УДК 512.54

Конечные бипримарные группы с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой подгруппе

Я. Д. Половицкий, **Т. М. Коневских**
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
alg@psu.ru; 8(342) 239−63−21

Описываются конечные бипримарные группы с условием, указанным в заглавии, на базе результатов, полученных в [2].

Ключевые слова: *бипримарная группа; циклическая группа; инцидентная подгруппа.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-4-14-23

Введение

В [1] описаны конечные разрешимые группы с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп. В [2] введен более широкий класс SC-групп – это группы, в которых существует такая подгруппа S (сепарирующая подгруппа), что для любых подгрупп A и B группы, не содержащихся в S, $A \cap B$ – циклическая группа. Там получен ряд свойств конечных SC-групп и описаны некоторые подклассы этого класса.

В настоящей работе на базе полученных в [2] и [1] результатов получено описание конечных бипримарныхSC-групп.

Все необходимые определения и используемые обозначения смотрите в [2]. Для удобства читателей нумерация лемм, теорем и замечаний настоящей работы является продолжением соответствующей нумерации в [2]. Поэтому в ссылках на леммы и теоремы из [2] мы не будем указывать [2], т. е. если в настоящей работе приводится ссылка на лемму 5, а такой леммы здесь нет, то ее надо понимать, как лемму 5 из [2].

Каким может быть остов разрешимой ненильпотентной группы типа 2

Лемма 15. Пусть разрешимая ненильпотентная SC-группа G типа 2 имеет остов F и $Z_0 = Z(F)$. Тогда $G = FA$ (1), где $F \lhd G$ (2), $A \cong Z_k$ (3), $|\pi(A)| \leq 2$ (4) и для F имеет место лишь одна из следующих возможностей (ниже всюду r – простое число):

I. $F \cong E_{r^t}$ (5), $t \geq 2$ (6);

II. $\exists$ $K \lhd G$ (7), такая что $1 < K < F$ (8), $K \cong Z_l$ (9), K – максимальная подгруппа группы F со свойствами (7) – (9) и выполняется одно из условий:

II*a*. $\pi(F) = \{r\}$ (10), $K = Z_0$ (11), $F/K \cong E_{r^t}$ (12) – минимальная нормальная подгруппа группы G/K, $t \geq 2$ (13);

II*b*. $|F/K| = r$ (14), $1 < G' \leq K$ (15), F – непримарная группа, $F = B \rtimes R$ (16), где $1 < B \leq K$ (17), $R \ntriangleleft F$ (18), $\pi(R) = \{r\}$ (19), $(2r, |B|) = 1$ (20), $(Z_0 \cap B) = 1$ (21), $G = B \rtimes N(R) = B \rtimes RD$ (22), где $D \cong Z_s$ (23), $\pi(D) = \pi(A) = \pi(G/F)$ (24) и $D \subset N(R)$ (25).

Доказательство. По определению SC-группы типа 2 $|G| < \infty$ (26). В силу определения 4 и леммы 4 для G выполняются (1)–(4). Для F возможны следующие два случая:

1. F – абелева группа.

Так как F по определению остова нециклическая и не имеет истинных нециклических характеристических подгрупп, то, как нетрудно видеть, выполняются (5) и (6) и F – группа типа *I*.

2. F – неабелева группа.

Так как F в силу условия леммы разрешима, то $1 < F' < F$. Отсюда и из (2) следует, что $F' \lhd G$, и потому ввиду определения остова F' – циклическая группа. Поэтому существует $K \geq F'$ (27), что выполняются (7) – (9) и K – максимальная подгруппа группы F, удовлетворяющая этим условиям. В силу (27) $F/_K$ – абелева группа.

Пусть $\exists\, L \lhd G$ (28), такая, что $K < L < F$ (29). Если L – нециклическая группа, то получаем противоречие с минимальностью остова F, а если L циклическая – противоречие с максимальностью K. Значит, таких L не существует. Поэтому $F/_K$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G/_K$, а тогда из абелевости $F/_K$ следует справедливость (12).

Покажем, что $\pi(Z_0) = \{r\}$ (30). Пусть это не выполняется. Тогда для некоторого $q \neq r$ (31) существует q-подгруппа $Q_0 \subset Z_0$ (32). Пусть Q – силовская q-подгруппа группы F. Тогда в силу (31), (32) и (11) $Q_0 \subset Q \subset K$, и, так как выполняются (9) и (1), то $Q \lhd G$ (33). В силу определения Q $F/_Q$ является q'-группой, и потому F индуцирует в Q q'-группу автоморфизмов Φ. Но в силу (32) Φ действует на Q_0 тождественно, а тогда, как известно (см., напр., [4] 18.5), $\Phi = 1$, то есть $Q \subset Z_0$. Поэтому $F = Q \times S_0$ (34), где $(|Q|, |S_0|) = 1$ (35) и Q циклическая. Теперь из (2), (34) и (35) получаем, что $S_0 \lhd G$ (36). Отсюда и из (33) и (34) получаем противоречие с определением остова F ибо в силу (34) S_0, как и F, нециклическая. Значит, выполняется (30).

Рассмотрим подгруппу $V = C_F(K) = F \cap C(K)$ (37). В силу (7) $C(K) \lhd G$, а тогда из (2) и (37) следует, что $V \lhd G$ (38). В силу (9) K – циклическая группа. Тогда $Aut\ K$ – абелева группа, и потому $G/_{C(K)}$ абелева и $G' \subset C(K)$ (39). Но в силу (1)–(3) и $G/_F$ абелева, а потому $G' \subset F$. Отсюда и из (39) и (37) получаем, что $G' \subset V$ (40). Так как $K \leq V \leq F$ и выполняется (38), то из доказанного выше о L следует, что возможны лишь два случая: $V = F$ или $V = K$.

Рассмотрим каждый из них.

2.1. $V = F$.

Тогда в силу (37), условия 2.1 и неабелевости F имеем: $K \leq Z_0 \leq F$. Так как $Z_0 \lhd G$, то из доказанного выше отсутствия подгрупп L следует справедливость (11), откуда в силу (12) и (30) следует, что выполняется (10) и (13). Мы получили, что F – группа типа *II* с условием *IIa*.

2.2. $V = K$.

Тогда $C_F(K) = K$ и ввиду (40) и неабелевости G выполняется (15). Поэтому $G/_K$ абелева, а тогда из (12) и доказанной выше минимальности нормальной подгруппы $F/_K$ следует справедливость (14).

Пусть F является r-группой, то есть выполняется (10). Рассмотрим $G/_{C(F)} \cong W \leq Aut\ F$ (41). Если W – тоже r-группа, то для любой силовской q-подгруппы Q группы A при $q \neq r$ имеем: $Q \subset C(F)$ (42), и так как A абелева и выполняется (1), то тогда $Q \lhd G$ (43). Но силовская r-подгруппа группы G содержит K и ввиду (15) также инвариантна в G, и потому G нильпотентна, вопреки условию леммы.

