УДК 517.956

К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной слабой сингулярной и двумя сверхсингулярными линиями

Б. М. Шоймкулов
Таджикский национальный университет
Таджикистан, 734025, г. Душанбе, ул. Рудаки, 17
boitura@mail.ru; +992 919-43-11-84

Исследована переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной слабой сингулярной и двумя сверхсингулярными линиями. Найдено условие совместности для переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной слабой сингулярной и двумя сверхсингулярными линиями. При выполнении условия совместности найдены интегральные представления многообразия решений в явном виде через три произвольных постоянных, для которой можно поставить задачи с начальными данными (задачи типа Коши).

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения; системы дифференциальных уравнений; частные производные; переопределенная; сингулярные; сверхсингулярные; линия.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-4-24-28

Через D обозначим треугольную область, ограниченную отрезками

$\Gamma_1 = \{0 < x < a_0, y = 0\}$,

$\Gamma_2 = \{0 < x < a_0, y = x\}, \Gamma_3 = \{x = a_0, 0 < y < a_0\}$.

В области D рассмотрим переопределенную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{a_1(x,y)}{(x-y)^\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{(x-y)^\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \\ + \dfrac{c_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}} v + \dfrac{f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{a_2(x,y)}{(x-y)^\beta}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{b_2(x,y)}{(x-y)^\beta}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \\ + \dfrac{c_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+1}} v + \dfrac{f_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+1}}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{a_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{b_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \\ + \dfrac{c_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}} v + \dfrac{f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}, \end{cases} \quad (1)$$

где

$\alpha = const < 1, \beta = const > 1, \gamma = const > 1,$

$a_j(x,y), c_j(x,y) f_j(x,y) (1 \le j \le 3)$ – заданные функции класса $C^1(D) \cap C(\overline{D})$,

$v(x,y) \in C^2(D)$ – неизвестная функция.

Пусть в системе (1) коэффициенты

$$a_j(x,y), c_j(x,y) (1 \le j \le 3)$$

и правые части $f_j(x,y) (1 \le j \le 3)$ удовлетворяют условиям совместности:

$$\begin{aligned} & a_3(x,y), b_3(x,y), c_3(x,y), f_3(x,y) \in C_x^1(\overline{D}), \\ & a_2(x,y), b_2(x,y), c_2(x,y), f_2(x,y) \in C^1(\overline{D}), \\ & a_1(x,y), b_1(x,y), c_1(x,y), f_1(x,y) \in C_y^1(\overline{D}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}[\frac{a_2(x,y)}{(x-y)^\beta}] + \frac{a_2(x,y) b_2(x,y)}{(x-y)^{2\beta}} + \frac{c_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+1}} = \\ & = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{a_1(x,y)}{(x-y)^\alpha}] + \frac{a_3(x,y) b_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\gamma}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}[\frac{b_2(x,y)}{(x-y)^\beta}] + \frac{a_2(x,y) b_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\beta}} + \\ & + \frac{b_2(x,y) b_2(x,y)}{(x-y)^{2\beta}} = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{b_1(x,y)}{(x-y)^\alpha}] + \\ & + \frac{a_1(x,y) b_2(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\beta}} + \frac{b_1(x,y) b_3(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\gamma}} + \frac{c_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}, \end{aligned} \quad (4)$$

