок-союзник получил результат в игре не худший, чем тот, на который он мог бы рассчитывать в случае обладания полной информацией о действиях игрока-противника.

1. Постановка задачи

Рассматривается дифференциальная игра "преследование-убегание", в которой игрок P преследует игрока E в вертикальной плоскости в течение промежутка времени $[t_0, T]$. Его цель – минимизировать геометрическое расстояние между игроками в конечный момент времени T. Цель игрока E состоит в максимизации этого расстояния.

В процессе движения игроки испытывают сопротивление среды, линейно зависящее от вектора скорости (см. рис. 1).

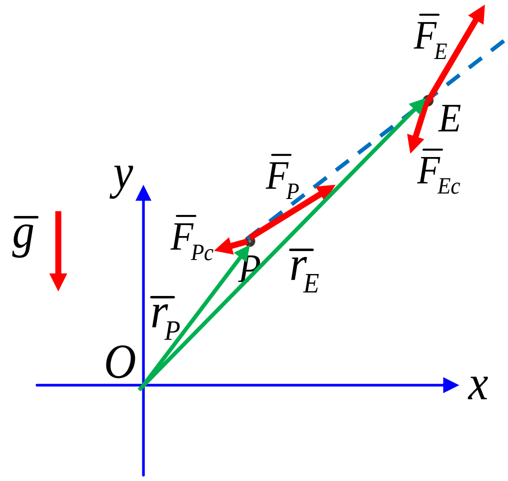

Рис. 1.

Дифференциальные уравнения движения для первого и второго игроков, соответственно, имеют вид

$$m_P\ddot{\bar{r}}_P=\bar{F}_{Pc}+\bar{F}_U+m_P\bar{g}, \qquad (1.1)$$

$$m_E\ddot{\bar{r}}_E=\bar{F}_{Ec}+\bar{F}_V+m_E\bar{g}. \qquad (1.2)$$

Здесь: $\bar{r}_P=\begin{pmatrix}x_P\\ y_P\end{pmatrix}, \bar{r}_E=\begin{pmatrix}x_E\\ y_E\end{pmatrix}$ – радиус векторы первого и второго игроков; m_P, m_E – массы материальных точек;

$\bar{F}_{Pc}=\begin{pmatrix}F_{Pcx}\\ F_{Pcy}\end{pmatrix}, \bar{F}_{Ec}=\begin{pmatrix}F_{Ecx}\\ F_{Ecy}\end{pmatrix}$ – векторы сил сопротивления, действующие на первого и второго игрока соответственно;

$\bar{F}_P=\begin{pmatrix}F_{Px}\\ F_{Py}\end{pmatrix}, \bar{F}_E=\begin{pmatrix}F_{Ex}\\ F_{Ey}\end{pmatrix}$ – векторы управляющих сил игроков, первого и второго игрока соответственно; $\bar{g}=\begin{pmatrix}0\\ -g\end{pmatrix}$ – вектор ускорения силы тяжести.

Предполагается, что силы сопротивления являются линейными функциями скоростей точек

$$\bar{F}_{Pc}=-D_P\dot{\bar{r}}_P=-\begin{pmatrix}d_{P11} & d_{P12}\\ d_{P21} & d_{P22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_P\\ \dot{y}_P\end{pmatrix},$$

$$\bar{F}_{Ec}=-D_E\dot{\bar{r}}_E=-\begin{pmatrix}d_{E11} & d_{E12}\\ d_{E21} & d_{E22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_E\\ \dot{y}_E\end{pmatrix},$$

$$d_{Pij}=const>0,\ d_{Eij}=const>0,$$

$$i,\ j=1,2.$$

На управляющие силы игроков наложены геометрические ограничения в форме кругов

$$\bar{F}_U\in\left\{\begin{pmatrix}F_{Ux}\\ F_{Uy}\end{pmatrix}\in R^2\,\middle|\,(F_{Ux})^2+(F_{Uy})^2\le\Lambda_U{}^2\right\},$$

$$\bar{F}_V\in\left\{\begin{pmatrix}F_{Vx}\\ F_{Vy}\end{pmatrix}\in R^2\,\middle|\,(F_{Vx})^2+(F_{Vy})^2\le\Lambda_V{}^2\right\}.$$