Значит, W не является r-группой. Так как по определению остова F не имеет истинных нециклических характеристических подгрупп и ввиду (14) и (9) в F есть циклическая максимальная подгруппа, то ввиду леммы 13 F – одна из трех групп класса $L \cap A$. Но F неабелева, и потому $F \cong Q_8$. Тогда $K \cong Z_4$ (44), а для любой силовской q-подгруппы Q группы G при $q \neq 2$ имеем (в силу (15)): $H = (K \rtimes Q) \lhd G$ (45). Но $|Aut\ K| = 2$ (ввиду (44)), а $2 \nmid |Q|$, и потому $H = K \times Q$. Отсюда и из (45) следует (43) и, как и выше, получаем, что G нильпотентна, в противоречие с условием леммы. Значит, F не является r-группой. Учитывая (14), мы видим, что F представима в виде (16) с условиями (19) и (17) и $r \nmid |B|$ (46). Если $R \lhd F$, то $F = B \times R$ (47) и из (46) и (2) следует, что $R \lhd G$ и $B \lhd G$, а тогда отсюда и из (47) получаем противоречие со свойством остова, отмеченным в замечании 5.

Значит, выполняется (18).

Пусть $2\big||B|$ и S_1 – силовская 2-подгруппа группы F. Тогда из (16) и (46) следует, что $S_1 \subset B$ и ввиду того, что B циклическая, $S_1 \lhd G$ и ${}^{F}/_{S_1}$ – $2'$-группа.

Так как, $Aut\, S_1$ является 2-группой, то $F = C \times S_1$, где $C \lhd G$, и, как и выше, получаем невозможность этого ввиду замечания 5. Значит, $2 \nmid |B|$, и отсюда и из (46) получаем справедливость (20). Из (16), (19) и (46) следует, что (30) равносильно (21).

В силу (2) и (16) по лемме Фраттини $G = F \cdot N(R) = B \cdot N(R)$ (48). Введем обозначения: $T = N(R)$ (49). Если $B \cap T = B_1 \neq 1$ (50), то в силу (17), (1) и (9) $B_1 \lhd G$, а тогда из (49) и (50) следует, что $B_1 \leftthreetimes R = B_1 \times R$, и потому, в силу (16) $B_1 \subset Z_0$, в противоречие с (21). Значит, $B_1 = 1$, а тогда из (48) и (49) получаем: $G = B \leftthreetimes T$ (51).

В силу леммы 4 ${}^{G}/_{F}$ – циклическая π-группа, где $\pi = \pi({}^{G}/_{F}) = \pi(A)$ (52), и потому из (51), (49) и (16) следует, что ${}^{G}/_{F} = {}^{FT}/_{F} \cong {}^{T}/_{T\cap F} = {}^{T}/_{R}$ – циклическая π-группа. Тогда в силу следствия леммы 2 $T = RD$ (53), где D имеет вид (23), и, учитывая (52), выполняется (24). Из (51) и (53) получаем (22), а из (53) и (49) следует справедливость (25).

Мы получили, что F – группа типа II с условием IIb. □

Описание конечных бипримарных SC-групп

Теорема 3. Пусть G – конечная ненильпотентная группа, $\pi(G) = \{p, q\}$, P, Q, соответственно, силовские p- и q-подгруппы группы G, хотя бы одна из них нециклическая, $Z = Z(G)$. Такая группа G является SC-группой типа $2a$ тогда и только тогда, когда она – одна из следующих групп (ниже в формулировке теоремы ни одно из полупрямых произведений не может быть прямым):

1. конечная ненильпотентная бипримарная C_N-группа, являющаяся SC-группой типа $2a$ и имеющая нециклическую силовскую подгруппу;

2. $G = Q \leftthreetimes P$, $Q \cong E_{q^m}$, $m \geq 2$, $P \cong Z_{p^n}$ и выполняется одно из следующих условий:

2.1. в Q нет собственных P-допустимых подгрупп.

2.2. $m = 2$, $Q = Q_1 \times Q_2$, $Q_i \lhd G$ $(i = 1,2)$ и для любых $x, y \in G$, таких, что $P^x \neq P^y$, выполняется $P^x \cap P^y = Z$.

3. $G = (Q_2 \leftthreetimes P) \times Q_1$, $P \cong Z_{p^n}$, $Q_1 \cong Z_{q^t}$ и выполняется одно из условий:

3.1. $|Q_2| = q \neq 2$.

3.2. $Q_2 \cong E_{q^m}$, $m \geq 2$ и в Q_2 нет собственных P-допустимых подгрупп.

4. $G = FA$, $A \geq P \cong Z_{p^n}$, $K = Z(F) \cong Z_{q^l}$, ${}^{F}/_{K} \cong E_{q^l}$, $l \geq 2$, всякая истинная P-допустимая подгруппа группы F содержится в K и выполняется одно из условий:

4.1. $A = P$ и $\forall x, y \in G$, таких, что $P^x \neq P^y$, справедливо: $(P^x \cap P^y) \subset C(K)$.

4.2. $A = Q_1 \times P$, $Q_1 \cong Z_{q^{t_1}}$, $K \leq Q_1 \leq Z$.

5. $G = (Q \times P_1) \leftthreetimes P_2$, $|Q| = q \neq 2$, $P_1 \cong Z_{p^{n-1}}$, $|P_2| = p$, $P_2 \not\subset C(Q)$ и выполняется одно из условий:

5.1. $P_1 \not\subset Z$, $P = (P_1 \leftthreetimes P_2) \cong M_{p^n}$, $p^n \neq 8$.

5.2. $G = (Q \leftthreetimes P_2) \times P_1$.

Необходимость. Пусть группа G, удовлетворяющая условиям теоремы, является SC-группой типа $2a$. Тогда в силу определения 3 она имеет сепарирующую подгруппу $S \lhd G$ (1), $|{}^{G}/_{S}| = p$ (2) и $P \ntriangleleft G$ (3). Если S – циклическая группа, то, очевидно, G есть C_N-группа, то есть G – группа типа 1 теоремы 3.

Пусть S нециклическая. Из (2) и (1) следует, что $\forall x \in G$ $P^x \not\subset S$ (4). Отсюда и из определения SC-группы следует, что $\forall x, y \in G$ при $P^x \neq P^y$ имеем: $(P^x \cap P^y) \cong Z_{p^s}$ (5), где число s зависит от x и y.

В силу замечания 6 в G существует остов F, такой, что $F \leq S$ (6). Тогда по лемме 4 $G = FA$ (7), где либо $A \cong Z_{p^k}$ (8), либо $A = P_1 \times Q_1$ (9), $P_1 \cong Z_{p^k} \not\subset F$ (10), $Q_1 \cong Z_{q^t} \not\subset F$ (11). Отметим, что в силу условия теоремы G – π-группа, где $\pi = \pi(G) = \{p, q\}$ (12).

Далее отдельно рассмотрим случаи, когда F примарная группа и F непримарна.

1. F – примарная группа.

В силу (12) возможны лишь два случая. Если F – p-группа, то из (7)–(10) следует, что $P \lhd G$, в противоречие с (3). Значит, F – q-группа, а тогда из (7)–(9) получаем, что $G = Q \leftthreetimes P$ (13), где $Q \geq F$ (14), а $P = P_1$ (15).

Дальнейшее рассмотрение разобьем на два подслучая:

1.1. F – абелева q-группа.

Тогда из леммы 15 следует, что $F \cong E_{q^m}$ (16), $m \geq 2$ (17). Как показано выше, для подгруппы A из (7) есть две возможности – (8) и (5). Рассмотрим каждую из них отдельно, учитывая (15).