© Шоймкулов Б. М., 2020

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+1}}\Big]+\frac{a_2(x,y)c_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\beta+1}}+ +\frac{b_2(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^{2\beta+1}}=\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{c_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}\Big]+ +\frac{a_1(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\beta+1}}+\frac{b_1(x,y)c_3(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\gamma+1}}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{f_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+1}}\Big]+\frac{a_2(x,y)f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\beta+1}}+ +\frac{b_2(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^{2\beta+1}}=\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+1}}\Big]+ +\frac{a_1(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\beta+1}}+\frac{b_1(x,y)f_3(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\gamma+1}}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{a_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma}}\Big]+\frac{a_1(x,y)a_3(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\gamma}}+ +\frac{a_2(x,y)b_3(x,y)}{(x-y)^{\beta+\gamma}}+\frac{c_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}= =\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{a_2(x,y)}{(x-y)^{\beta}}\Big]+\frac{a_2(x,y)a_2(x,y)}{(x-y)^{2\beta}}+ +\frac{a_3(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+\gamma}}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{b_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma}}\Big]+\frac{a_3(x,y)b_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\gamma}}= =\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{b_2(x,y)}{(x-y)^{\beta}}\Big]+\frac{a_2(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^{2\beta}}+ +\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+1}}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{c_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}\Big]+\frac{a_3(x,y)c_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\gamma+1}}+ +\frac{b_3(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+\gamma+1}}=\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+1}}\Big]+ +\frac{a_2(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^{2\beta+1}}+\frac{b_2(x,y)c_3(x,y)}{(x-y)^{\beta+\gamma+1}}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}\Big]+\frac{a_3(x,y)f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\gamma+1}}+ +\frac{b_3(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+\gamma+1}}=\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{f_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+1}}\Big]+ +\frac{a_2(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^{2\beta+1}}+\frac{b_2(x,y)f_3(x,y)}{(x-y)^{\beta+\gamma+1}}. \tag{10}$$

Тогда, вводя новую функцию $v(x,y)=(x-y)^{-1}u$ и используя равенства $g_1(x,y)=b_1(x,y),\ g_2(x,y)=b_2(x,y)+(x-y)^{\beta-1}$, $g_3(x,y)=b_3(x,y)-2(x-y)^{\gamma-1}$ из системы (1) получим систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{g_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}},\\[2mm] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{g_2(x,y)}{(x-y)^{\beta}}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_2(x,y)}{(x-y)^{\beta}},\\[2mm] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{g_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma}}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma}}.\end{cases} \tag{11}$$

Применяя операции перекрестного дифференцирования, для системы (11) находим условия совместности в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{g_2(x,y)}{(x-y)^{\beta}}\Big]+\frac{g_2(x,y)g_2(x,y)}{(x-y)^{2\beta}}= =\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{g_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}\Big]+\frac{g_1(x,y)g_3(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\gamma}}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{f_2(x,y)}{(x-y)^{\beta}}\Big]+\frac{g_2(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^{2\beta}}= =\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{f_1(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}\Big]+\frac{g_1(x,y)f_3(x,y)}{(x-y)^{\alpha+\gamma}}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{g_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma}}\Big]=\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{g_2(x,y)}{(x-y)^{\beta}}\Big], \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma}}\Big]+\frac{g_3(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^{\beta+\gamma}}= =\frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{f_2(x,y)}{(x-y)^{\beta}}\Big]+\frac{g_2(x,y)f_3(x,y)}{(x-y)^{\beta+\gamma}}. \tag{15}$$

Если будем использовать функцию $W(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, тогда из двух последних уравнений системы (11) получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial x}=\dfrac{g_2(x,y)}{(x-y)^{\beta}}W+\dfrac{f_2(x,y)}{(x-y)^{\beta}},\\[2mm] \dfrac{\partial W}{\partial y}=\dfrac{g_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma}}W+\dfrac{f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma}}.\end{cases} \tag{16}$$

Интегрирование начнем со второго уравнения системы (16). В этом случае соответствующее однородное уравнение второй системы (16) запишем в виде

$$\frac{\partial \ln W}{\partial y}=\frac{g_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma}}.$$

После интегрирования получим

$$W(x,y)=\exp(\omega_1(x,y)+g_3(0,0)\omega_1^{\gamma}(x,y))\psi(x), \tag{17}$$

где
$$\omega_1(x,y)=\int_0^y\frac{g_3(x,\tau)-g_3(0,0)}{(x-\tau)^{\gamma}}d\tau,$$

$$\omega_1^{\gamma}(x,y)=\frac{1}{(\gamma-1)(x-y)^{\gamma-1}},$$

$\psi(x)$ – произвольно дифференцируемая функция.