В начальный момент времени t_0 игрокам становятся известны геометрические координаты точек:

$$x_{P0}, y_{P0}, x_{E0}, y_{E0},$$

координаты векторов их скоростей:

$$\dot{x}_{P0}, \dot{y}_{P0}, \dot{x}_{E0}, \dot{y}_{E0},$$

а также технические характеристики аппаратов друг друга. В дальнейшем игроки могут измерять координаты и скорости друг друга.

2. Данные для численного эксперимента

Для численных экспериментов в статье принимаются следующие числовые данные.

Время движения:

$$t_0=0, T=10\,сек.$$

Технические характеристики аппаратов:

$$m_P=2000\,кг,\ m_E=1000\,кг,$$

$$\Lambda_U=25000\,н,\ \Lambda_V=10000\,н,$$

$$D_P=\begin{pmatrix}d_{P11} & d_{P12}\\ d_{P21} & d_{P22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}80\frac{кг}{сек} & 60\frac{кг}{сек}\\ 40\frac{кг}{сек} & 60\frac{кг}{сек}\end{pmatrix},$$

$$D_E=\begin{pmatrix}d_{E11} & d_{E12}\\ d_{E21} & d_{E22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\frac{кг}{сек} & 30\frac{кг}{сек}\\ 20\frac{кг}{сек} & 30\frac{кг}{сек}\end{pmatrix}.$$

Начальные условия для игрока преследователя:

$$x_{P0}=0\,м,\ y_{P0}=0\,м,$$

$$\dot{x}_{P0}=1000\frac{м}{сек},\ \dot{y}_{P0}=800\frac{м}{сек}.$$

Начальные условия для игрока убегающего:

$$x_{E0}=3000\,м,\ y_{E0}=5000\,м,$$

$$\dot{x}_{E0}=500\frac{м}{сек},\ \dot{y}_{E0}=200\frac{м}{сек}.$$

3. Сведение дифференциальной игры "преследование-убегание" к дифференциальной игре "наведение-уклонение"

В дальнейшем предполагается, что аэродинамика игроков одинаковая, т. е. что имеет место равенство

$$\frac{1}{m_P}D_P = \frac{1}{m_E}D_E .$$

Для принятых числовых данных это условие выполняется. Действительно,

$$\frac{1}{m_P}D_P = \frac{1}{m_P}\begin{pmatrix} d_{P11} & d_{P12} \\ d_{P21} & d_{P22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2000}\begin{pmatrix} 80 & 60 \\ 40 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04\frac{1}{сек} & 0.03\frac{1}{сек} \\ 0.02\frac{1}{сек} & 0.03\frac{1}{сек} \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{m_E}D_E = \frac{1}{m_E}\begin{pmatrix} d_{E11} & d_{E12} \\ d_{E21} & d_{E22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1000}\begin{pmatrix} 40 & 30 \\ 20 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.04\frac{1}{сек} & 0.03\frac{1}{сек} \\ 0.02\frac{1}{сек} & 0.03\frac{1}{сек} \end{pmatrix}.$$

Полагаем

$$D = \frac{1}{m_P}D_P = \frac{1}{m_E}D_E = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

$$\bar{U} = -\frac{1}{m_P}\bar{F}_U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \bar{V} = \frac{1}{m_E}\bar{F}_V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

В новых обозначениях уравнения (1.1) и (1.2) принимают вид

$$\ddot{\bar{r}}_P = -D\dot{\bar{r}}_P - \bar{U} + \bar{g} , \tag{3.1}$$

$$\ddot{\bar{r}}_E = -D\dot{\bar{r}}_E + \bar{V} + \bar{g} . \tag{3.2}$$

Расстояние между игроками совпадает с длиной вектора

$$\bar{r} = \bar{r}_E - \bar{r}_P = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Тогда цель первого игрока состоит в минимизации длины вектора $\bar{r}$ в момент времени T, а второго игрока – в ее максимизации.