1.1.1. $A = P \cong Z_{p^k}$.

Тогда $Q = F$ (18). Если в Q нет собственных P-допустимых подгрупп, то в силу (16)–(18) и (13) G – группа типа 2 с условием 2.1 теоремы 3.

Пусть в Q есть собственная P-допустимая подгруппа Q_2. Тогда в силу следствия 2 леммы 4 $Q = Q_2 \times Q_3$ (19), где $|Q_i| = q$ (20) и $Q_i \lhd G$ (21), $i = 1,2$.

Так как G неабелева, то из (13) и (19) следует, что хотя бы одна из подгрупп $B_i = Q_i \rtimes P$ (22), $i = 2, 3$ неабелева. Если только одна из B_i неабелева, то G – одна из групп типа 3 с условием 3.1. Пусть обе B_i неабелевы. Тогда ввиду (22) $P \ntriangleleft B_i$ (23), $i = 1,2$.

Предположим, что, например, $B_2 \lhd G$. Тогда из (22) и леммы Фраттини следует, что $G = B_2 \cdot N(P) = Q_1 \rtimes N(P)$, и, так как в силу (19) и (20) $|Q| = q^2$, то $Q \cap N(P) = Q_4$ и $Q_4 \subset Z$. Тогда $Q = Q_2 \times Q_4$ и G – одна из групп типа 3 с условием 3.1.

Пусть теперь $B_i \ntriangleleft G$, $i = 2, 3$. Тогда можно считать $Z \cap Q = 1$ (24) – иначе можно было бы выбрать $Q_2 \subset Z$ и имел бы место рассмотренный выше случай, когда только одна B_i неабелева.

Пусть $x, y \in G$ и $P^x \neq P^y$ (25), такие x и y найдутся ввиду (23). Учитывая (4), из леммы 12 при $T = Q_i$ получаем, что $W = (P^x \cap P^y) \subset C(Q_i)$ (26), $i = 2, 3$, а тогда в силу (19) $W \subset C(Q)$ (27), и, так как в силу (13) $G = Q \rtimes P^x = Q \rtimes P^y$ (28), то из (26) и (28) следует, что $W \leq Z$ (29). Но в силу (24), (26) и (28) $Z \leq W$. Отсюда и из (29) получаем, что $W = Z$. Теперь из этого и (13), (19) – (21) получаем, что G – группа типа 2 с условием 2.2 теоремы 3. Случай 1.1.1. рассмотрен.

1.1.2. $A = P_1 \times Q_1$ (см. (9) – (11)).

Тогда G имеет вид (13), где $Q = FQ_1$ (30) и $P = P_1$ (31), а $A = P \times Q_1$ (32).

Возможны следующие случаи:

1.1.2.1. В F нет собственных P-допустимых подгрупп.

Если Q неабелева, то из (30) и $F \lhd G$ (по определению остова) следует, что $F \cap Z(Q) = F_0 \neq 1$ и $F_0 \lhd G$, то есть F_0 P-допустима. Значит, $F_0 = F$, т. е. $F \subset Z(Q)$, а тогда, ввиду (11) и (30), Q абелева.

Противоречие доказывает, что в случае 1.1.2.1. Q абелева.

Подгруппа $Q_2 = F \cap Q_1$ в силу (32) P-допустима, и потому, учитывая условие 1.1.2.1, (11) и нецикличность F, $Q_2 = 1$, то есть $Q = F \times Q_1$. Теперь отсюда и из (13) следует:

$G = (F \rtimes P) \times Q_1$ и, учитывая (16), G – группа типа 3 с условием 3.2 (где $F = Q_2$). Случай 1.1.2.1 рассмотрен.

1.1.2.2. В F есть собственная P-допустимая подгруппа F_1.

Тогда учитывая (16) и применяя для подгруппы $H = F \rtimes P$ (33) теорему Машке, имеем: $F = F_1 \times F_2$ (34), где F_i P-допустимы ($i = 1,2$). Так как G – неабелева группа, то из (7) и (32) следует, что $F \not\subset Z$ (35).

Рассмотрим два подслучая для Q.

1.1.2.2.1. Q – абелева группа.

Тогда из (13), (16), (30) и P-допустимости F_i следует, что $F_i \lhd G$ (36), ($i = 1,2$). Отсюда, из (34), (16) и замечания 5 об остове F следует, что $|F_i| = q$ (37) и потому из (34) – (36) следует, что $q \neq 2$ (38).

Для Q_1 есть две возможности:

***a*).** $F \cap Q_1 = 1$.

Тогда ввиду (30) $Q = (F_1 \times F_2) \rtimes Q_1$ (39), и потому в силу (36) и (37) $T_i = (F_i \rtimes Q_1) \lessdot Q$ (40), $i = 1,2$. Так как в силу (35) и (32) T_i P-допустимы, то из (4), (40), (34) и SC-условия имеем: $(T_i \rtimes P) \cap (F \rtimes P) = F_i \rtimes P$ – циклические группы, то есть $F_i \subset C(P)$, а тогда ввиду (34) $F \subset C(P)$, то есть ввиду (7) и (32) $F \subset Z$, вопреки доказанному выше (35). Значит, случай *a*) невозможен.

***b*).** $F \cap Q_1 = Q_2 \neq 1$.

В этом случае ввиду (34), (37), (11) и нецикличности F $|Q_2| = q$ (41). Но тогда ввиду условия *b*), (30), (34) и (37) $|Q| = \frac{|Q_1| \cdot |F|}{|Q_1 \cap F|} = |Q_1| \cdot q$, то есть $Q_1 \lessdot Q$ (42), а в силу (41) и (34), например, $F_1 \neq Q_2$. Поэтому отсюда и из (6), (42) и (37) получаем: $Q = F_1 \times Q_1$, а тогда ввиду (13) и (32) $G = (F_1 \rtimes P) \times Q_1$ и учитывая (37) и (38), G – группа типа 3 с условием 3.1 (при $F_1 = Q_2$). Случай 1.1.2.2.1. рассмотрен.

1.1.2.2.2. Q – неабелева группа.

Тогда $(Z(Q) \cap F) = F_1 \lhd G$ (43) и $F_1 \neq 1$. Из (45), (35) и минимальности F следует, что F_1 – циклическая группа, и потому ввиду (16) $|F_1| = q$ (44).

Рассмотрим имеющиеся возможности для F_2.

a) $|F_2| = q$.

Рассмотрение этого случая разобьем на два случая:

***a*1)** $Q_1 \not\supset F_1$.

Тогда в силу (44) $Q_1 \cap F_1 = 1$ и существует $Q_2 = F_1 \times Q_1$ (45). Так как Q неабелева, а Q_2 абелева, то $Q_2 < Q$ и потому ввиду (30) и (45) $F \not\subset Q_2$, а тогда в силу (45) $Q_2 \cap F = F_1$ (46). В силу (30), (34) и (46) $Q = F_2 \cdot Q_2$, а тогда ввиду условия a) выполняется $Q_1 \lessdot Q$. Тогда $Q_2 \lhd Q$ и так как Q_2 P-допустима и выполняется (13), то $Q_2 \lhd G$. Поэтому для подгруппы $H_1 = Q_2 \leftthreetimes P$ (47) при любом $x \in G$ имеем: $H_1^x = Q_2 \leftthreetimes P_1^x$. Если при некотором x $H_1^x \neq H_1$, то $L = H_1^x \cap H_1 \supset Q_2$, то есть ввиду (45) L – нециклическая группа, в противоречие с SC-условием (ибо $H_1 \not\subset S$ и $H_1^x \not\subset S$). Значит, $\forall x \in G \ \ H_1 = H_1^x$, то есть $H_1 \lhd G$.

