УДК 512

Лексикографический метод расположения членов многочлена и его применение для решения задач по теме "симметрические многочлены"

А. А. Косарева, О. В. Бобылева
Хакасский государственный университет им. Н. Ф. Катанова
Россия, Республика Хакасия, 655017, г. Абакан, проспект Ленина, 90
alena.cosarewa.15@yandex.ru; 89509609587

Рассматривается лексикографический метод определенного расположения членов многочлена от нескольких переменных.

Ключевые слова: *лексикографический метод; симметрические многочлены; решение задач.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-4-11-13

Лексикологический метод расположения членов многочлена является одним из возможных способов определенного расположения членов многочлена от нескольких переменных. Расположение членов многочлена от нескольких переменных по этому методу не является обязательным, но помогает в решении ряда алгебраических задач, в частности при работе с симметрическими многочленами.

Симметрические многочлены, в свою очередь, помогают в решении целого ряда задач, таких как решение систем уравнений, доказательство тождеств, избавление от иррациональности в знаменателе. Также был рассмотрен новый метод вычисления матричной экспоненты, основанный на использовании симметрических многочленов n-го порядка [1].

Лексикографический способ подсказан обычным приемом расположения слов в словаре: считая буквы упорядоченными так, как это принято в алфавите, определяется взаимное положение двух данных слов в словаре по их первым буквам, если же эти буквы совпадают, то по вторым буквам и т.д.

Пусть дан многочлен $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ из кольца $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и в нем два различных члена:

$$X_1^{k_1} X_2^{k_2} ... X_n^{k_n}, \qquad (1)$$

$$X_1^{l_1} X_2^{l_2} ... X_n^{l_n}, \qquad (2)$$

коэффициенты которых являются некоторыми, отличными от ноля, элементами из кольца P.

Так как члены (1) и (2) различны, то хотя бы одна из разностей показателей при неизвестных $k_i - l_i$, i = 1, 2, …, n, отлична от нуля.

Член (1) будет считаться выше члена (2), если первая из этих разностей, отличная от нуля, положительна, т.е. если существует такое i, $1 \le i \le n$, что

$$k_1 = l_1, k_2 = l_2, ..., k_{i-1} = l_{i-1},$$

но $k_i > l_i$.

Иными словами, член (1) будет выше члена (2), если показатель при x_1 в (1) больше, чем в (2), или если эти показатели равны, но показатель при x_2 в (1) больше, чем в (2), и т.д. Легко видеть, что из того, что член (1) выше члена (2), не следует, что степень первого по совокупности неизвестных больше степени второго: из членов $x_1^3x_2x_3$ и $x_1x_2^5x_3^2$ первый выше, хотя имеет меньшую степень [2].

Понятие "быть выше" является транзитивным, т.е. если первый выше второго, а второй выше третьего, то первый выше третьего.

Таким образом, ставя раньше тот из двух членов, который выше, получаем вполне определенное упорядочение членов многочлена $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, которое и называется *лексикографическим* [2].

Рассмотрим далее примеры лексикографического расположения членов многочлена от нескольких переменных.

Пример 1. Рассмотрим метод приведения к лексикографическому расположению членов многочлена на конкретном примере.

Пусть дан многочлен

$$ab^2c + c^3 + a^5b^2 + a^2bc^4 + a^2b^3c + bc + ac^2,$$

который необходимо привести к лексикографическому расположению членов.

Согласно лексикографическому методу, определим взаимное положение членов многочлена, исходя из очередности букв в алфавите.

Так, a имеет наибольшую степень в члене a^5b^2. В членах a^2bc^4 и a^2b^3c переменная a имеет одинаковую степень, значит необходимо сравнивать степени b. Исходя из этого, член a^2b^3c будет стоять на втором месте в лексикографическом расположении членов многочлена от нескольких переменных, а член a^2bc^4, соответственно, на третьем.

Далее необходимо рассматривать члены, в которых a имеет первую степень, как наибольшую из оставшихся степеней a: ab^2с и ac^2. В первом из данных членов степень b больше, следовательно, член ab^2с будет стоять левее ac^2

Оставшиеся два члена многочлена имеют степень a равную нулю, однако член bc имеет более высокую степень b.