Выведем дифференциальное уравнение, которое описывает изменение вектора $\bar{r}$.

Из уравнения (3.2) вычтем уравнение (3.1). В результате получим

$$\ddot{\bar{r}}_E - \ddot{\bar{r}}_P = -D\left(\dot{\bar{r}}_E - \dot{\bar{r}}_P\right) + \bar{U} + \bar{V} \Rightarrow .$$

$$\ddot{\bar{r}} = -D\dot{\bar{r}} + \bar{U} + \bar{V} \Rightarrow \tag{3.4}$$

Здесь

$$\bar{U} \in \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \in R^2 \middle| u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} \le \frac{\Lambda_U^{\ 2}}{m_P^{\ 2}} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \in R^2 \middle| u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} \le \alpha^2 \right\},$$

$$\alpha^2 = \frac{\Lambda_U^{\ 2}}{m_P^{\ 2}},$$

$$\bar{V} \in \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in R^2 \middle| v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2} \le \frac{\Lambda_v^{\ 2}}{m_E^{\ 2}} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \in R^2 \middle| v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2} \le \beta^2 \right\},$$

$$\beta^2 = \frac{\Lambda_v^{\ 2}}{m_E^{\ 2}}.$$

Распишем уравнение (3.4) по координатам:

$$\begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= -d_{11}\dot{z}_1 - d_{12}\dot{z}_2 + u_1 + v_1, \\ \ddot{z}_2 &= -d_{21}\dot{z}_1 - d_{22}\dot{z}_2 + u_2 + v_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Заменой

$$x_1 = z_1,\ x_2 = z_2,\ x_3 = \dot{z}_1,\ x_4 = \dot{z}_2$$

нормализуем систему (3.5):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= -d_{11}x_3 - d_{12}x_4 + u_1 + v_1, \\ \dot{x}_4 &= -d_{21}x_3 - d_{22}x_4 + u_2 + v_2 \end{aligned}$$

и запишем ее в векторно-матричном виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv . \tag{3.6}$$

Здесь

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R^4, \quad t \in [t_0, T],$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -d_{11} & -d_{12}\\ 0 & 0 & -d_{21} & -d_{21}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_1\end{pmatrix}\in P=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}u_1\\ u_1\end{pmatrix}\in R^2\,\middle|\,{u_1}^2+{u_2}^2\le\alpha^2\right\},$$

$$v=\begin{pmatrix}v_1\\ v_1\end{pmatrix}\in Q=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}v_1\\ v_1\end{pmatrix}\in R^2\,\middle|\,{v_1}^2+{v_2}^2\le\beta^2\right\}.$$

Таким образом, исходная дифференциальная игра "преследование-убегание" свелась к игре "наведение-уклонение", в которой первый игрок выбором своих управляющих параметров $u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_1\end{pmatrix}\in P$ минимизирует величину $\sqrt{x_1^2(T)+x_2^2(T)}$, а второй игрок выбором своих управляющих параметров $v=\begin{pmatrix}v_1\\ v_1\end{pmatrix}\in Q$ эту величину максимизирует.

4. Гипотетическое рассогласование

Определение 1. *Программным управлением первого (второго) игрока на промежутке времени* $[t_0,T]$ *назовем произвольную интегрируемую функцию*

$$u:[t_0,T]\to P\quad (v:[t_0,T]\to Q).$$

Множество всех программных управлений первого (второго) игрока на промежутке времени $[t_0,T]$ *обозначим символом* $\Pi_P[t_0,T]$ $(\Pi_Q[t_0,T])$.