Тогда, так как $H \lhd G$ (в силу (7), (8) и (32)), то $V = H \cap H_1 \lhd G$ (48). В силу SC-условия V – циклическая группа. Но ввиду (33), (46) и (48) $V = F_1 \leftthreetimes P$, и, так как V – циклическая, то $V = F_1 \times P$. Отсюда и из (48) следует, что $P \lhd G$ вопреки (3). Значит, случай a1) невозможен.

***a*2)** $Q_1 \supset F_1$.

Тогда $Q = (F_1 \times F_2)Q_1 = F_2 Q_1$ (49), и так как $Q \neq Q_1$ (ибо F нециклическая), то из (49) и условия a) следует, что $Q_1 \lessdot Q$, и потому $Q_1 \lhd Q$ (50). Так как $Q_1 \subset C(P)$ (ввиду (32)), то из (50) и (13) следует, $Q_1 \lhd G$ (51).

Ввиду (49) и неабелевости Q $F_2 \not\subset C(Q_1)$, и потому из отмеченного выше, учитывая (13) и (49), имеем: $C(Q_1) = Q_1 \times P$. Отсюда, так как в силу (50)) $C(Q_1) \lhd G$, следует, что $P \lhd G$, в противоречие с (3).

Значит, случай a2), как и a1) невозможен, и потому невозможен и случай a).

b) $|F_2| \neq q$.

Тогда из (16) следует, F_2 нециклическая группа. Рассмотрим подгруппу H вида (33). Из (33), (7) и (32), так как $F \lhd G$ (по определению остова), следует, что $H \lhd G$. Если H абелева, то ввиду (33) $P \lhd G$, вопреки (3). значит, H неабелева и потому $H' \neq 1$.

Так как в силу (4) и (33) $H \not\subset S$, то по лемме 3 H является SC-группой с сепарирующей подгруппой $(S \cap H) \supset F$. Подгруппа F_2 из (34) P-допустима и потому $F_2 \lhd H$. Отсюда и из нецикличности F_2 в силу леммы 4, примененной к H, получаем, что ${}^{H}/_{F_2}$ – циклическая группа, а тогда $H' \leq F_2$. Значит, $1 < H' < F$. Так как $H' \lhd G$, то ввиду минимальности остова F H' – циклическая группа. Так как F_2 нециклическая, то $H' < F_2$. Тогда $V = F_1 \times H' \lhd G$, что, так как V нециклическая и $V < F$, противоречит минимальности остова F.

Значит, случай b) невозможен, и потому невозможен 1.1.2.2.2. Этим завершено рассмотрение случая 1.1.

1.2. F – неабелева q-группа.

Тогда в силу леммы 15 F – группа типа IIa этой леммы, т.е . $Z(F) = K \cong Z_{q^l}$ (52), ${}^{F}/_{K} \cong E_{q^m}$ (53) – нециклическая минимальная нормальная подгруппа группы ${}^{G}/_{K}$.

Если при $x, y \in G$ $P^x \neq P^y$, то, применяя к подгруппе $K \leftthreetimes P$ лемму 12, получаем, что $P^x \cap P^y \subset C(K)$ (54).

Далее рассмотрим отдельно возможности (8) и (9) для A.

1.2.1. $A = P \cong Z_{p^n}$.

Тогда $Q = F$ и (13) принимает вид: $G = F \leftthreetimes P$ (55). Пусть F_1 – произвольная собственная P-допустимая подгруппа группы F. Предположим, что $F_1 \not\subset K$ (56).

Тогда подгруппа $M = F_1 K \leq F$ P-допустима, а в силу (53) $M \lhd F$, и потому $M \lhd G$. Тогда ${}^{M}/_{K} \lhd {}^{G}/_{K}$ и в силу минимальности нормальной подгруппы ${}^{F}/_{K}$ группы ${}^{G}/_{K}$, (56) и определения M имеем: $M = F$, то есть $F = F_1 K$ (57). Тогда ввиду (52) $F_1 \lhd F$ и ввиду P-допустимости F_1 и (55) $F_1 \lhd G$.

В силу минимальности остова F подгруппа F_1 циклическая, а тогда из (57) и (52) следует, что F абелева, вопреки условию 1.2. Значит, (56) неверно и поэтому $F_1 \subset K$. Отсюда и из (52)–(55) следует, что G – группа типа 4 с условием 4.1 теоремы 3.

Случай 1.2.1. рассмотрен.

1.2.2. $A = Q_1 \times P$, $Q_1 \cong Z_{q^t}$, $P \cong Z_{p^n}$.

Рассмотрим группу $\bar{G} = {}^{G}/_{K}$ (58).

В силу (13), (30), (52) и (53) $\bar{G} = \bar{Q} \leftthreetimes \bar{P}$ (59), где $\bar{Q} = {}^{Q}/_{K} = \bar{F}\bar{Q}_1$ (60), $\bar{F} = {}^{F}/_{K}$ (61), $\bar{Q}_1 = {}^{Q_1 K}/_{K}$ (62), $\bar{P} = {}^{PK}/_{K} \cong P$ (63) и $\bar{F}$ – нециклическая минимальная нормальная подгруппа группы $\bar{G}$ (ввиду леммы 15).

Так как $\bar{F} \lhd \bar{Q}$, то $\bar{T} = \bar{F} \cap Z(\bar{Q}) \neq 1$, и, так как $\bar{T} \lhd \bar{G}$, то ввиду минимальности $\bar{F}$ $\bar{T} = \bar{F} \subset Z(\bar{Q})$ (64). Так как в силу (53) $\bar{F} \cong E_{q^m}$ (65), а ввиду условия 1.2.2. $\bar{Q}_1 \cong Z_{q^t}$ (66), то из (64) и (60) следует, что $\bar{Q}$ – абелева группа. Значит, $Q' \subset K$ (67). Так как $\bar{L} = \bar{Q}_1 \cap \bar{F}$ P-допустима (ибо Q_1 и F P-допустимы), то из (59) и абелевости $\bar{Q}$ вытекает, что $\bar{L} \lhd \bar{G}$, и потому ввиду минимальности $\bar{F}$ и $\bar{F} \not\subset \bar{Q}_1$ (68) (ибо $\bar{F}$ нециклическая) $\bar{L} = 1$, то есть ввиду (60) $\bar{Q} = \bar{F} \times \bar{Q}_1$ (69).

Так как $K < S$, то в силу леммы 3 $\bar{G}$ является SC-группой. Ввиду условия 1.2.2. $\bar{Q}_1 \subset C(\bar{P})$, и потому из (59) и (68) получаем: $\bar{G} = (\bar{F} \leftthreetimes \bar{P}) \times \bar{Q}_1$ (70).

