

УДК 531.8

Комплексные представления для расчета механических систем при гармонических процессах

И. П. Попов

Курганский государственный университет
Россия, 640002, г. Курган, ул. Томина, 106-52
ip.popov@yandex.ru; 8-905-85-28-121

Отмечено, что традиционный расчет механизмов при вынужденных колебаниях зачастую представляет собой непростую задачу. Чаще всего расчетчиков интересуют установившиеся режимы колебаний. Целью работы является значительное упрощение вычислений путем замены необходимости решения дифференциальных уравнений на алгебраические методы. Подобный подход широко используется в электротехнике. Использование символического (комплексного) описания механических систем при вынужденных гармонических колебаниях (в установившемся режиме) позволило отказаться от чрезвычайно громоздкого и трудоемкого алгоритма расчета, связанного с решением дифференциальных уравнений и заменить его простыми и наглядными алгебраическими операциями. Благодаря этому время расчетов уменьшается в разы. Векторные диаграммы, не являясь необходимой составляющей исследования механических систем, имеют существенное методическое значение, поскольку показывают количественные и фазные соотношения между параметрами систем.

Ключевые слова: потребители механической мощности; вынужденные колебания; параллельное; последовательное соединение; резонанс сил; резонанс скоростей.

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-3-66-78

Традиционный расчет механизмов при вынужденных колебаниях зачастую представляет собой непростую задачу [1–3].

Чаще всего расчетчиков интересуют установившиеся режимы колебаний [4–6].

Целью работы является значительное упрощение вычислений путем замены необходимости решения дифференциальных уравнений на алгебраические методы. Подобный подход широко используется в электротехнике.

Схема параллельного соединения

Скорость элементов механической системы одинаковая (рис. 1):

$$v = V \sin \omega t . \quad (1)$$

При этом силы отличаются:

$$f_m = m \frac{dv}{dt} = m\omega V \cos \omega t , \quad (2)$$

$$f_k = -kx = k \int v dt = -\frac{k}{\omega} V \cos \omega t , \quad (3)$$

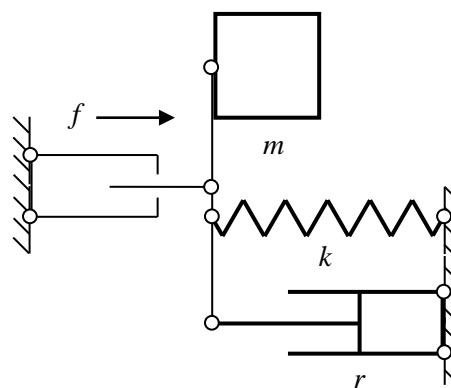


Рис. 1. Схема параллельного соединения

$$f_r = rv = rV \sin \omega t . \quad (4)$$

Результирующая сила:

$$f = f_m + f_k + f_r =$$

$$= V \left[\left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \cos \omega t + r \sin \omega t \right] =$$

$$= V \sqrt{\left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2 + r^2} \left[\frac{\left(m\omega - k/\omega \right) \cos \omega t}{\sqrt{\left(m\omega - k/\omega \right)^2 + r^2}} + \frac{r \sin \omega t}{\sqrt{\left(m\omega - k/\omega \right)^2 + r^2}} \right].$$

Удобно ввести обозначение

$$\varphi = \arctg \frac{m\omega - k/\omega}{r}. \quad (5)$$

При этом

$$f = V \sqrt{\left(m\omega - k/\omega \right)^2 + r^2} (\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t) =$$

$$= V \sqrt{\left(m\omega - k/\omega \right)^2 + r^2} \sin(\omega t + \varphi) = F \sin(\omega t + \varphi). \quad (6)$$

Это классическое выражение (результат решения дифференциального уравнения).

В рассматриваемом случае необходимость в дифференциальном уравнении не возникает.