Символом $x(\cdot,t_0,x_0,u(\cdot),v(\cdot))$ обозначим движение динамического объекта (3.5), выходящее из начального положения t_0,x_0 и порожденное программными управлениями $u(\cdot)\in\Pi_P[t_0,T]$, $v(\cdot)\in\Pi_Q[t_0,T]$ первого и второго игроков соответственно.

Для произвольного вектора $x\in R^4$ символом $\{x\}_2\in R^2$ обозначим проекцию этого вектора на свои первые две координаты.

Определение 2. *Величина*

$$\varepsilon^0(t_0,x_0,T)=$$

$$=\max_{v_*(\cdot)\in\Pi_Q[t_0,T]}\ \min_{u(\cdot)\Pi_P[t_0,T]}\left\|\left\{x(T,t_0,x_0,u(\cdot),v(\cdot))\right\}_2\right\|$$

называется гипотетическим рассогласованием для начальной позиции (t_0,x_0) *в момент времени* T.

Величина гипотетического рассогласования представляет собой наилучший гарантированный результат второго игрока в предположении, что первый игрок знает заранее о выборе закона управления вторым игроком. Следовательно, она является оценкой снизу (первый игрок играет на минимум) для результата первого игрока в игре.

Имеет место формула [5]:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^0(t_0,x_0,T)=\\&=\max\Bigg\{0,\ \max_{l\in S^{(2)}}\Big[\langle x_0,s(t_0,l)\rangle+\\&+\int_{t_0}^{T}\min_{u\in P}\langle B(\tau)u,s(\tau,l)\rangle d\tau+\\&+\int_{t_0}^{T}\max_{v\in Q}\langle C(\tau)v,s(\tau,l)\rangle d\tau\Big]\Bigg\},\end{aligned}\qquad(4.1)$$

где

$$s(\tau,l)=\begin{pmatrix}s_1(\tau,l)\\ s_2(\tau,l)\\ s_3(\tau,l)\\ s_4(\tau,l)\end{pmatrix}=\left(\{X[T,\tau]\}_2\right)^T l,$$

$$\tau\in[t,T],\ l=\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}\in S^{(2)}=$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}\in R^2\,\middle|\,l_1^2+l_2^2=1\right\},$$

$X[T,\tau]-$ фундаментальная матрица Коши для однородного уравнения $\dot{x}=Ax$, $\left(\{X[T,\tau]\}_2\right)^T$ – операция транспонирования.

Заметим, что в данном случае

$$\min_{u\in P}\langle B(\tau)u, s(\tau,l)\rangle = -\alpha\sqrt{s_3^2(\tau,l)+s_4^2(\tau,l)}, \quad (4.2)$$

$$\max_{v\in Q}\langle C(\tau)u, s(\tau,l)\rangle = \beta\sqrt{s_3^2(\tau,l)+s_4^2(\tau,l)}. \quad (4.3)$$

Величина гипотетического рассогласования принимает вид

$$\varepsilon^0(t_0,x_0,T)=\max\left\{0,\ \max_{l\in S^{(2)}}\left[\langle x_0, s(t_0,l)\rangle + (-\alpha+\beta)\int_{t_0}^{T}\sqrt{s_3^2(\tau,l)+s_4^2(\tau,l)}d\tau\right]\right\}. \quad (4.4)$$

При этом вектор $u^e(\tau,l)\in P$, на котором достигается минимум в (4.2) вычисляется по формуле

$$u^e(\tau,l)=-\frac{\alpha}{\sqrt{s_3^2(\tau,l)+s_4^2(\tau,l)}}\begin{pmatrix}s_3(\tau,l)\\ s_4(\tau,l)\end{pmatrix}, \quad \tau\in[t_0,T], \quad (4.5)$$

а вектор $v^0(\tau,l)\in Q$, на котором достигается максимум в (4.3) – по формуле

$$v^e(\tau,l)=\frac{\beta}{\sqrt{s_3^2(\tau,l)+s_4^2(\tau,l)}}\begin{pmatrix}s_3(\tau,l)\\ s_4(\tau,l)\end{pmatrix}, \quad \tau\in[t_0,T]. \quad (4.6)$$