Из (61), (62) и (69) следует, что $(F \cap Q_1 K) = K$, и потому $F_1 = F \cap Q_1 = K \cap Q_1$ (71).

Рассмотрим $J = KQ_1$ (72). В силу (68) $F \not\subset J$, а ввиду (11) $J \not\subset F$, и потому ввиду SC-условия $\big((F \leftthreetimes P) \cap (J \leftthreetimes P)\big) \supset K \leftthreetimes P$ – циклическая группа, и потому $K \subset C(P)$ (73).

Из (62) и (72) следует, что $\bar{Q}_1 = {}^{J}/_{K}$, и так как ввиду(70) $\bar{Q}_1 \lhd \bar{G}$, то $J \lhd G$ (74).

Рассмотрим $D = J \leftthreetimes P$. Так как в силу условия 1.2.2. $Q_1 \subset C(P)$, то из (73) и (72) следует, что $D = J \times P$ (75). Если $D \lhd G$, то, так как в силу (72) $p \nmid |J|$, $P \lhd G$, в противоречие с (3). Значит, $\exists\, x \in G$, что $D^x \neq D$. Ввиду (75) и (4) $D \not\subset S$ и $D^x \not\subset S$ и потому в силу SC-условия и (74) $(D \cap D^x) \supset J$ – циклическая группа, а тогда так как J – q-группа, из (72) и (11) следует, что $Q_1 > K$ и ввиду (62) $\bar{Q}_1 = {}^{Q_1}/_{K}$ и так как $\bar{Q}_1 \lhd \bar{G}$ (ввиду (70)), то имеем: $K < Q_1 \lhd G$ (76). Тогда $C(Q_1) \lhd G$. Так как Q_1 – циклическая группа, то $Aut\, Q_1$ – абелева группа, и потому ${}^{G}/_{C(Q_1)}$ абелева. Тогда $G' \subset C(Q_1)$, и, так как в силу (7) – (9) и определения остова ${}^{G}/_{F}$ абелева, то $G' \subset F$, и потому $G' \subset F_0 = F \cap C(Q_1)$ (77). В силу (76) и (52) $K \leq F_0$, а в силу (77) $F_0 \lhd G$.

Тогда ${}^{F_0}/_{K} \lhd {}^{G}/_{K}$, и ввиду минимальности ${}^{F}/_{K}$ либо $F_0 = K$ (78), либо $F_0 = F$, т. е. $F \subset C(Q_1)$, а тогда из (7) и 1.2.2. следует, что $Q_1 \subset Z$ (79). В случае (78) ввиду (77) $\bar{G}$ – абелева группа и из-за минимальности $\bar{F}$ имеем: $|\bar{F}| = q$, в противоречие с нецикличностью $\bar{F}$. Значит, выполняется (79).

Пусть в F существует собственная P-допустимая подгруппа F_2, такая что $F_2 \not\subset K$ (80).

Тогда $W = F_2 K$ (81) P-допустима и ввиду (67) $W \lhd Q$, и потому в силу (13) $W \lhd G$. Значит, $\bar{W} = {}^{W}/_{K} \lhd \bar{G}$.

Так как ввиду (80) и (81) $\bar{W} \neq \bar{1}$, то из минимальности $\bar{F}$ следует, что $\bar{W} = \bar{F}$, т. е. $F = F_2 K$ (82). Если F_2 абелева, то в силу (52) F абелева, вопреки условию 1.2. Значит, F_2 неабелева. Тогда из (82) и (52) следует, что $F_2 \lhd F$. Но F_2 P-допустима, и потому из доказанного и (13) следует, что $F_2 \lhd G$. Так как F_2 нециклическая, то мы получили противоречие с минимальностью остова F. Значит, такой F_2 в F нет, т. е. все истинные P-допустимые подгруппы группы F содержатся в K.

Из доказанного, учитывая (76) и (79), следует, что в случае 1.2.2. G является группой типа 4 с условием 4.2.

Рассмотрение случая 1 закончено.

2. F – непримарная группа.

Тогда в силу леммы 15 $F = B \leftthreetimes R$ (83), где $B \cong Z_k$ (84), $\pi(R) = \{r\}$ (85), $R \ntriangleleft F$ (86), $(2r, k) = 1$ (87) и в (7) можно считать, что $A < N(R)$ (88). Так как в силу (12) $|\pi(G)| = 2$, то в силу условия 2, (85) и (84) $\pi(F) = \{t, r\}$ (89), т. е. ввиду (87)$k = t^m$ (90) и B – примарная группа. Если $B \subset A$, то из (83) и (88) следует, что $F = B \times R$, вопреки (86). Значит, $B \not\subset A$ (91).

Для A есть две возможности – (8) или (9). Рассмотрим каждую из них.

2.1. $A \cong Z_{p^n}$.

В силу (12) либо $t = q$ (92), либо $t = p$ (93). Рассмотрим эти случаи.

2.1.1. $B \cong Z_{q^m}$.

Тогда в силу (90) и (87) $q \neq 2$ (94) и ввиду (89) $r = p$ (95). Отсюда и из (7), (88) и условия 2.1. следует, что $P = RA$ (96) – силовская p-подгруппа группы G и $G = B \leftthreetimes P$ (97), причем $B \not\subset Z$ (98), ибо G ненильпотентна по условию теоремы.

В силу (96) для $V = C(B)$ (99) выполняется: $V = B \times P_1$ (100), где $P_1 = C_P(B)$ (101). Так как $V \lhd G$, то $P_1 \lhd G$, и потому $P_1 \subset (P \cap P^x)$ $\forall\, x \in G$. Тогда из (5) следует, что $P_1 \cong Z_{p^s}$ (102). В силу 2.1.1. и (94) $Aut\, B$ – циклическая группа, а тогда из (99) следует, что ${}^{G}/_{V}$ – циклическая, и потому ввиду (97) и (100) ${}^{P}/_{P_1} \cong Z_{p^l}$ (103).

Так как P в силу 2.1.1. и условия теоремы 3 нециклическая, то $P_1 \neq 1$ (104).

В силу леммы 8 P – одна из следующих групп:

I. M_{p^n} ($p^n \neq 8$);

II. группа типа $p \times p^{n-1}$;

III. Q_8.

Дальнейшее рассмотрение разобьем на два случая: P – типа I или II и P – типа III.