Амплитуда результирующей силы:

$$F = Vz, \quad (7)$$

$$z = \sqrt{\left(m\omega - k/\omega \right)^2 + r^2} \quad (\kappa z \cdot c^{-1}). \quad (8)$$

Первая (максвелловская) система механико-электрических аналогий имеет вид:

- $V \Rightarrow I$ (скорость \Rightarrow ток),
- $F \Rightarrow U$ (сила \Rightarrow напряжение),
- $m \Rightarrow L$ (масса \Rightarrow индуктивность),
- $k \Rightarrow 1/C$ (коэффициент упругости \Rightarrow

величина обратная емкости),

- $r \Rightarrow R$ (коэффициент вязкого сопротивления \Rightarrow сопротивление).

Американский физик Вебстер дополнил эти аналогии:

- $\omega m \Rightarrow \omega L$ (инертный реактанс \Rightarrow индуктивное сопротивление) [7-9],

- $k/\omega \Rightarrow 1/(\omega C)$ (упругий реактанс \Rightarrow емкостное сопротивление).

Учитывая приведенные механико-электрические аналогии, формула (7) является аналогом известного закона Ома

$$U = IZ.$$

здесь $Z = \sqrt{[\omega L - 1/(\omega C)]^2 + R^2}$ – сопротивление. Таким образом, формула (8) – это *механический импеданс* (impedance).

Соответственно этому *механический реактанс* (reactance):

$$x = m\omega - \frac{k}{\omega}.$$

Если $x=0$, то $\omega = \sqrt{k/m}$ – классическое выражение, полученное значительно проще классического решения. При этом происходит *резонанс сил* [10]. При $r=0$, $z=0$. Механизм не препятствует источнику колебаний.

По аналогии с электротехникой r – *механический резистанс* (resistance).

Комплексное описание для параллельной схемы соединения

Синусоидальная величина имеет следующую форму записи:

$$a = A \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im} \left[A e^{i(\omega t + \varphi)} \right].$$

Здесь $A e^{i(\omega t + \varphi)}$ – комплексный вектор.

Такие векторы, как правило, записывают для момента $t=0$. В соответствии с этим

$$A e^{i(\omega \cdot 0 + \varphi)} = A e^{i\varphi} = \dot{A}$$

принято считать *комплексной амплитудой*.

Формула (1), таким образом, имеет следующий вариант записи:

$$v = V \sin \omega t = \text{Im}(V e^{i\omega t}),$$

$$\dot{V} = V e^{i0}.$$

Из выражения (2) следует, что v отстает по фазе от f_m на $\pi/2$. Таким образом,

$$\dot{F}_m = m\omega \dot{V} e^{i\frac{\pi}{2}} = \dot{x}_m \dot{V}.$$

$$\dot{x}_m = \omega t e^{i\frac{\pi}{2}} = i\omega t. \quad (9)$$

Это *инертный реактанс* в комплексной записи.

Несинусоидальные величины в комплексном представлении подчеркивают (синусоидальные отмечают точкой).

Амплитуда инертной силы (в комплексном изображении) имеет вид:

$$\dot{F}_m = \omega t e^{i\frac{\pi}{2}} V e^{i0} = \omega m V e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Точно также, имея в виду (3) и (4),

$$\dot{F}_k = -\frac{k}{\omega} \dot{V} e^{i\frac{\pi}{2}} = \dot{x}_k \dot{V}.$$

$$\dot{x}_k = -\frac{k}{\omega} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{k}{\omega}. \quad (10)$$

Это *упругий реактанс* в комплексной записи.

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = \dot{r} \dot{V}.$$

$$\dot{r} = r.$$

Это *резистанс* в комплексной записи.

В соответствии с этим амплитуды упругой и резистивной сил (в комплексном изображении) имеют вид:

$$\dot{F}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} V e^{i0} = \frac{k}{\omega} V e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = r e^{i0} V e^{i0}.$$

Комплексные представления механических реактанса и импеданса:

$$\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k = \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$\underline{z} = r + \underline{x} = r + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Абсолютная величина последнего совпадает с (8)

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)^2}.$$

Фаза импеданса определяется формулой (5), поэтому

$$\underline{z} = Z e^{i\varphi}.$$

Сила внешнего источника имеет вид:

$$\dot{F} = \underline{z} \dot{V} = Z V e^{i\varphi}. \quad (11)$$

Это подтверждается формулой (6).