В численном эксперименте было установлено, что

$$\varepsilon^0(t_0,x_0,T)=354.77\ м.$$

Пусть $l^0\in S^{(2)}-$ вектор, на котором достигается максимум в (4.4). Заметим, что в случае $\alpha>\beta$ он единственен [5]. Программные управления игроков $u^*(\cdot), v^*(\cdot)$, реализующие результат

$$\left\|\left\{x\left(T,t_0,x_0,u^*(\cdot),v^*(\cdot)\right)\right\}_2\right\|=\varepsilon^0(t_0,x_0,T),$$

имеют вид [17]

$$u^*(\cdot)=u^e(\cdot,l^0),\ v^*(\cdot)=v^e(\cdot,l^0).$$

Однако пара управлений $u^*(\cdot), v^*(\cdot)$ не образует седловую точку в игре и, следовательно, первый игрок не может программной стратегией $u^*(\cdot)$ гарантировать себе результат в игре, равный гипотетическому рассогласованию. Этот факт демонстрируется в числовом эксперименте. Второй игрок выбирает постоянную стратегию

$$v^{lok}=\frac{\beta}{\sqrt{x_{10}^2+x_{20}^2}}\begin{pmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{pmatrix}, \quad t\in[t_0,T]. \quad (4.7)$$

Физический смысл этой стратегии состоит в прицеливании вектора управляющей силы в исходном положении в сторону, противоположную началу координат. В паре со стратегией $u^*(\cdot)$ первого игрока получено

$$\left\|\{x(t_0,x_0,u^*(\cdot),v^{lok},T)\}_2\right\| = 395.297>354.766 = \left\|\{x(t_0,x_0,u^*(\cdot),v^*(\cdot),T)\}_2\right\|. \quad (4.8)$$

Неравенство (4.8) означает, что единоличное уклонение второго игрока от пары стратегий $u^*(\cdot), v^*(\cdot)$ (даже в классе постоянных стратегий) привело к улучшению результата в игре второго игрока (и ухудшению первого игрока). Задача обеспечения гарантии достижения первым игроком результата в игре, равного гипотетическому рассогласованию, решается в рамках позиционной схемы управления, в которой первый игрок использует информацию о реализующемся в каждый текущий момент времени фазовом векторе игры.

5. Позиционное управление процессом первым игроком

Определение 3. *Произвольную функцию*

$$u:[t_0,T]\times R^4\to P$$

назовем позиционным управлением первого игрока.

Допускается, что функция u может быть разрывной по переменной x. Тогда после подстановки ее в дифференциальные уравнения (3.5) нельзя гарантировать существование решения задачи Коши для этого уравнения.

Следуя книге [9] формализуем понятие движения динамического объекта, порожденного позиционным управлением первого игрока и выходящего из начального положения t_0, x_0.

Промежуток времени $[t_0, T]$ разобьем на полуинтервалы

$$\Delta : [\tau_s, \tau_{s+1}),\ s = 0,1,\cdots,k-1, \quad k \in N^+$$

точками

$$\tau_0 = t_0,\ \tau_{s+1} = \tau_s + \delta,\ \delta = \frac{T - t_0}{k},$$
$$s = 0,1,\cdots,k-1 \Rightarrow \tau_k = T.$$

Пусть $v(\cdot) \in \Pi_Q[t_0, T] -$ произвольное программное управление второго игрока. На промежутке $[\tau_0, \tau_1)$ решаем задачу Коши:

$$\dot{x}_\Delta = Ax_\Delta + Bu[\tau_0, x_0] + Cv(t),$$
$$x_\Delta(\tau_0) = x_0$$

Обозначим $x_\Delta(t), t \in [\tau_0, \tau_1) -$ ее решение. Полагаем $x_1 = \lim\limits_{t \to \tau_1 - 0} x_\Delta(t)$. Переходим к полуинтервалу $[\tau_1, \tau_2)$.