2.1.1.1. P – группа типа I или II.

В такой группе P существует единственная нециклическая максимальная подгруппа M типа $p^{n-2} \times p$. В силу леммы 8 $M < S$, и потому, так как ввиду (6) и (83) $B < S$, то из (97) и (4) получаем: $S = B \leftthreetimes M$ (105). Поэтому для любой $P_2 \lessdot P$, такой, что P_2 – циклическая группа, выполняется $P_2 \not\subset S$ (106) (ибо иначе ввиду (105) $P \subset S$, вопреки (4)). Пусть $P_3 \lessdot P$, P_3 – циклическая и $P_3 \neq P_2$ (такая в P найдется). По доказанному выше $P_3 \not\subset S$ (107). Рассмотрим $T_i = B \leftthreetimes P_i$ $(i = 2{,}3)$. В силу (106) и (107) $T_i \not\subset S$, и потому ввиду SC-условия $T_2 \cap T_3 \supset B \leftthreetimes (P_2 \cap P_3)$ – циклическая группа, а тогда для $P_0 = P_2 \cap P_3$ (108) выполняется $P_0 \subset C(B)$ (109). Но в P с условием 2.1.1.1. $P_0 = \Phi(P)$ и ${}^{P}\!/_{\Phi(P)} \cong E_{p^2}$ и потому ${}^{P}\!/_{P_0} \cong E_{p^2}$ (110). В силу (109) и (101) $P_0 \leq P_1$.Но тогда из (110) и (103) следует, что $\left|{}^{P}\!/_{P_1}\right| = p$, то есть $P_1 \lessdot P$. Так как в силу (102) P_1 – циклическая группа, то из определения групп типа I и II следует, что $P = P_1 \leftthreetimes P_4$ (111), где $P_1 \cong Z_{p^{n-1}}$ (112), а $|P_4| = p$ (113). Из (97), (111), (101) и (100) получим: $G = (B \times P_1) \leftthreetimes P_4$ (114). Если $P_1 \subset Z$, то P – группа типа $p^{n-1} \times p$ и $G = (B \leftthreetimes P_4) \times P_1$ (115).

Пусть $|B| \neq q$ (116). Тогда $\exists\, B_0 < B$ (117), такая, что $|B_0| = q$. Для циклической $P_2 \lessdot P$ выполняется (106), и потому из (4) и SC-условия следует, что $(B \leftthreetimes P_2) \cap (B_0 \leftthreetimes P) \supset B_0 \leftthreetimes P_2$ – циклическая группа, то есть $B_0 \subset C(P_2)$, а тогда отсюда и из 2.1.1., (117) и $B \lhd G$ в силу следствия 1 леммы 6 получаем, что $P_2 \subset C(B)$. Отсюда и из (101) так как $P = P_1 P_2$, получаем, что $P \subset C(B)$, и ввиду (97) G нильпотентна, вопреки условию теоремы 3. Значит, (116) неверно с учётом (84) и (87) и $|B| = q \neq 2$. Учитывая это, условие 2.1.1.1, (94), (112) – (114) получаем: при $P_1 \not\subset Z$ G – группа типа 5 с условием 5.1, а при $P_1 \subset Z$ выполняются (115) и G – группа типа 5 с условием 5.2 (с точностью до обозначений).

Случай 2.1.1.1. рассмотрен.

2.1.1.2. $P \cong Q_8$.

В такой группе всего три максимальные подгруппы. Так как выполняется (4), то две из них не содержатся в S – пусть это будут P_i, $i = 1{,}2$. Как и выше, в конце пункта 2.1.1.1. (рассматривая подгруппы $B \leftthreetimes P_i$ и $B_0 \leftthreetimes P$), показывается, что $|B| = q$. Такая группа G является в силу теоремы 2 из [3] CIM-группой и потому в силу теоремы 3 из [1] G является C_N-группой, то есть одной из групп типа 1 теоремы 3.

Случай 2.1.1. рассмотрен.

2.1.2. $B \cong Z_{p^{n_1}}$.

Тогда в силу (7) и (83) $G = (B \leftthreetimes R) \cdot A$ (117) и $P = BA$ (118) – силовская p-подгруппа группы G.

Из леммы 15 следует, что $p \neq 2$ (119), R – q-группа и $\exists\, R_0 = (R \cap K) \cong Z_{q^t}$ (120) такая, что $R_0 < R$, $R_0 \lhd G$ (121) и $\left|{}^{R}\!/_{R_0}\right| = q$ (122).

Пусть $R_0 = 1$ (123). Тогда в силу (122) $|R| = q$. Отсюда и из (83), так как подгруппа F нециклическая, следует, что $C(B) \cap F = B$ (124). Но ${}^{G}\!/_{C(B)}$ абелева ввиду 2.1.2., а ${}^{G}\!/_{F}$ абелева ввиду (7) и 2.1., и потому отсюда и из (124) следует, что $G' \subset B$. Но тогда ввиду (118) $P \lhd G$, вопреки (3). Значит, (123) неверно и $R_0 \neq 1$ (125). В силу (88) и (121) в G есть подгруппы $U = B(R_0 \leftthreetimes A)$ и $T = R \leftthreetimes A$ (126). В силу (91) $U \not\supseteq T$. Так как ввиду (4) и 2.1. $A \not\subset S$, то $U \not\subset S$ и $T \not\subset S$, и из SC-условия следует, что $U \cap T \supset (R_0 \leftthreetimes A)$ – циклическая группа, т. е. $R_0 \subset C(A)$ (127). Если R – циклическая группа, то ввиду следствия 1 леммы 6 $R \subset C(A)$. Отсюда и из (117), (118) следует, что $P \lhd G$ (128) вопреки (3). Значит, подгруппа R – нециклическая.

Из (121) следует, что $R_0 \subset C(B)$, а тогда из (118) и (127) получаем, что $R_0 \subset C(P)$ (129).

Пусть R неабелева. Тогда из (120) и (122) следует, что $C_R(R_0) = R_0$ и в силу (129), (127), (117) и (118) $C(R_0) = R_0 \times P$, а отсюда и из (121) следует (128), в противоречие с (3).

Значит, R – абелева группа. Так как она нециклическая, то из (120) и (122) следует, что R – группа типа $q^{m-1} \times q$, и потому существует $R_1 \leq R$, такая, что $R_1 \cong E_{q^2}$. Если $R_1 \neq R$, то в силу (91) и SC-условия

$B(R_1 \leftthreetimes A) \cap T \supset R_1 \leftthreetimes A$ – циклическая группа в противоречие с нецикличностью R_1.

Значит, $R = R_1 \cong E_{q^2}$. Теперь из (121), (122) и теоремы Машке (для T) имеем: $R = R_0 \times R_2$ (130), где ввиду (122) $|R_2| = q$ и R_2 A-допустима. Тогда из SC-условия имеем: $B(R_2 \leftthreetimes A) \cap T = R_2 A$ – циклическая группа, а тогда $R_2 \subset C(A)$. Отсюда и из (127), (130) и (126) получаем: $T = R \times A$. Отсюда и из (118), (117) следует, что $P \lhd G$, вопреки (3). Поэтому (125) невозможно.

Значит, случай 2.1.2. невозможен. Рассмотрение случая 2.1. закончено.

2.2. $A = P_1 \times Q_1$ и выполняются (10) и (11).

Тогда в силу (83) и (7) $G = (B \leftthreetimes R)(P_1 \times Q_1)$ (131), где $P_1 \not\subset S$ (132).

Пусть B является p-группой. Тогда $P = BP_1$ (133) – силовская p-подгруппа группы G, а R – q-группа. В силу SC-условия и (132) $(PR \cap RA) \supset R \leftthreetimes P_1$ – циклическая группа, и потому $R \subset C(P_1)$. Поэтому ввиду (133) $P \lhd W = PR$, и так как $W \lhd G$, то $P \lhd G$, вопреки (3). Значит, B не является p-группой.

