ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Математика. Механика. Информатика Вып. 4(51)

МАТЕМАТИКА

УДК 513

Геометрия, получающаяся "склеиванием" трехмерного евклидова пространства с помощью группы $\{T_{\bar a}\}\otimes\{T_{\bar b}\}$

З. И. Андреева, Г. Г. Шеремет
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
sheremet@pspu.ru; 8-902-831-71-75

Определено пространство $E_3{}^2$, получающееся "склеиванием" евклидова трехмерного пространства при помощи равномерно-разрывной подгруппы группы движений евклидова пространства, которая является прямым произведением двух циклических групп параллельных переносов. Определены основные объекты нового пространства и изучены их аффинные и некоторые метрические свойства.

Ключевые слова: *евклидово пространство; расстояние; движение; группа; структура группы; равномерно-разрывная группа; склеивание; плоскость; прямая; точка; расстояние; угол; перпендикулярность.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-4-5-10

Введение

В статье [1] подробно описан алгоритм определения и изучения геометрических пространств, получающихся в результате "склеивания" трехмерного евклидова пространства E_3 при помощи равномерно-разрывных подгрупп группы движений этого пространства. Полученные пространства также называют *развертывающимися на пространство E_3*.

Определение 1 **[1].** Подгруппа G евклидова пространства называется ***равномерно-разрывной***, если существует такое положительное действительное число d, что для любого $g \in G$ и любой точки $X \in E_3$ условие $|X\, g(X)| \geq d$ выполняется тогда и только тогда, когда $X \neq g(X)$.

В статье [2, теорема 7] показано, что существует точно девять типов равномерно-разрывных групп движений трехмерного евклидова пространства. Отсюда следует, что существует точно девять нетривиальных типов геометрических пространств, развертывающихся на трехмерное евклидово пространство. В статье [1] описано цилиндрическое пространство, получающееся "склеиванием" пространства E_3 при помощи циклической группы $G_1 = \{T_{\bar a}\}$, где $T_{\bar a}$ параллельный перенос пространства E_3 на вектор $\bar a$ ($\bar a \neq \bar 0$). Пусть F любая фигура в E_3.

Определение 2 **[1].** "*Склеиванием*" *орбиты* $\{G_k(F)\}$ называется результат отождествления всех элементов этой орбиты. При этом "склеиваются" орбиты всех точек фигуры F.

Результат "склеивания" орбиты $\{G_k(F)\}$ обозначим F^*, т. е. $F^*=\{G_k(F)\}$. Результаты "склеивания" орбит точек, прямых и плоскостей пространства E_3 будем называть *новыми точками, прямыми и плоскостями* соответственно.

Определение 3 **[1].** Пространством, полученным "склеиванием" пространства E_3 при помощи группы G_k, называется множество всех новых точек, прямых и плоскостей.

2. "Склеивание" пространства E_3 при помощи группы $G_2 = \{T_{\bar{a}}\} \otimes \{T_{\bar{b}}\}$

Так как все группы вида $\{T_{\bar{a}}\} \otimes \{T_{\bar{b}}\}$ с неколлинеарными векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ изоморфны, то можно считать, что $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Пусть A – произвольная точка пространства E_3. Орбитой точки A при действии группы $\boldsymbol{G_2}$ будет множество точек $A_{k,m}$ = $\{T_{k\bar{a}+m\bar{b}}(A), k \in Z, m \in Z\}$. Все точки орбиты лежат в узлах сетки, каждая ячейка которой – прямоугольник, построенный на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, как на сторонах (рис. 1). Все эти точки "склеиваются" в одну новую точку пространства E_3^2. Все ячейки сетки "склеиваются" в одну (любую из них). Например, в ячейку $AA_{10}A_{11}A_{01}$. При этом все точки отрезка AA_{10} "склеиваются" с соответствующими точками отрезка $A_{01}A_{11}$. Все точки отрезка AA_{01} "склеиваются" с соответствующими точками отрезка $A_{10}A_{11}$. Моделью результата "склеивания" ячейки $AA_{10}A_{11}A_{01}$ в пространстве E_3 будет тор.

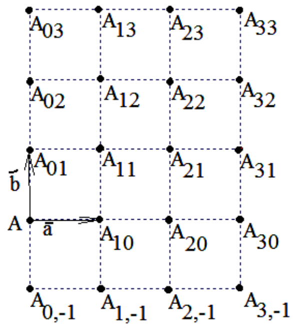

Рис. 1

Пусть $П_1$ и $П_2$ две плоскости в пространстве E_3, такие, что $П_1 \perp \bar{a}$, $П_2 \perp \bar{b}$. Орбиты этих плоскостей $П_1^*$ = $\{T_{k\bar{a}}(П_1)\}$ и $П_2^*$ = $\{T_{m\bar{b}}(П_2)\}$. Плоскости этих орбит разбивают все пространство E_3 на бесконечные четырехугольные призмы, две противоположные грани которых перпендикулярны вектору $\bar{a}$ и имеют ширину, равную $|\bar{b}|$.