Решаем задачу Коши:

$$\dot{x}_\Delta = Ax_\Delta + Bu[\tau_1, x_1] + Cv(t),$$
$$x_\Delta(\tau_1) = x_1$$

и т. д.

Определение 4. *Ломаной Эйлера* $x_\Delta(\cdot) = x_\Delta(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot])$, отвечающей разбиению Δ, *выходящей из начального положения* (t_0, x_0), *порожденной позиционным управлением* $u[\cdot]$ *первого игрока, назовем функцию* $x_\Delta(\cdot)$, *удовлетворяющую на каждом полуинтервале* $[\tau_s, \tau_{s+1}),\ s = 0,1,\ldots$ *дифференциальному уравнению*

$$\dot{x}_\Delta(t) = Ax_\Delta(t) + Bu(\tau_s, x_\Delta(\tau_s)) + Cv(t),$$
$$t \in [\tau_s, \tau_{s+1}), \qquad .$$
$$x_\Delta(\tau_s) = \lim_{t \to \tau_s - 0} x_\Delta(t),\ s = 0,1,\ldots$$

Определение 5. *Движением* $x(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot])$, *выходящим из начального положения* (t_0, x_0) *и порожденным позиционным управлением* $u[\cdot]$ *первого игрока, назовем функцию* $x(\cdot)$, *определенную на промежутке времени* $[t_0, T]$ *и для которой существует последовательность ломаных Эйлера* $x_\Delta^{(k)}(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot]),\quad k = 1,2,\cdots,$ *равномерно сходящихся к ней при условии, что* $\delta^{(k)} \to 0$. *Здесь* $\delta^{(k)} = \sup\limits_i \left(\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}\right)$ *(шаг разбиения).*

Символом $X(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot])$ обозначим множество всех движений $x(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot])$.

В дальнейшем это множество будем называть *пучком движений.* Известно [9], что $X(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot]) \neq \varnothing$. При этом, если

$$\|x(T)\| \le \rho_0 \ \forall x(\cdot) \in X(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot]),$$

то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, для которого будет

$$\|x_\Delta(T)\| < \rho + \varepsilon \ \ \forall x_\Delta(\cdot) = x_\Delta(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot])$$

при условии, что шаг разбиения Δ меньше величины $\delta(\varepsilon) > 0$.

Пучок движений содержит более одного движения. Это следует из того факта, что программное управление второго игрока в определении движения произвольно.

Таким образом, если позиционная стратегия первого игрока гарантирует некоторый результат в игре для первого игрока для любого движения из пучка, порожденного ею, то этот результат не может быть ухудшен для первого игрока никакими действиями второго игрока, так как его противодействие в конечном итоге сводится к реализации некоторой его программной стратегии.

6. Экстремальная позиционная стратегия первого игрока

Для произвольной начальной позиции $\{t, x\}$ по формуле (4.1) вычисляется гипотетическое рассогласование.

Пусть $\varepsilon^0(t, x, T) > 0.$

Символом $l^0(t, x)$ обозначим вектор $l^0 \in S^{(2)}$, на котором достигается максимум в (4.1).

Полагаем

$$u^e(t,x) = -\frac{\alpha}{\sqrt{s_3^2\left(t,l^0(t,x)\right)+s_4^2\left(t,l^0(t,x)\right)}}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} s_3\left(t,l^0(t,x)\right) \\ s_4\left(t,l^0(t,x)\right)\end{pmatrix}, \quad (t,x)\in[t_0,T]\times R^4. \quad (6.1)$$

Определение 6. *Позиционное управление*

$$u^0[t,x] = \begin{cases} u^e(t,x), & \varepsilon(t,x,T)>0, \\ \forall u\in P, & \varepsilon(t,x,T)=0, \end{cases}$$

$$(t,x)\in[t_0,T]\times R^4$$

будем называть экстремальным для первого игрока.