Как отмечено в начале пункта 2, B – примарная группа, и потому B является q-группой. Тогда R – p-группа и в силу (88) $P = RP_1$ (134) – силовская p-подгруппа группы G. В силу (91) $BP \not\geq PQ_1$, и в силу SC-условия $(BP \cap PQ_1) \supset P$ – циклическая группа, а тогда из (134) следует, что $R \subset P_1$ (135), то есть $P = P_1$. Теперь отсюда, из (134) и (131) следует: $G = (BQ_1)P$ и $Q = BQ_1 \lhd G$ (136) (ибо $G/_B$ абелева), то есть $G = Q \leftthreetimes P$ (137). Но ввиду (2) $Q \subset S$, а из (137) и условия теоремы 3 следует, что Q нециклическая. Поэтому в силу (136) в Q можно выбрать остов F_1 группы G, являющийся примарной группой. Такие SC-группы, удовлетворяющие условиям теоремы 3, описаны выше в пункте 1 настоящего доказательства (в том числе и вида (137)).

Рассмотрение пункта 2 закончено. Необходимость доказана.

Достаточность (здесь мы используем новую нумерацию).

Пусть G – группа одного из типов теоремы 3. Все они разрешимы и ненильпотентны. Во всякой из этих групп найдется $S \lhd G$ (1), такая, что $|G/_S| = p$ (2) – вид S для каждого типа свой. Ниже мы покажем, что G является SC-группой с этой сепарирующей подгруппой S и, так как ее силовская p-подгруппа P во всех типах неинвариантна в G, то G будет SC-группой типа $2a$.

В силу (2) и (1) $\forall x \in G$ $P^x \not\subset S$ (3), а $P^x \cap S = P_1^x < P^x$ (4).

Пусть $1 < H_i < G$ (5), $H_i \not\subset S$ (6), $i = 1, 2$, и $H_1 \not\geq H_2$ (7). Для доказательства того, что G – SC-группа, надо проверить, что $T = H_1 \cap H_2$ (8) циклическая, или показать, что таких пар H_1, H_2 нет в группе G.

Очевидно, H_i можно считать нециклическими. Иногда для изучения вида H_i мы будем рассматривать произвольную нециклическую подгруппу H, для которой $1 < H < G$ (9) и $H \not\subset S$ (10).

Перейдем к рассмотрению каждого из типов 1–5 теоремы 3.

1. G – группа типа 1.

Так как всякая C_N-группа является SC-группой и G удовлетворяет условиям теоремы 3, то G – SC-группа типа $2a$. Ее разрешимость следует из бипримарности в силу теоремы Бернсайда.

2. G – группа типа 2 – 4.

Тогда $P \cong Z_{p^n}$ (11) и для H с условиями (9) и (10) в силу (4) и единственности максимальной подгруппы группы P выполняется $H \supset P^x$ (12) для некоторого $x \in G$.

Дальнейшее рассмотрение этих типов продолжим отдельно.

2.1. G – группа типа 2.

Тогда $G = Q \leftthreetimes P = Q \leftthreetimes P^x$ (13) $\forall x \in G$. Из (12) и (13) следует $H = Q_0 \leftthreetimes P^x$ (14), где $Q_0 = H \cap Q$ (15) P^x-допустима и $1 < Q_0 < Q$ (16) – ибо выполняется (9). Если G – группа типа 2.1., то таких H (нециклических) у нее нет, и потому G – SC-группа.

Пусть G – группа типа 2.2. Тогда из (16) и определения группы типа 2.2. следует, что $|Q_0| = q$. Тогда для любых двух H_i вида (14) с условиями (5) и (6) имеем: $H_i = Q_i \leftthreetimes P^{x_i}$ (17), где $|Q_i| = q$ (18), $i = 1, 2$.

Если $Q_1 \neq Q_2$, то T – p-группа и в силу (11) T циклическая. Пусть $Q_1 = Q_2$. Тогда в силу леммы 11 $T = Q_1 \leftthreetimes (P^{x_1} \cap P^{x_2})$, и, так как по определению группы типа 2.2. $P^{x_1} \cap P^{x_2} = Z$ и выполняются (11) и (18), то T – циклическая группа. Значит, G – SC-группа.

2.2. G – группа типа 3.

Положим $S = (Q_2 \leftthreetimes P_1) \times Q_1$.

Рассмотрим $L = Q_2 \leftthreetimes P = Q_2 \leftthreetimes P^x$ (19) (ибо $L \lhd G$). Так как H_i нециклические, то из (19) и определений групп типа 3.1. и 3.2. следует, что $H_i \supset L$ (20), $i = 1, 2$ (ибо в Q_2 нет собственных P-допустимых и P^x-допустимых подгрупп).

Но $G/_L \cong Z_{q^t}$, и потому из (20) следует, что $H_1 \gtrless H_2$, вопреки их выбору (см.(7)). Значит, G – SC-группа.

2.3. G – группа типа 4.

Положим $S = FA_1$, где $\left|A/_{A_1}\right| = p$.

Для H с условиями (9) и (10) выполняется (12). Так как $F \lhd G$ (21), то из определения группы типа 4 следует, что все истинные P^x-допустимые подгруппы группы F содержатся в $K = Z(F)$. Так как K циклическая, то все ее подгруппы вместе с F – это и есть все P^x-допустимые подгруппы группы F. Так как H нециклическая, а A циклическая, то $B = H \cap F \neq 1$ и $H \geq T_0 = B \leftthreetimes P^x$.

Пусть G – группа типа 4.1. Тогда $B < F$ и $H = T_0$. Поэтому если для H_i $(i = 1, 2)$ выполняются (5)–(7), то из отмеченного выше следует, что $H_i = K_i \leftthreetimes P^{x_i}$, где $K_1 \leq K_2 \leq K$ (ибо K – примарная циклическая). Тогда в силу леммы 11 $H_1 \cap H_2 = K_1(P^{y_1} \cap P^{y_2})$, а это – циклическая группа в силу одного из свойств группы типа 4.1. Значит, G является SC-группой.

Пусть G – группа типа 4.2. Покажем, что $H \supset F$ (22). Предположим, что $H \not\supset F$ (23). Тогда $B \neq F$ (24) и так как $G/_F$ циклическая, то $HF/_F \cong H/_{H \cap F} = H/_B$ – циклическая группа. Но так как B в силу (21) P^x-допустима, то из сказанного выше следует, что $B \leq K$ и потому в силу свойств группы типа 4.2. $B < Q_1 \leq Z$ (25), а тогда из сказанного о $H/_B$ следует, что H абелева. Отсюда и из (25) получаем, что $V = HQ_1$ (26) абелева. В силу определения группы типа 4.2. $G = FA^x$ (27), где, учитывая (25), $A^x = Q_1 \times P^x$ (28). Так как ввиду (26), (12) и (28) $V > A^x$, то из (27) следует: $V = UA^x$ (29), где $U = F \cap V$ (30). Из абелевости V, (21), (28) и (30) следует, что U – абелева P^x-допустимая подгруппа группы F. Так как F неабелева, то из определения группы типа 4.2. следует, что $U \leq K$. Отсюда, из (29), (28) и (25) имеем: $V < KQ_1P^x = A^x$ – циклическая группа, а тогда ввиду (26) и H циклическая, вопреки её выбору. Значит, (23) неверно и выполняется (22).