Дифференцируя равенство (17), после подставляя во второй уравнений системы (16), для нахождения произвольной функции $\psi(x)$ имеем:

$$\psi'(x) = \frac{f_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}\exp(-\omega_1(x,y) - g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,y)).$$

Интегрируя, находим

$$\psi(x) = \int_0^y \frac{f_3(x,\tau)}{(x-\tau)^\gamma}\exp(-\omega_1(x,\tau) - g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,\tau))d\tau + \psi_1(x). \tag{18}$$

Значение $\psi(x)$ подставляя в (17) получаем

$$W(x,y) = \exp(\omega_1(x,y) + g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,y))\cdot\Big[\psi_1(x) + \int_0^y \frac{f_3(x,\tau)}{(x-\tau)^\gamma}\exp(-\omega_1(x,\tau) - g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,\tau))d\tau\Big]. \tag{19}$$

Пусть $g_3(0,0) < 0$ и функция $g_3(x,y)$ удовлетворяет условию типа Гельдера

$$|g_3(x,y) - g_3(0,0)| \le H_1(x-y)^{\gamma_1}, \quad H_1 = const > 0, \gamma_1 > \gamma - 1, \tag{20}$$

и функция $f_3(x,y)$ обращается в нуль с асимптотической формулой

$$f_3(x,y) = o[(x-y)^{\gamma_2}], \gamma_2 > \gamma - 1. \tag{21}$$

Далее, от функции $W(x,y)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла первому уравнению системы (16), отсюда находим условие

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big\{\Big(\frac{g_2(x,y)}{(x-y)^\beta} - \frac{\partial\omega_1(x,y)}{\partial x} + \frac{g_3(0,0)}{(x-y)^\gamma}\Big)\cdot\Big[\psi_1(x) + \int_0^y \frac{f_3(x,\tau)}{(x-\tau)^\gamma}\exp(-\omega_1(x,\tau) - g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,\tau))d\tau\Big) + \frac{f_2(x,y)}{x-y}\cdot \exp(-\omega_1(x,y) - g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,y))\Big\} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{f_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}\exp(-\omega_1(x,y) - g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,y))\Big]. \tag{22}$$

Учитывая (22) из первого уравнения системы (16) получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с двумя сверхсингулярными линиями вида

$$\frac{d\psi_1(x)}{dx} = \Big(\frac{g_2(x,0)}{x^\beta} + \frac{g_3(0,0)}{x^\gamma}\Big)\psi_2(x) + \frac{f_2(x,0)}{x^\beta}\exp(-g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,0)). \tag{23}$$

Общее решение уравнение (23) имеет вид

$$\psi_1(x) = \exp(\omega_2(x,0) - g_2(0,0)\omega_2^\beta(x,0) - g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,0))\Big[c_1 + \int_0^x \frac{f_2(t,0)}{t^\beta}\cdot \exp(-\omega_2(t,0) + g_2(0,0)\omega_2^\beta(t,0)dt\Big], \tag{24}$$

где $$\omega_2(x,0) = \int_0^x \frac{g_2(t,0) - g_2(0,0)}{t^\beta}dt,$$

$$\omega_2^\beta(x,0) = \frac{1}{(\beta-1)x^{\beta-1}},$$

c_1 – произвольная постоянная.

Пусть функция $g_2(x,0)$ удовлетворяет условию

$$|g_2(x,0) - g_2(0,0)| \le H_2 x^{\gamma_3}, \quad H_2 = const > 0, \gamma_3 > \beta - 1, \tag{25}$$

и функция $f_2(x,0)$ в окрестности точек $x = 0$ обращается в нуль, и ее поведение определяется следующей асимптотической формулой:

$$f_2(x,0) = o[x^{\gamma_4}], \gamma_2 > \alpha + \beta - 1, \tag{26}$$

и $g_2(0,0) > 0$.