В рассматриваемой игре выполнены следующие условия:

1. Дифференциальные уравнения движения линейны.

2. Справедливо равенство $B=C$.

3. Множества P и Q связаны соотношением $P=\lambda Q,\ \lambda>1$.

Тогда имеет место теорема [9], утверждающая существование седловой точки в игре в классе позиционных стратегий.

Теорема 1. *Для любой начальной позиции* (t_0,x_0) *справедливо неравенство*

$$\|x(T)\|\le\varepsilon^0(t_0,x_0,T)$$

$$\forall x(\cdot)\in X\left(\cdot,t_0,x_0,u^0[\cdot]\right). \quad (6.2)$$

Доказательство теоремы сводится к доказательству того факта, что вдоль любого движения $x(\cdot)\in X\left(\cdot,t_0,x_0,u^e[\cdot]\right)$ функция $\varepsilon(t)=\varepsilon^0(t,x(t),T)$ не возрастает. При этом очевидно, что

$$\varepsilon(t_0)=\varepsilon^0(t_0,x_0,T),$$

$$\varepsilon(T)=\varepsilon^0(T,x(T),T)=\left\|\{x(T)\}_2\right\|.$$

Неравенство (6.2) обеспечивает необходимые гарантированные результаты в игре первому игроку. Для этого ему следует реализовать позиционную схему управления, описанную в пункте **5,** с позиционной стратегией в форме экстремального управления. В качестве движения, отвечающего этой схеме управления, следует взять ломаную Эйлера при достаточно большом k.

В работе были проведены два опыта. В первом случае второй игрок применял оптимальную программную стратегию (4.6), а во втором – постоянную стратегию (4.7). Напомним, что именно управление (4.7) не позволило первому игроку получить гарантированный результат $\varepsilon^0(t_0,x_0,T)$ в рамках программных управлений.

В обоих случаях принималось $k=10$. Как и следовало ожидать, в первом опыте получилось

$$\left\|\{x(T)\}_2\right\|=354.77\ м\approx\varepsilon^0(t_0,x_0,T),$$

а во втором опыте —

$$\left\|\{x(T)\}_2\right\|=104.7\ м<\varepsilon^0(t_0,x_0,T).$$

Таким образом, во втором опыте первому игроку не только удалось гарантировать результат в игре, совпадающий с гипотетическим рассогласованием, но и существенно улучшить его.

7. Решение игры "преследование-убегание"

Применим полученные результаты к исходной игре "преследование-убегание", поставленной в пункте **1**. С этой целью позиционные управляющие воздействия первого игрока в уравнениях (3.1), (3.2) будем строить по формуле (6.1) с учетом условия (3.3).

В численном эксперименте снова были рассмотрены два случая.

В первом случае второй игрок применял оптимальную программную стратегию (4.6). Ниже на рис. 2 приводятся траектории игроков в исходной плоскости xOy

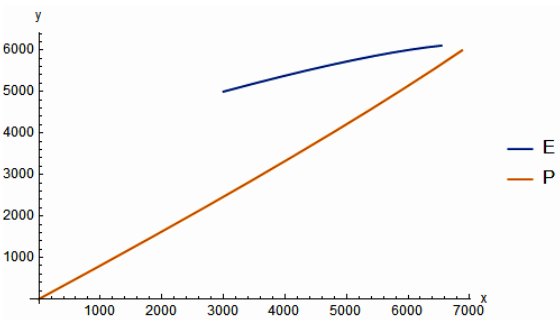

Рис. 2.

Расстояние между игроками в конечный момент времени равно

$$\left\|\bar r_E(T)-\bar r_P(T)\right\|=354.77\ м\approx\varepsilon^0(t_0,x_0,T).$$

Во втором случае второй игрок применял стратегию v^{lok}, также с учетом условия (3.3).

Ниже на рис. 3 приводятся траектории игроков в исходной плоскости xOy.

