

## МЕХАНИКА МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 004.9

### Анализ эффективности подкрепляющих элементов в задаче оптимизации ребристой оболочки из композитного материала

**А. Ш. Кусяков**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15  
kusyakov@psu.ru; 89026354772

Исследуется проблема эффективности подкрепляющих элементов в задаче оптимизации ребристой цилиндрической оболочки, находящейся под действием осевых сжимающих нагрузок. При построении физических ограничений по устойчивости учитываются как общая, так и местная формы потери устойчивости. В качестве целевой функции используется масса ребристой оболочки. Предложен алгоритм оптимизации, позволяющий учесть не только множественность, но и существование решения задачи.

**Ключевые слова:** композит; оболочка; устойчивость; прочность; оптимизация.

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-4-29-33

#### Введение

Наиболее значимые результаты исследований в области расчета и проектирования подкрепленных тонкостенных конструкций представлены в работах [1–3, 5–10].

Основное внимание в этих работах было уделено проблеме построения эффективных алгоритмов проектирования, в предположении, что решение задачи существует и единственно.

В работе [4] приведен общий алгоритм оптимального проектирования ребристой композитной пластины, учитывающий множественность решений задачи.

В настоящей работе предлагается алгоритм решения задачи оптимизации подкрепленной цилиндрической оболочки, учиты-

вающий не только множественность, но и существование решения задачи.

#### 1. Постановка задачи

Рассматривается композитная цилиндрическая оболочка радиусом  $R$  и длиной  $L$ , подкрепленная продольным набором ребер (рис. 1).

Основным структурным элементом полотна оболочки является монослой.

Он состоит из параллельно уложенных волокон, связанных между собой полимерным связующим – матрицей.

Ребра (стрингеры) представляют собой однонаправленные композиты, изготовленные из того же материала, что и полотно оболочки.

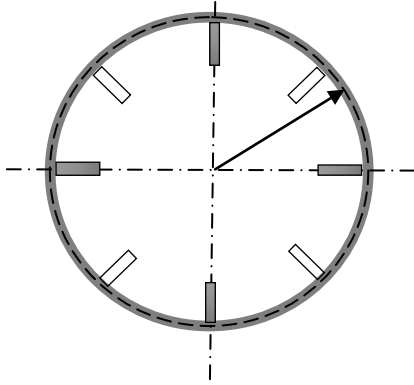


Рис. 1. Поперечное сечение ребристой оболочки

Предполагается, что оболочка находится под действием осевых сжимающих нагрузок  $q$  (рис. 2).

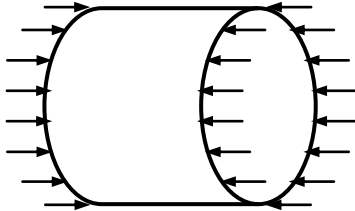


Рис. 2. Оболочка, сжатая вдоль образующих

Требуется оценить эффективность введения в конструкцию оболочки подкрепляющих элементов (стрингеров).

Введем обозначения:

$h$  – толщина полотна оболочки;

$t_s, H_s, B_s$  – шаг, высота и ширина ребра соответственно (рис. 3);

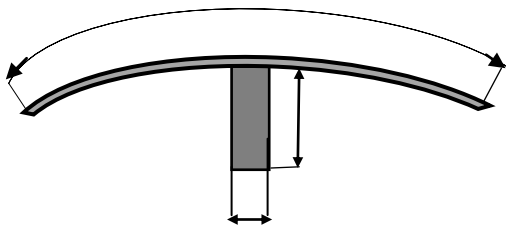


Рис. 3. Элемент стрингерной оболочки

$t_s, H_{sm}$  – максимально возможная по условиям технологии высота стрингеров;