Пример 1. $\dot{F} = 100 e^{i0}$ (Н), $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 20$ (кг·с⁻²), $r = 7$ (кг·с⁻¹). Определить все остальные параметры.

$$\underline{x}_m = \omega t e^{i90^\circ} = 20 e^{i90^\circ} \text{ (кг·с}^{-1}\text{)},$$

$$\underline{x}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i90^\circ} = 10 e^{-i90^\circ} \text{ (кг·с}^{-1}\text{)}.$$

$$Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2} =$$

$$= \sqrt{7^2 + (20 - 10)^2} = 12,207 \text{ (кг·с}^{-1}\text{)}.$$

$$\varphi = \arctg \frac{x_m - x_k}{r} = \arctg \frac{20 - 10}{7} = 55^\circ,$$

$$\underline{z} = Z e^{i\varphi} = 12,207 e^{i55^\circ} \text{ (кг·с}^{-1}\text{)}.$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100 e^{i0}}{12,207 e^{i55^\circ}} \approx 8,192 e^{-i55^\circ} \text{ (м·с}^{-1}\text{)}, \quad (12)$$

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} =$$

$$= 20 e^{i90^\circ} \cdot 8,192 e^{-i55^\circ} = 163,846 e^{i35^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} =$$

$$= 10 e^{-i90^\circ} \cdot 8,192 e^{-i55^\circ} = 81,923 e^{-i145^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = 7 e^{i0} \cdot 8,192 e^{-i55^\circ} = 57,344 e^{-i55^\circ} \text{ (Н)}.$$

Как и следовало ожидать,

$$\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = 163,846 e^{i35^\circ} + 81,923 e^{-i145^\circ} +$$

$$+ 57,344 e^{-i55^\circ} = 100 e^{i0} \text{ (Н)} = \dot{F}.$$

Расчет с применением дифференциальных уравнений занял бы несколько страниц.

Данным примера 1 соответствует векторная диаграмма на рис. 2.

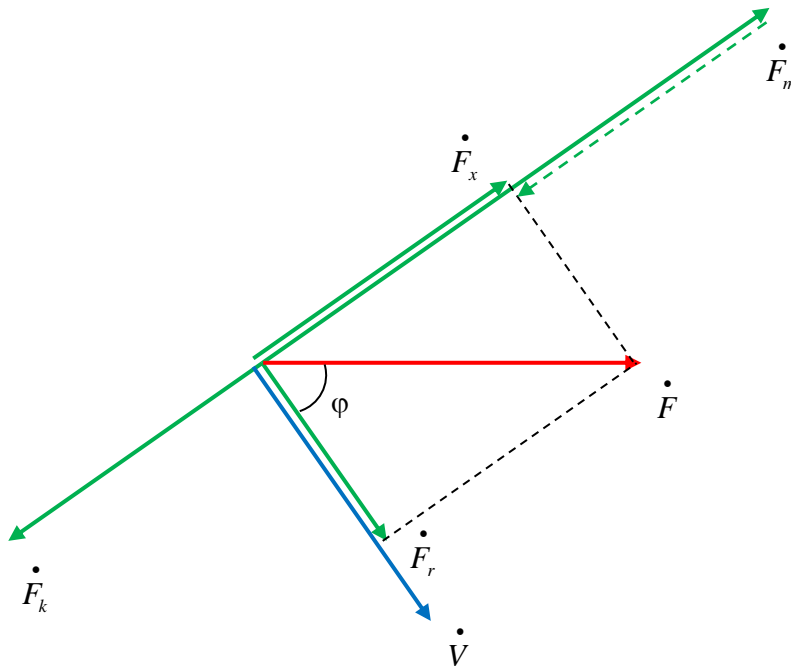


Рис. 2. Параллельное соединение

Пример 2. Для резонанса сил. Отличие от примера 1 состоит в том, что $k = 40 \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-2}\text{)}$.