Две другие грани перпендикулярны вектору $\bar{b}$ и имеют ширину, равную $|\bar{a}|$. Ребра призм перпендикулярны векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. С помощью группы $\boldsymbol{G_2}$ все призмы "склеиваются" в одну (любую из них (рис. 2).

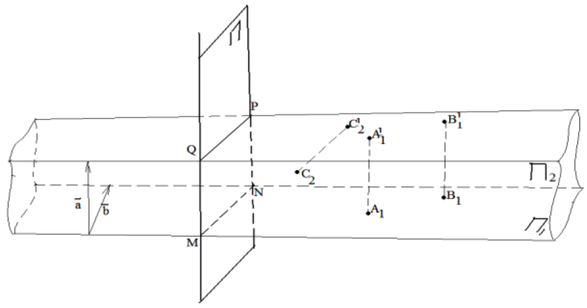

Рис. 2

Эту призму обозначим $Ф$. При этом все точки противоположных граней "склеиваются" с соответствующими им точками (на рис. 2 "склеиваются" точки A_1 и A_1^1, B_1 и B_1^1, C_2 и C_2^1). "Склеиваются" также соответствующие точки всех ребер (на рис. 3 "склеиваются" точки M, N, P, Q). Получили ***модель пространства*** $\boldsymbol{E_3^2}$ в евклидовом пространстве E_3.

2.1. Прямые в пространстве E_3^2

Пусть p^* – любая прямая в пространстве E_3^2. Она получается "склеиванием" орбиты некоторой прямой p пространства E_3. Для прямой p возможны следующие случаи.

1. Прямая p параллельна вектору $\bar{b}$, т.е. перпендикулярна грани $П_2$ призмы $Ф$. Одна из прямых, входящих в орбиту p, пересекает $П_2$. Не нарушая общности, можно считать, что p пересекает $П_2$. Но тогда $Ф \cap p$ есть евклидов отрезок, концы которого лежат в плоскостях $П_2$ и $T_{\bar{b}}(П_2)$ (на рис. 2 это отрезок AA^1). В результате "склеивания" получится окружность, длина которой равна длине вектора $\bar{b}$. Итак, ***прямая первого рода*** пространства E_3^2 изображается на модели $Ф$ окружностью радиуса $\dfrac{|\bar{b}|}{2\pi}$. Через любую точку пространства E_3^2 проходит прямая первого рода и только одна. Любые две различные прямые первого рода не пересекаются.

2. Прямая t параллельна вектору $\bar{a}$, т. е. перпендикулярна грани $П_1$.

Аналогично предыдущему случаю получаем в результате "склеивания" ***прямую второго рода*** в пространстве E_3^2. На модели $Ф$ она изображается окружностью радиуса $\dfrac{|\bar{a}|}{2\pi}$. Через любую точку пространства E_3^2 проходит прямая второго рода и только одна.

Любые две прямые второго рода не пересекаются. Любая прямая первого рода с любой прямой второго рода либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют точно одну общую точку.

3. Прямая q перпендикулярна векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. параллельна ребрам призмы Φ. Одна и только одна из прямых, входящих в орбиту q, целиком лежит в призме.

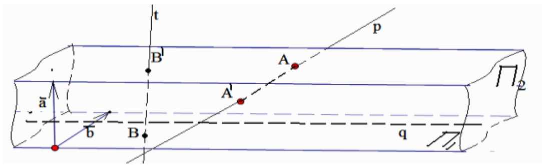

Рис. 3

Все прямые, входящие в орбиту прямой q, "склеиваются" с q, но никакие точки прямой q не "склеиваются" между собой. Следовательно, результатом "склеивания" будет сама прямая q. Итак, ***прямые третьего рода*** в пространстве E_3^2 – это евклидовы прямые. На модели Φ они изображаются прямыми, параллельными ребрам Φ (рис. 2). Через любую точку пространства E_3^2 проходит прямая третьего рода и только одна. Любые две различные прямые третьего рода не пересекаются. Любая прямая третьего рода с любой прямой первого или второго рода либо не имеет ни одной общей точки, либо имеет точно одну общую точку.