$h_s$  – условная "толщина" стрингеров:

$$h_s = \frac{B_s H_s}{t_s};$$

$h_f$  – полная условная "толщина" подкрепленной оболочки:

$$h_f = h + h_s;$$

$\gamma$  – относительная толщина полотна оболочки:

$$\gamma = \frac{h}{h_f};$$

$E_1, E_2$  – модули упругости вдоль и поперек волокон материала конструкции соответственно;

$\nu_{12}, \nu_{21}$  – коэффициенты Пуассона материала конструкции;

$G_{12}$  – модуль сдвига материала конструкции;

$b_{11}, b_{22}, b_{12}, b_{33}$  – компоненты матрицы жесткости монослоя:

$$b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$b_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad b_{33} = G_{12};$$

$D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_G$  – изгибные жесткости полотна оболочки;

$C_{xx}, C_{yy}, C_{xy}, C_G$  – мембранные жесткости полотна оболочки;

$E_s$  – модуль Юнга материала продольных ребер.

Полотно оболочки и ребра изготовлены из одного и того же материала.

В этом случае, с точностью до произведения коэффициентов Пуассона, имеем:

$$E_s = b_{11}.$$

## 2. Критические нагрузки

Критическую нагрузку, соответствующую общей форме потери устойчивости, будем определять по классической формуле для ортотропной оболочки с "приведенными" изгибными жесткостями и податливостями:

$$q_{cr} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_{xx}^{(p)}}{\delta_{yy}^{(p)}}}, \quad (1)$$

где

$$D_{xx}^{(p)} = D_{xx} + \frac{E_s J_s}{t_s} + \frac{C_{xx} E_s h_s}{C_{xx} + E_s h_s} e_s^2; \quad (2)$$

$$J_s = \frac{F_s H_s^2}{12}, \quad e_s = \frac{h + H_s}{2}, \quad F_s = B_s H_s; \quad (3)$$

$$\delta_{yy}^{(p)} = \frac{C_{xx} + E_s h_s}{C_{yy} (C_{xx} + E_s h_s) - C_{xy}^2}. \quad (4)$$

С точностью до эффектов Пуассона влиянием ребер на податливость конструкции в окружном направлении можно пренебречь, то есть

$$\delta_{yy}^{(p)} = \frac{1}{C_{yy}}. \quad (5)$$

Если полотно ребристой оболочки состоит только из продольных монослоев, "приведенная" изгибная жесткость может быть представлена в виде:

$$D_{xx}^{(p)} = D_f (\gamma^3 + (1 - \gamma) r_H^2 + 3\gamma(1 - \gamma)(r_H + \gamma)^2). \quad (6)$$

Здесь

$$D_f = \frac{b_{11} h_f^3}{12}, \quad r_H = \frac{H_s}{h_f}. \quad (7)$$

Податливость конструкции можно представить в виде

$$\delta_{yy}^{(p)} = \frac{1}{b_{22} h_f \gamma}. \quad (8)$$

Подставив выражения (6) и (8) в формулу (1), получим

$$q_{cr} = q_f \sqrt{p(\gamma) \gamma}, \quad (9)$$

где

$$q_f = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_f}{\delta_f}}. \quad (10)$$

Здесь  $\delta_f$  – податливость гладкой оболочки толщиной  $h_f$  в окружном направлении.

Критическую нагрузку, соответствующую местной форме потери устойчивости, вычисляем по известной формуле для гладкой ортотропной пластинки:

$$q_{crm} = k_s \frac{2\pi^2}{t_s^2} (\sqrt{D_{xx} D_{yy}} + D_{xy} + 2D_G). \quad (12)$$

Здесь  $k_s$  – редуцированный коэффициент:

$$k_s = 1 + \frac{E_s h_s}{E_x h}. \quad (13)$$

где  $E_x$  – модуль Юнга полотна пластины по направлению действия нагрузки.