Тогда из (22) и (12) следует, что $H \supset D = F \leftthreetimes P^x$ (31). Так как ввиду (27), (28) и (31) $G = DQ_1$, то в силу (25) $D \lhd G$ и $G/_D$ – циклическая q-группа. Но тогда любые две нециклические подгруппы H_1 и H_2 с условиями (5) и (6) инцидентны (ибо они по доказанному выше содержат D) и потому G является SC-группой.

2.4. G – группа типа 5.

Тогда $G = (Q \times P_1) \leftthreetimes P_2$ (32), где либо $P = P_1 \leftthreetimes P_2 \cong M_{p^n}$ (33), $p^n \neq 8$, либо $P = P_1 \times P_2$ (34) – группа типа $p^{n-1} \times p$. В обоих случаях $\Phi(P) = P_3 \subset Z(P)$ (35), где $P_3 < P_1$, $G = Q \leftthreetimes P$ (36) и $|Q| = q$ (37). Значит, $\Phi(P) < P_1$ (38) и ввиду (32) и (35) $\Phi(P) \subset Z$ (39).

Возьмем $S = (Q \leftthreetimes P_2) \times P_3$ (40). Тогда $P \cap S = (P_2 \times P_3)$ – единственная нециклическая максимальная подгруппа группы P, и в P вне $(P \cap S)$ содержатся только подгруппы P и циклические $M_i \cong Z_{p^{n-1}} < P$ (41). Поэтому для непримарных H_i и H_j, учитывая (36), (37) и (41), имеем: либо $H_i = Q \leftthreetimes M_i^{x_i}$ (42), $i = 1, 2$, либо $H_i = Q \leftthreetimes P^{x_j}$ (43), $j = 3, 4$.

Для подгрупп H_1 и H_2 вида (42) при $H_1 \neq H_2$ в силу леммы 11 $H_1 \cap H_2 = Q(M_1^{y_1} \cap M_2^{y_2})$ (44).

Для групп P вида (33) и (34) $\Phi(P) \cong Z_{p^{n-2}}$ (45), $\Phi(P) < M_i$ (46), и потому ввиду (39) $\Phi(P) < M_i^{y_i}$, а тогда $M_1^{y_1} \cap M_2^{y_2} = \Phi(P)$. Значит, (44) принимает вид: $H_1 \cap H_2 = Q \cdot \Phi(P)$ и ввиду (45) и (39) $(H_1 \cap H_2)$ – циклическая группа.

Пусть H_1 – вида (42), H_3 – вида (43) и $H_1 \not\gtrless H_3$ (47). Тогда $L = H_1 \cap H_3 = Q \leftthreetimes P_0$ (48), где P_0 – p-группа. Так как $\left|M_1^{x_1}\right| = p^{n-1}$ (ввиду (41)) и $H_1 \not\subset H_3$, то $|P_0| \leq p^{n-2}$ (49). Ввиду (39) и (46) $\Phi(P) \leq (M_1^{x_1} \cap P^{x_3}) < L$, а тогда в силу (39) и (48) $\Phi(P) \leq P_0$ (50). Но так как ввиду (46) и (41) $|\Phi(P)| = p^{n-2}$, то отсюда и из (49) и (50) следует, что $P_0 = \Phi(P)$. Теперь отсюда и из (45), (48) и (39) следует, что L – циклическая группа.

В силу (32) $P_1 \lhd G$, а тогда $P_1 \subset P^x$ (51) $\forall\, x \in G$. Так как $P_1 < P$ (по определению группы типа 5), то в силу (51) при $P^x \neq P^y$ $V = P^x \cap P^y = P_1 \cong Z_{p^{n-1}}$ (52).

Ввиду сказанного в начале пункта 2.4. все примарные нециклические подгруппы группы G, не принадлежащие S – это группы P^x, и ввиду (52) для любой пары таких различных подгрупп P^x и P^y SC-условие выполняется.

Рассмотрим $C = H_3 \cap H_4$ (53), где H_3 и H_4 – вида (43) и $H_3 \neq H_4$ (54).

Тогда, так как в силу (43) $|H_3| = |H_4|$, то из (54) следует, что $H_3 \not\gtrless H_4$.

В силу леммы 11 $W = H_3 \cap H_4 = Q \rtimes (P^{y_3} \cap P^{y_4})$, а ввиду (32) и (52) $W = Q \rtimes P_1 = Q \times P_1$ – циклическая группа.

Пусть $H \ngeq P^y$ и H – вида (42) или (43). Рассмотрим $H \cap P^y = P_4$. Очевидно, что P_4 – p-группа, и потому $P_4 \leq P_5$ (55), где P_5 – силовская p-подгруппа группы H. Тогда $P_4 \subset (P_5 \cap P^y)$ (56). Если H – вида (42), то в силу (41) P_5 – циклическая группа, а тогда ввиду (55) P_4 циклическая. Если же H – вида (43), то $P_5 = P^{y_j}$ и ввиду (56) и (52) $P_4 \subset (P^{y_j} \cap P^y) = P_1$ – циклическая группа. Значит, для таких пар H, P^y SC-условие выполняется.

Мы рассмотрели все возможные случаи пересечений неинцидентных нециклических подгрупп, не содержащихся в S. Все такие пересечения циклические, и потому G SC-группа. □

Следствие. В SC-группе G каждого из типов 2.1., 3 и 4.2. теоремы 3 существует такая подгруппа S, что любые две нециклические подгруппы группы G, не содержащиеся в S, инцидентны.

Справедливость этого утверждения установлена при доказательстве достаточности для этих типов в теореме 3.

Если из типов C_N-групп, полученных в теореме 1 из [1] и SC-групп, полученных в теоремах 1 и 2 из [2], выделить бипримарные группы, то вместе с типами 2–5 теоремы 3 получаем следующее описание конечных бипримарных SC-групп.

Теорема 4. Конечные бипримарные SC-группы – это следующие группы, и только они (некоторые типы могут пересекаться):

1. Конечные бипримарные C_N-группы: группы типов 1 – 3 теоремы 1 из [3], типов I – IV и VII теоремы 2 из [3], типа 2 теоремы 4 из [1];
2. бипримарные группы теоремы 1 из [2];
3. группы типа 3 теоремы 2 из [2];
4. группы типов 2 – 5 теоремы 3.

Заключение

На базе результатов этой работы и работы [2] будет получено описание конечных разрешимых SC-групп.

Список литературы

1. *Половицкий Я.Д., Коневских Т.М.* О группах с циклическими пересечениями неинцидентных (максимальных) подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3(46). С. 22–31.
2. *Половицкий Я.Д., Коневских Т.М.* О конечных группах с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой подгруппе // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3(50). С. 5–16.
3. *Половицкий Я.Д.* Конечные разрешимые группы с циклическими пересечениями максимальных подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 2. С. 22–35.
4. *Белоногов В.А.* Задачник по теории групп. М.: Наука, 2000. 240 с.

Finite biprimary groups with cyclic intersections of non-incident subgroups that are not contained in some subgroup

Ya. D. Polovitsky, T. M. Konevskikh
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
alg@psu.ru; 8(342) 239−63−21

We described a finite biprimary groups with the condition indicated in the title.

Keywords: *biprimary group; cyclic group; incident subgroup*.