Проведя все необходимые рассуждения, получаем следующее лексикографическое расположение членов многочлена от нескольких переменных:

$$a^5b^2 + a^2b^3c + a^2bc^4 + ab^2c + ac^2 + bc + c^3.$$

Пример 2. Рассмотрим еще один многочлен, члены которого необходимо расположить в лексикографическом порядке:

$$x_1x_3 + x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_3^3 + 5 + x_2x_3.$$

В данном многочлене наибольшую степень x_1 имеет в членах $x_1^2x_2x_3$ и $x_1^2x_2x_3^3$, так как степени x_1 и x_2 совпадают в обоих членах многочлена, необходимо обратить внимание на x_3, которое в $x_1^2x_2x_3^3$ имеет большую степень. Следовательно, в лексикографическом расположении членов многочлена от нескольких переменных, многочлен $x_1^2x_2x_3^3$ будет стоять на первом месте, а $x_1^2x_2x_3$ – на втором.

Из оставшихся членов многочлена x_1 присутствует только в члене x_1x_3, следовательно в лексикографическом расположении членов многочлена от нескольких переменных он расположится на третьем месте.

Так как члены, в составе которых степень x_1 отлична от нуля, закончились, в дальнейших размышлениях следует ориентироваться на x_2, которое, в свою очередь, присутствует только в члене x_2x_3. В оставшемся члене степени x_1, x_2, x_3 равны нулю, следовательно, этот член займет последнее место в расположении членов многочлена.

Таким образом, лексикографическое расположение данного многочлена будет иметь вид:

$$x_1^2x_2x_3^3 + x_1^2x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5.$$

Член, который при лексикографической записи многочлена стоит на первом месте, называется *высшим членом многочлена.*

В рассмотренных примерах высшими членами многочленов были соответственно a^5b^2 и $x_1^2x_2x_3^3$. Напомним, что многочлен $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется симметрическим, если он не меняется при перестановке любых двух переменных [3].

Из доказательства основной теоремы о симметрических многочленах, известно, что члены искомого многочлена φ, определяются через высшие члены симметрических многочленов $f_1, f_2 ...,$ причем эти высшие члены ниже высшего члена данного многочлена f [2].

Рассмотрим задание, для решения которого необходимо знание лексикографического положения членов многочлена:

Пример 3. Выразить через элементарные симметрические функции многочлен

$$f = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.$$

Решение. Высший член многочлена имеет показатели степеней переменных (2, 1, 0). Условие невозрастания показателей степеней переменных в слагаемых, высота которых ниже, возможно лишь при показателях (1, 1, 1).

Тогда показатели степеней $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, как следует из доказательства теоремы, (2-1, 1-0, 0) и (1-1, 1-1, 1), т.е.

$$f = A\sigma_1^1 \sigma_2^1 \sigma_3^0 + B\sigma_1^0 \sigma_2^0 \sigma_3^1 = A\sigma_1 \sigma_2 + B\sigma_3 .$$

Для нахождения *A* и *B* составим систему:

$$\begin{cases} 2A = 2, \text{ при } x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0 \\ 9A + B = 6, \text{ при } x_1 = x_2 = x_3 = 1, \end{cases}$$

$$A = 1, B = -3.$$

Ответ: $f = \sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3.$

Таким образом, лексикографический метод определенного расположения членов многочлена от нескольких переменных можно использовать для выражения симметрических многочленов через элементарные симметрические многочлены.

Список литературы

1. *Беляев Ю.Н.* Симметрические многочлены в расчетах матричной экспоненты // Вестник Сыктывкарского университета: сб. статей. Сыктывкар. 2012. Вып. 16.
2. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 2016. 432 с.
3. *Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я.* Симметрия в алгебре. М., 2002. 240 с.

Lexicographic method of arrangement of polynomial terms and its application for solving problems on the topic "symmetric polynomials"

A. A. Kosareva, O. V. Bobyleva
Khakass State University named after N. F. Katanov;
90, Lenin Avenue, Abakan, Republic of Khakassia, 655017, Russia
alena.cosarewa.15@yandex.ru; 89509609587

The article considers a lexicographic method for determining the location of polynomial terms in several variables.

Keywords*:* *lexicographic method; symmetric polynomials; problem solving.*