Если полотно ребристой оболочки состоит только из продольных монослоев, изгибные жесткости и коэффициент редукции можно представить следующим образом, соответственно:

$$D_{xx} = \frac{b_{11} h_f^3}{12} \gamma^3, \quad D_{yy} = \frac{b_{22} h_f^3}{12} \gamma^3, \\ D_{xy} = \frac{b_{12} h_f^3}{12} \gamma^3, \quad D_G = \frac{b_{33} h_f^3}{12} \gamma^3; \quad (14)$$

$$k_s = \frac{1}{\gamma}. \quad (15)$$

### 3. Алгоритм проектирования

Алгоритм проектирования ребристой оболочки состоит из следующих шагов:

1. Полагаем, что полотно оболочки состоит только из продольных монослоев. Данная структура армирования является, очевидно, наилучшей по условиям прочности.

2. Вычисляем полную условную "толщину"  $h_f$  ребристой оболочки:

$$h_f = \frac{q_0}{\sigma_{-1v}}.$$

Здесь  $\sigma_{-1v}$  – предел прочности монослоя при сжатии в направлении волокон,  $q_0$  – заданная сжимающая нагрузка.

3. Полагая  $h = h_f$ , находим критическую нагрузку для гладкой оболочки  $q_{cr}$ . Проверяем выполнение условия общей устойчивости:

$$q_f \geq q_0 \quad (0.1)$$

Если это условие соблюдается, то процесс проектирования завершается. Введение подкрепляющих элементов в этом случае не позволяет снизить массу конструкции.

Если условие общей устойчивости не выполняется, вычисляем максимально возможную по условиям устойчивости толщину гладкой оболочки:

$$h_{\max} = \sqrt{\frac{q_0 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}}}.$$

Вычисляем теоретический коэффициент снижения массы:

$$k_{tlm} = \frac{h_f}{h_{\max}}.$$

4. Полагая  $k_{lm} = k_{ilm} (h_f = k_{lm} h_{max})$ ,  $H_s = H_{sm}$ , решаем относительно  $\gamma$  уравнение устойчивости:

$$q_0 = q_f \sqrt{p(\gamma)\gamma}.$$

Последнее уравнение можно представить в виде

$$p(\gamma)\gamma = \left(\frac{q_0}{q_f}\right)^2.$$

Нетрудно видеть, что последнее равенство представляет собой алгебраическое уравнение пятой степени относительно величины  $\gamma$ . Величина  $\gamma$ , очевидно, должна принадлежать промежутку  $[0;1]$ .

Если уравнение имеет решение на промежутке  $[0;1]$ , переходим к следующему шагу. В противном случае определяем на промежутке  $[k_{ilm};1]$  наименьшее возможное значение коэффициента снижения массы, при котором уравнение имеет решение. Для нахождения данного значения можно воспользоваться любой известной процедурой одномерного анализа, например, методом прямого табулирования.

5. По найденным значениям  $\gamma$  и  $h_f$  вычисляем толщину полотна и условную "толщину" ребер:

$$h = h_f \gamma, \quad h_s = h_f (1 - \gamma).$$

6. Шаг продольных ребер находим из условия сохранения местной устойчивости:

$$q_{crm}(t_s) = q_0.$$

Здесь  $q_{crm}$  – критическая нагрузка, соответствующая местной форме потери устойчивости панели между ребрами. Выражение для нахождения шага продольных ребер, полученное из условия местной устойчивости, имеет вид

$$t_s = \pi \gamma \sqrt{\frac{\sqrt{b_{11}b_{22}} + b_{12} + 2b_{33} h_f^3}{6q_0}}.$$

По известным значениям  $h_s, t_s$  и  $H_s$  находим ширину стрингера:

$$B_s = \frac{h_s t_s}{H_s}.$$

7. По найденной полной условной "толщине" ребристой оболочки вычисляем массу конструкции:

$$G_f = 2ab\rho_0 h_f.$$

Здесь  $\rho_0$  – плотность материала подкрепленной оболочки.