4. Прямая p не параллельна и не перпендикулярна ни вектору $\bar{a}$, ни вектору $\bar{b}$. Одна из прямых орбиты p пересекает призму Φ. Не нарушая общности, можно считать, что это сама прямая p. Очевидно, p будет пересекать бесконечно много призм вида $T_{k\bar{a}+m\bar{b}}(\Phi)$. Получим бесконечно много отрезков. Все они "склеиваются" с соответствующими отрезками в призме Φ. Проведя рассуждения, аналогичные приведенным в учебном пособии [3] (стр. 13), получим, что результатом "склеивания" последних будет винтовая линия.

Итак, прямые ***четвертого рода*** пространства E_3^2 на модели Φ изображаются винтовыми линиями. Любые две различные прямые четвертого рода либо не пересекаются, либо имеют бесконечно много общих точек, либо имеют точно одну общую точку. Любая прямая первого или второго рода имеет с любой прямой четвертого рода точно одну общую точку.

Любая прямая третьего рода пересекает любую прямую четвертого рода в бесконечном множестве точек.

2.2. Плоскости в пространстве E_3^2

Исследуем типы плоскостей пространства E_3^2 и их взаимное расположение. Пусть Π произвольная плоскость в E_3. Возможны следующие случаи.

1. $\Pi // \bar{a}$, $\Pi // \bar{b}$. Эта плоскость перпендикулярна граням призмы Φ и пересекает ее по прямоугольнику (на рис. 2 это прямоугольник $MNPQ$). Вся плоскость Π "склеится" в этот прямоугольник. При этом у прямоугольника "склеятся" противоположные ребра. Получится ***поверхность тора*** (смотри [3]). Итак, ***плоскость первого типа*** изображается на модели Φ поверхностью тора. Очевидно, любые две различные плоскости первого типа не пересекаются и через любую точку пространства E_3 проходит плоскость первого типа и только одна.

2. $\Pi \perp \bar{b}$. Эта плоскость параллельна вектору $\bar{a}$ и пересекает призму Φ по полосе, края которой лежат в гранях Π_1 и $T_{\bar{a}}(\Pi_1)$ на рис. 3 это полоса с краями p_1 и p_1^1. Ширина этой полосы равна $|\bar{a}|$. При действии группы G_2 эта полоса "склеивается" в ***цилиндрическую плоскость***, радиус кривизны которой равен $\dfrac{|\bar{a}|}{2\pi}$ (см. [4]). Итак, плоскость второго типа на модели Φ изображается трехмерным бесконечным евклидовым цилиндром.

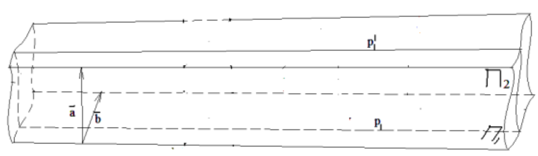

Рис. 4

В пространстве E_3^2 через любую точку проходит плоскость второго типа и только одна. Любые две различные плоскости второго типа не пересекаются. Любая плоскость первого типа пересекает любую плоскость второго типа в одной точке.

3. $\Pi \perp \bar{a}$. Аналогично предыдущему случаю получим ***цилиндрическую плоскость***, радиус кривизны которой равен $\dfrac{|\bar{b}|}{2\pi}$.

Итак, на модели Φ плоскость третьего типа изображается тоже бесконечным евклидовым цилиндром.

Любые две различные плоскости третьего типа не пересекаются, любая плоскость третьего типа пересекает любую плоскость первого типа в одной точке. Любая плоскость второго типа пересекает любую плоскость третьего типа по евклидовой прямой.

4. $\Pi \,//\, \bar{a}$, но Π не параллельна и не перпендикулярна вектору $\bar{b}$ (или $\Pi // \bar{b}$, но Π не параллельна и не перпендикулярна вектору $\bar{a}$. Такая плоскость пересекает призму Φ по прямоугольнику (на рис. 4 это AA_1B_1B). Стороны этого прямоугольника, лежащие внутри призмы Φ, перпендикулярны грани Π_1 (соответственно Π_2) и имеют длину, равную $|\bar{a}|$ (соответственно $|\bar{b}|$. Две другие стороны "склеиваются" при действии группы G_2 (на рис. 5 "склеиваются" AB и A_1B_1).