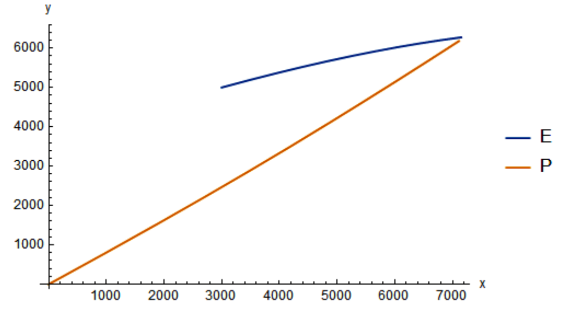

Рис. 3.

Расстояние между игроками в конечный момент времени равно

$$\left\|\overline{r}_E\left(T\right)-\overline{r}_P\left(T\right)\right\|=104.7\ м<\varepsilon^0\left(t_0,x_0,T\right).$$

Заключение

Полученные в статье результаты подтверждают отсутствие седловой точки в игре "преследование-убегание" в классе программных стратегий и ее наличие в классе позиционных стратегий.

В случае применения первым игроком позиционной схемы управления с экстремальной позиционной стратегией игрок-преследователь гарантирует в игре программный максимин расстояния между игроками в конечный момент времени.

При этом единоличное отклонение второго игрока от оптимальной программной стратегии приводит к ухудшению его результата в игре.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры, I // ДАН СССР. 174, № 6 (1967). 1278–1280.
2. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры, II // ДАН СССР. 175, № 4 (1967). С. 764–766.
3. *Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. Я I. С .27–29.
4. *Пшеничный Б.Н., 0нопчук Ю.Н.* Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР: Техн. киберн. 1968. JS I. С. 13–22.
5. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
6. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* Линейные дифференциально-функциональные игры // Доклады АН СССР. 1971. Т. 197, № 4. С. 777–780.
7. *Понтрягин Л.С.* Линейная дифференциальная игра убегания // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 112. С. 30–63.
8. *Никольский М.С.* Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний // Дифференциальные уравнения, 1972. Т. 8, № 2. С. 260–267.
9. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
10. *Петросян Л.А.* Дифференциальные игры преследования. JL: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 224 с.
11. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. Новая серия. 1980. Т. 112, вып. 3. С. 307–330.
12. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
13. *Понтрягин Л.С., Мищенко А.С.* Решение линейной дифференциальной игры преследования без дискриминации убегающего объекта // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 5. С. 1063–1066.
14. *Жуковский В.А., Чиркий А.А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова думка, 1994.
15. *Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математика. Изв. вузов. 1994. № 4(383). С.24–29.
16. *Петров Н.Н.* Многократная поимка в примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 747–754.
17. *Лутманов С.В.* Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие / Перм. ун-т. Пермь, 2010. 200 с.
18. *Вагин Д.А., Петров Н.Н.* Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 2. С. 234–241.

19. *Саматов Б.Т.* Задача преследования–убегания при интегрально-геометрических ограничениях на управления преследователя // Автоматика и телемеханика. 2013. № 7. С. 159–171.

20. *Кумков С.С., С. Ле Менек, В.С. Пацко.* Два слабых преследователя в игре против одного убегающего // Автоматика и телемеханика. 2014. № 10.

Game problems about meeting in an environment with resistance that depends linearly on the velocity vector

S. V. Lutmanov
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
mpu@psu.ru; 8(342) 2396375

The paper examines the conflict situation of "pursuit-escape" of two aircraft in the upper atmosphere in a uniform gravity field. Devices are identified with controlled material points. On the part of the medium, a drag force acts on each of them, which is a linear function of the components of the velocity vector. The conflict situation is considered as an antagonistic game of two persons, from the point of view of the player-pursuer. The player-ally performs such a method of action that guarantees him the max minimum of the mutual distance between the players at the final moment of time.

Keywords: *differential game; positional strategy; program strategy; extreme strategy; programing maximin.*