#### 4. Пример расчета

Цилиндрическая оболочка радиусом  $R$  и длиной  $L$  находится под действием сжимающих нагрузок  $q_0$ . Упругие характеристики материала конструкции приведены таблице; предел прочности  $\sigma_{-1v} = 0,7$  (ГПа).

Упругие характеристики материала пластинки

$E_1$ (ГПа)	$E_2$ (ГПа)	$\nu_{12}$	$G_{12}$ (ГПа)
140	7	0.24	2.75

Требуется оценить эффективность введения в конструкцию цилиндрической оболочки продольных ребер жесткости, если

$$q_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ (н/м)}; \quad R = L = 0,5 \text{ (м)};$$

$$H_{sm} = 0,025 \text{ (м)}.$$

Теоретический коэффициент снижения массы в данном примере равен

$$k_{ilm} = 0,6.$$

Полная условная толщина конструкции равна

$$h_f = 0,007 \text{ (м)}.$$

Подставив найденное значение в уравнение устойчивости и решив его, получим пять корней. Два корня уравнения принадлежат промежутку  $[0; 1]$ :

$$\gamma_1 = 0,40 \quad \text{и} \quad \gamma_2 = 0,88,$$

т. е. задача оптимизации имеет два решения. Найденные значения  $\gamma$  позволяют определить все геометрические характеристики ребристой оболочки.

Первый корень соответствует случаю, когда большую по массе часть конструкции составляют ребра, второй корень – полотно оболочки.

Таким образом, введение в конструкцию оболочки подкрепляющих элементов позволило снизить массу конструкции на 40 процентов.

В заключение отметим, что реальный коэффициент снижения массы далеко не всегда совпадает с его теоретическим значением.

Например, уменьшив в рассмотренном выше примере высоту до  $H_{sm} = 0,015$  (м), получим, что уравнение устойчивости не имеет решений, принадлежащих промежутку  $[0; 1]$ . Уточненное значение коэффициента в этом случае равно  $k_m = 0,73$ .

#### Список литературы

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Исследования в области устойчивости ребристых оболочек // Прикладная механика. 1983. Т.19, № 11. С. 3–20.
2. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
3. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1982. 256 с.
4. Кусяков А.Ш. Проектирование композитных стрингерных пластин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4(47). С. 44–48.
5. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1976. 408 с.
6. Маневич А.И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. Киев; Донецк: Вища школа, 1979. 152 с.
7. Мормуль Н.Ф., Почтман Ю.М. Многокритериальная оптимизация подкрепленных композитных панелей при комбинированном нагружении // Механика композитных материалов. 1993. Т. 29, № 6. С. 823–830.
8. Немировский Ю.В. Устойчивость и выпучивание конструктивно анизотропных и неоднородных пластин и оболочек // Механика твердого деформируемого тела. М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. Т. 9. С. 5–156.
9. Почтман Ю.М., Тугай О.В. Подкрепленные многослойные цилиндрические оболочки минимального веса, сжатые в осевом направлении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. ГГУ. Горький, 1980. Вып. 1. С. 153–156.
10. Томашевский В.Т. Ануфриев А.П., Шалыгин В.Н., Яковлев В.С., Калимулин Р.И. Оптимизация конструкций подкрепленных цилиндрических оболочек из композитов // Механика композитных материалов. 1987. № 5. С. 853–869.

## Analysis of the effectiveness of reinforcing elements in the problem of optimizing a ribbed shell made of composite material

A. Sh. Kusyakov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia  
kusyakov@psu.ru; 89026354772

The problem of the effectiveness of reinforcing elements in the optimization problem of a ribbed cylindrical shell under the action of axial compressive loads is investigated. When constructing physical stability constraints, both general and local forms of buckling are taken into account. The mass of the ribbed shell is used as an objective function. An optimization algorithm is proposed that allows taking into account not only the multiplicity, but also the existence of the solution to the problem.

**Keywords:** composite; shell; stability; strength; design.