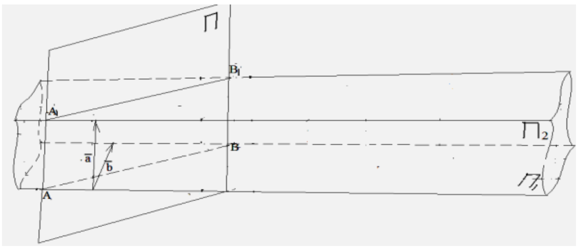

Рис. 5

Плоскость Π пересекает все призмы вида $T_{k\bar{a}+m\bar{b}}(\Phi)$. Результатом пересечений будет система равных прямоугольников. Все они "склеиваются" с соответственными прямоугольниками в призме Φ. При этом у каждого прямоугольника "склеиваются" стороны, лежащие в гранях Π_1 и $T_{\bar{a}}(\Pi_1)$.

В результате "склеивания" последних прямоугольников получится поверхность, гомеоморфная бесконечному евклидовому цилиндру, но "закрученному" по винтовой линии (образующими такого цилиндра будут винтовые линии). Итак, плоскости ***четвертого типа*** изображаются на модели Φ винтообразным цилиндром. Через каждую точку пространства E_3^2 проходит бесконечно много прямых четвертого типа. Любые две различные плоскости четвертого типа либо не пересекаются, либо имеют точно одну общую точку. Любая плоскость первого или второго типа пересекает любую плоскость четвертого типа точно в одной точке. Любая плоскость третьего типа пересекает любую плоскость четвертого типа по винтовой линии.

5. Плоскость Π не параллельна и не перпендикулярна ни вектору $\bar{a}$, ни вектору $\bar{b}$. В этом случае плоскость Π^* будет изображаться на модели Φ винтовой поверхностью, ось которой параллельна ребрам призмы Φ. Это ***плоскость пятого типа.*** Через любую точку пространства E_3^2 проходит бесконечно много плоскостей пятого типа. Любые две плоскости пятого типа либо не пересекаются, либо пересекаются по винтовой линии, либо пересекаются по евклидовой прямой. Любая плоскость первого вида либо пересекает плоскость пятого вида по винтовой линии, либо не имеет с ней ни одной общей точки. Любая плоскость пятого вида пересекает любую плоскость четвертого вида по винтовой линии.

2.3. Расстояние между точками. Угол между прямыми и плоскостями в пространстве E_3^2

Определение 3 ([4, стр. 11]). ***Расстоянием*** о точки A^* до точки B^* в пространстве E_3^2 называется $min(|g(A),g_1(B)|_{евк.}$, где g и g_1 пробегают все элементы группы G_2. Обозначение $|A^*B^*|$.

Свойства расстояний между точками

1. Для любой упорядоченной пары точек A^*, B^* пространства E_3^2 расстояние определено и однозначно.

2. $|A^*B^*| = |B^* A^*|$ для любых точек A^*, B^*.

3. $|A^*B^*| \geq 0$ для любых точек A^*, B^*. При этом $|A^*B^*| = 0$ тогда и только тогда, когда $A^* = B^*$.

4. В орбитах точек A^* и B^* всегда найдутся евклидовы точки A_i и B_j соответственно такие, что $|A^*B^*| = |A_i B_j|_{евк.}$.

5. $|A^*B^*| + |B^*C^*| \geq |A^*C^*|$.

Так как при движениях евклидова пространства углы между прямыми и плоскостями не меняются, то для любых двух евклидовых прямых p и q угол между p_i и q_j не зависит от i и j и равен углу между p и q (здесь p_i и q_j элементы орбит прямых p и q соответственно). Аналогичное имеет место и для плоскостей.

Определение 4. Углом между прямыми p^* и q^* в пространстве E_3^2 называется угол между соответствующими им прямыми p и q пространства E_3.

Определение 5. Прямые p^* и q^* пространства E_3^2 называются ***перпендикулярными,*** если перпендикулярны соответствующие им прямые p и q пространства E_3.

Свойства перпендикулярных прямых в пространстве E_3^2 аналогичны свойствам перпендикулярных прямых в цилиндрическом пространстве [1].

Определение 6. Углом между плоскостями α^* и β^* в пространстве E_3^2 называется угол между соответствующими им плоскостями α и β в пространстве E_3. Плоскости α^* и β^* называются ***перпендикулярными,*** если перпендикулярны соответствующие им плоскости α и β.

2.3. Движения пространства E_3^2

Определение 3 [4, стр. 11]. ***Расстоянием*** между точками A^* и B^* в пространстве E_3^2 называется $min(|g(A),g_1(B)|_{евк.}$, где g и g_1 пробегают все элементы группы G_2.

Определение 4 [4, стр. 11]. ***Движением пространства E_3^2*** называется взаимно однозначное отображение множества точек этого пространства на себя, при котором сохраняется расстояние между точками.