Тогда, подставляя (24) в (19) и учитывая

$$u(x,y) = \int_0^y W(x,\tau)d\tau + \psi_2(x), \tag{27}$$

из первой уравнений системы (11) получим условие

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[W(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{g_1(x,y)}{(x-y)^\alpha}W(x,y) + \frac{f_1(x,y)}{(x-y)^\alpha}\Big]. \tag{28}$$

Используя условие (28) для нахождения произвольной функции $\psi_2(x)$ получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} = \frac{g_1(x,y)}{x^\alpha}\exp(\omega_2(x,0) - g_2(0,0)\omega_2^\beta(x,0))\Big[c_1 + \int_0^x \frac{f_2(t,o)}{t^\beta}\cdot \exp(-\omega_2(t,0) + g_2(0,0)\omega_2^\beta(t,0))dt\Big] + \frac{f_1(x,0)}{x^\alpha}. \tag{29}$$

Дважды интегрируя (29) по переменной x, произвольную функцию $\psi_2(x)$ находим в виде

$$\psi_2(x) = c_1\int_0^x \frac{(x-t)g_1(t,0)\exp(\omega_2(t,0))}{t^\alpha\exp(g_2(0,0)\omega_2^\beta(t,0))}dt + \int_0^x \frac{g_1(t,0)f_2(t,0)\exp(\omega_2(x,0) - g_2(0,0)\omega_2^\beta(x,0))}{2t^{\alpha+\beta}(x-t)^{-2}\exp(\omega_2(t,0) - g_2(0,0)\omega_2^\beta(t,0))}dt + \int_0^x \frac{(x-t)f_1(t,0)}{t^\alpha}dt + c_2 x + c_3. \tag{30}$$

Подставляя значение $\psi_2(x)$ из (30) в (27) и учитывая (19), будем иметь

$$u(x,y)=\int_0^y \frac{f_3(x,s)\exp(-\omega_3(x,s))}{(x-s)^\gamma \exp(g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,s))}\cdot$$
$$\cdot W_1^\gamma(x,s)ds+c_1[\exp(\omega_2(x,0)-$$
$$-g_2(0,0)\omega_2^\beta(x,0)-g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,0))\cdot$$
$$\cdot\int_0^y \exp(\omega_1(x,\tau)+g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,\tau))d\tau+ \tag{31}$$
$$+\int_0^x \frac{(x-t)g_1(t,0)\exp(\omega_2(t,0))}{t^\alpha \exp(g_2(0,0)\omega_2^\beta(t,0))}dt]+$$
$$+\int_0^x K(x,y,t)f_2(t,0)dt+$$
$$+\int_0^x \frac{(x-t)f_1(t,0)}{t^\alpha}dt+$$
$$+c_2x+c_3.$$

где

$$W_1^\gamma(x,s)=\int_s^y \exp(\omega_1(x,s)+g_3(0,0)\omega_1^\gamma(x,s))ds,$$

$$K(x,y,t)=[\frac{1}{t^\beta}\int_0^y \exp(\omega_1(x,\tau)+g_3(0,0)(\omega_1^\gamma(x,\tau)-$$
$$-\omega_1^\gamma(x,0))d\tau+\frac{(x-t)^2 g_1(t,0)}{2t^{\alpha+\beta}}]\exp(\omega_2(x,0)-$$
$$-\omega_2(t,0)-g_2(0,0)(\omega_2^\beta(x,0)-\omega_2^\beta(t,0))),$$

c_1, c_2, c_3 *– произвольные постоянные.*

Таким образом, доказано:

Теорема 1. *Пусть в системе (11)*

$$\alpha<1, \beta>1, \gamma>1,$$

функции $g_j(x,y)$, $f_j(x,y)$ $(1\le j\le 3)$ *удовлетворяют условиям* (12), (13), (14), (15), (20), (21), (22), (25), (26), (28) и $g_3(0,0)<0$, $g_2(0,0)>0$ в области D. *Тогда любое решение системы (11) из класса* $C^2(D)$ *представимо в виде (31).*

Замечание 1. Решение вида (31) в окрестности $y=x$, при выполнении всех условий теоремы 1 непрерывно.

Теорема 2. *Пусть в системе* (1)

$$\alpha<1, \beta>1, \gamma>1,$$

функции

$$a_j(x,y),\ b_j(x,y),\ c_j(x,y),\ f_j(x,y)\ (1\le j\le 3)$$

удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), *и выполнены все условия теоремы 1. Тогда любое решение системы (1) из класса* $C^2(D)$ *представимо в виде*

$$v(x,y)=(x-y)^{-1}u(x,y), \tag{32}$$

где функция $u(x,y)$ *имеет вид (31).*

Замечание 2. Решение вида (32) в окрестности $y=x$ при выполнении всех условий теоремы 2 неограниченно.