Обозначим W множество орбит всех точек пространства E_3. Пусть G – группа всех движений пространства E_3, G^* – множество всех движений, при которых множество W отображается само на себя. Очевидно, G^* является подгруппой в группе G и G_2 является инвариантной подгруппой в группе G^* ([3, с. 11]). При этом движения из G_2 и только они отображают каждую орбиту саму на себя.

В группу G_2 входят все параллельные переносы пространства E_3 на векторы $k\bar{a}+m\bar{b}$, все центральные симметрии, осевые симметрии с осями параллельными либо вектору $\bar{a}$, либо вектору $\bar{b}$, скользящие симметрии с осями параллельными либо вектору $\bar{a}$, либо вектору $\bar{b}$, симметрии относительно плоскостей, параллельных векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, скользящие симметрии относительно плоскостей, параллельных векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Так как каждое движение из G^* отображает орбиту на орбиту, то каждая точка из E_3^2 отобразится на точку из E_3^2.

Разные точки, очевидно, будут отображаться на разные же точки. Так как каждое движение из G^* сохраняет евклидово расстояние, то будет сохраняться и расстояние между соответствующими точками в пространстве E_3^2. Итак, каждому движению из G^* соответствует движение пространства E_3^2. Легко доказать и обратное; каждому движению пространства E_3^2 соответствует хотя бы одно движение евклидового пространства. Из сказанного выше следует

Теорема 1. Группа движений пространства E_3^2 изоморфна фактор-группе группы G^* по подгруппе G_2.

Рассмотрим частные виды движений пространства E_3^2. Все движения из G_2 порождают тождественное преобразование пространства E_3^2. Для остальных движений из G^* возможны следующие случаи.

1. Пусть $T_{\bar{c}}$ произвольный параллельный перенос пространства E_3. Если $\bar{c}=k\bar{a}+m\bar{b}$, то $T_{\bar{c}}$ порождает тождественное преобразование в E_3^2. Если $\bar{c}\neq k\bar{a}+m\bar{b}$, то $T_{\bar{c}}$ порождает ***сдвиг по прямой***. Все точки сдвигаются на одно и то же расстояние.

2. Центральная симметрия пространства E_3 порождает ***центральную симметрию*** пространства E_3^2.

3. Осевые симметрии с осями, параллельными либо вектору $\bar{a}$, либо вектору $\bar{b}$, порождают ***осевые симметрии*** пространства E_3^2, осями которых являются прямые второго и первого рода соответственно.

4. Скользящие осевые симметрии с осями, параллельными либо вектору $\bar{a}$, либо вектору $\bar{b}$, порождают ***скользящие осевые симметрии*** пространства E_3^2, осями которых являются прямые второго и первого рода соответственно.

5. Симметрии относительно плоскостей, параллельных векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, порождают симметрии пространства E_3^2 относительно плоскостей первого рода.

6. Скользящие симметрии относительно плоскостей, параллельных векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, порождают скользящие симметрии пространства E_3^2 относительно плоскостей первого рода.

Список литературы

1. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Геометрии, развертывающиеся на трехмерное евклидово пространство // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1(48). С. 5–12.
2. *Андреева З.И.* Равномерно-разрывные подгруппы группы движений *n*-мерного евклидова пространства // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2(41). С. 5–10.
3. *Никулин В.В.*, *Шафаревич И.Р.* Группы и геометрии. М.: Наука, 1993. 239 с.
4. *Андреева З.И.* Современные главы геометрии: учеб. пособие. Пермь: Изд-во ПГНИУ, 2014. 102 с.
5. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Многообразие геометрии: учеб. Пермь: Изд-во ПГГПУ. 2015. 171 с.
6. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Движения плоскостей, развертывающихся на евклидову плоскость: сб. науч. тр. IV-й международный симпозиум "Симметрии: теоретический и методический аспекты". Астрахань, 2012. С. 16.

The Geometry obtained by "gluing" a three-dimensional Euclidean space using the group $\{T_{\bar{a}}\}\otimes\{T_{\bar{b}}\}$

Z. I. Andreeva, G. G. Sheremet
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
sheremet@pspu.ru; +79028317175

The space E_3^2 is defined, which is obtained by "gluing" a Euclidean three-dimensional space using a uniformly discontinuous subgroup of the group of motions of the Euclidean space, which is a direct product of two cyclic groups of parallel translations. The main objects of the new space are determined and their affine and some metric properties are studied.

Keywords: *Euclidean space; distance; movement; group; group structure; uniformly discontinuous group; gluing; plane; line; point; distance; angle; perpendicularity.*