Список литературы

1. *Wilczynski E.J.* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. Leipzig: B.G. Teubner, 1906. 324 p.
2. *Appel P.* Fonctons hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d'Hermite / P. Appel, M.J. Kampe de Feriet. Paris: Gauthier-Villars, 1926. 434 p.
3. *Архутик Г.М.* Регулярная особая точка линейных уравнений в полных дифференциалах высших порядков // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979. № 3. С. 46–54.
4. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе: Дониш, 1986. 116 с.
5. *Begehr H.* Transformations, transmutations and kernel functions / H. Begehr, R.P. Gilbert. Vol. 2. Harlow: Longman, 1993. 268 p.
6. *Раджабов Н.* Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями // Душанбе: Изд-во ТГУ, 1980. Ч. 1. 126 с., 1981. Ч. 2. 170 с., 1982. Ч. 3. 170 с.
7. *Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.* Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2015. №. 2. 527 с.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. *Пиров Р.* Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости // Крайові задачі для диференціалних рівнянь. Чернівці: Прут, 2006. Вып. 14. С. 313–320.
10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
11. *Бровко Г.Л.* Необходимые и достаточные условия однородно-простой деформации // Прикл. матем. и механика. 1978. Т. 42. С. 701–710.
12. *Ленская С.Э.* О неоднородно-простых процессах // Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем., механика. 1988. № 1. С. 100–103.
13. *Пиров Р.* Об одной переопределенной системе уравнений в частных производных

второго порядка. Душанбе. 1989. 15 с. Деп. в Тадж. НИИНТИ 19.06.89. № 22(622).

14. *Шоймкулов Б.М., Рузметов Э.* К теории некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения: сб. науч. статей. ТГПУ. Душанбе. 1998. Вып. 6. С. 96–106.
15. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н.* Линейная переопределенная система второго порядка с одной сингулярной точкой // Вестник Национального университета (серия естественных наук). Душанбе: ТГНУ, "Сино", 2005. № 3(26). С. 3–10.
16. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н., Комилов А.О.* Интегральные представления многообразия решений для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с тремя сверхсингулярными областями // Вестник Таджикского национального университета, №1/2, (научный журнал), серия естественных наук. Душанбе. 2017. С. 3–7.
17. *Шоймкулов Б.М.* К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверхсингулярными линиями // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. Душанбе. 2018. № 3. С. 32–43.
18. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сверхсингулярной и одной сингулярной плоскостью в трехмерном пространстве // Электронный инновационный вестник: междунар. период. журнал науч. тр. Бугульма. 2019. № 6. С. 4–12.
19. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверхсингулярными точками // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы естественных и гуманитарных наук и их роль в укреплении научных связей между странами", посвящ. 10-летию Филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе (10–11 октября). Душанбе. 2019. С. 79–82.
20. *Шоймкулов Б.М.* О некоторых переопределенных системах дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверхсингулярными точками // Электронный инновационный вестник: междунар. период. журнал науч. тр. № 1(12). Бугульма. 2020. С. 4–11.

Integral representation of solution manifolds for over determined systems with one weak singular and two super singular lines

B. M. Shoimkulov
Tajik State University; 17, Rudaki st., Dushanbe, 734025, Tajikistan
boitura@mail.ru; +992 919-43-11-84

In this paper, a over determined system of second-order partial differential equations with one weak singular and two super singular line is investigated. A compatibility condition is found for over determined systems of second-order partial differential equations with one weak singular and two super singular line. Under the condition of compatibility, introducing a new function, we come to a over determined system of partial differential equations of the second order with one weak singular and two super singular line of a simpler form. The integral representation of the manifold of solutions of the redefined second-order partial differential system with one weak singular and two super singular line is found explicitly through three arbitrary constants, for which initial data problems(Cauchy type problems) can be posed.

Keywords: *partial differential equations; systems of differential equations; partial derivatives; over determined; singular; super singular; line.*