$$\begin{aligned} \underline{x}_k &= 20e^{-i90^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \\ \underline{z} &= r = 7e^{i0^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \end{aligned}$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100e^{i0}}{7e^{i0^\circ}} \approx 14,286e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 285,72e^{i90^\circ} \text{ (Н)},$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_k &= \underline{x}_k \dot{V} = \\ &= 20e^{-i90^\circ} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 285,72e^{-i90^\circ} \text{ (Н)}, \end{aligned}$$

$$\dot{F}_r = r \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 14,286e^{i0^\circ} = 100e^{i0^\circ} \text{ (Н)}.$$

Как и следовало ожидать,

$$\begin{aligned} \dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r &= 285,72e^{i90^\circ} + 285,72e^{-i90^\circ} + \\ &+ 100e^{i0^\circ} = 100e^{i0} \text{ (Н)} = \dot{F} = \dot{F}_r. \end{aligned}$$

Данным примера 2 соответствует векторная диаграмма на рис. 3.

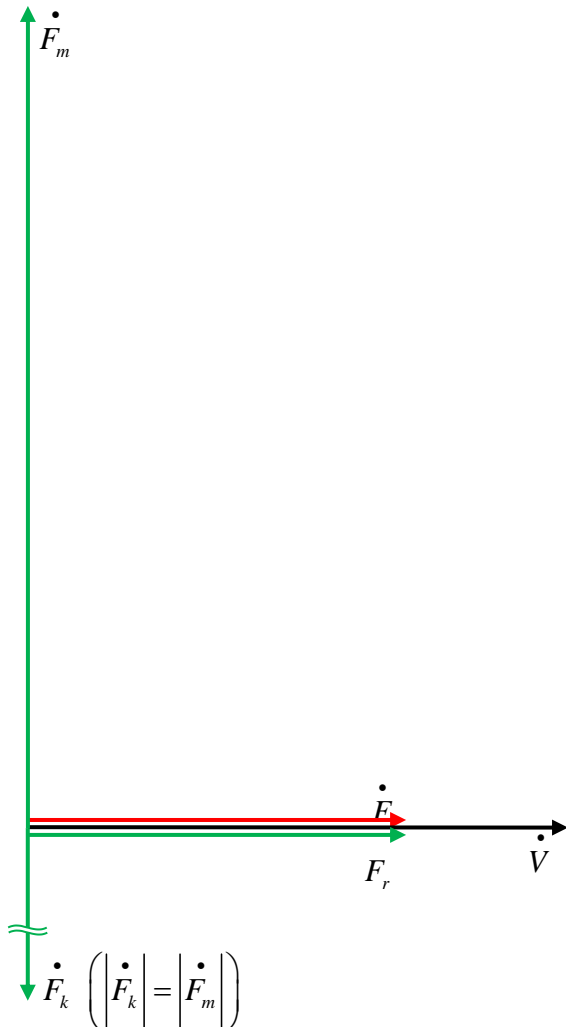


Рис. 3. Резонанс сил

Схема последовательного соединения

Сила на элементах механической системы одинаковая (рис. 4):

$$f = F \cos \omega t.$$

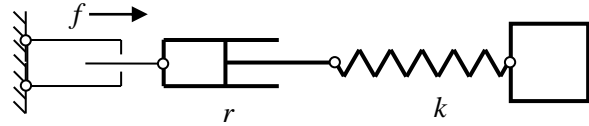


Рис. 4. Схема последовательного соединения

При этом скорости отличаются:

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt = \frac{F}{\omega m} \sin \omega t, \quad (13)$$

$$v_k = -\frac{1}{k} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \frac{df}{dt} = -\frac{\omega F}{k} \sin \omega t, \quad (14)$$

$$v_r = \frac{f}{r} = \frac{F}{r} \cos \omega t. \quad (15)$$

Результирующая скорость:

$$\begin{aligned} v &= v_m + v_k + v_r = \\ &= F \left[\left(\frac{1}{\omega m} - \frac{\omega}{k} \right) \sin \omega t + \frac{1}{r} \cos \omega t \right] = \\ &= F \sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2} \times \\ &\times \left[\frac{1/(\omega m) - \omega/k}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2}} \sin \omega t + \right. \\ &\left. + \frac{1/r}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2}} \cos \omega t \right]. \\ \varphi &= \arctg \frac{1/(\omega m) - \omega/k}{1/r}. \\ v &= F \sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2} \times \\ &\times (\sin \varphi \sin \omega t + \cos \varphi \cos \omega t) = \\ &= F \sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2} \cos(\omega t - \varphi) = \\ &= V \cos(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Это выражение синусоидальной скорости для схемы последовательного соединения элементов механической системы.

Амплитуда результирующей скорости:

$$V = Fy, \quad (16)$$

$$y = \sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + (1/r)^2}.$$

Из условия $1/(\omega m) - \omega/k = 0$ следует классическое выражение $\omega = \sqrt{k/m}$, полученное значительно проще классического решения. При этом происходит *резонанс скоростей* [10]. При $1/r = 0$, $y = 0$. Механизм препятствует (абсолютно) источнику колебаний.

Комплексное описание для последовательной схемы соединения

Алгоритм рассмотрения такой же, как и при параллельном соединении:

$$f = F \cos \omega t = \text{Re}(F e^{i\omega t}),$$

$$\dot{F} = F e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Из выражения (13) следует, что f опережает по фазе v_m на $\pi/2$. Таким образом,

$$\dot{V}_m = -\frac{1}{\omega m} \dot{F} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{x_m} \dot{F} = \underline{b}_m \dot{F}.$$

$$\underline{b}_m = \frac{1}{\omega m} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \frac{1}{\omega m} = \frac{1}{x_m}.$$

Это *инертный сассептанс* (susceptance) в комплексной записи.

Амплитуда инертной скорости (в комплексном изображении) имеет вид:

$$\dot{V}_m = \frac{1}{\omega m} e^{-i\frac{\pi}{2}} F e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega m} F e^{i0}.$$

Точно также, имея в виду (14) и (15),

$$\dot{V}_k = \frac{\omega}{k} \dot{F} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{x_k} \dot{F} = \underline{b}_k \dot{F}.$$

$$\underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} = i \frac{\omega}{k} = \frac{1}{x_k}.$$

Это *упругий сассептанс* в комплексной записи.

В соответствии с этим амплитуды упругой и резистивной скоростей (в комплексном изображении) имеют вид:

$$\dot{V}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\frac{\pi}{2}} F e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\omega}{k} F e^{i\pi}.$$

$$\dot{V}_r = \frac{1}{r} \dot{F} = g \dot{F} = g F e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\underline{g} = g = \frac{1}{r}.$$

Это *кондактанс* (conductance) в комплексной записи.

Комплексные представления механических *сассептанса* и *адмитанса* (admittance):

$$\underline{b} = \underline{b}_k + \underline{b}_m = \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$\underline{y} = g + \underline{b} = g + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Абсолютная величина последнего совпадает с (16):

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right)^2}.$$

$$\varphi = \arctg \frac{b_k - b_m}{g} = \arctg \frac{\omega/k - 1/(\omega m)}{g} =$$

$$= \arctg \left[(m\omega - k/\omega) \frac{r}{mk} \right].$$

$$\underline{y} = Y e^{i\varphi}.$$

Скорость штока внешнего источника имеет вид:

$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} = Y e^{i\varphi} F e^{i\frac{\pi}{2}} = Y F e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}. \quad (17)$$

Пример 3. Отличие от примера 1 состоит в том, что элементы соединены последовательно.

$$\underline{b}_m = \underline{x}_m^{-1} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} (\kappa z^{-1} \cdot c),$$

$$\underline{b}_k = \underline{x}_k^{-1} = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} (\kappa \Gamma^{-1} \cdot c),$$

$$g = r^{-1} = 14,286 \cdot 10^{-2} (\kappa z^{-1} \cdot c).$$

$$Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2} = \sqrt{(14,286 \cdot 10^{-2})^2 + (10 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2})^2} = 15,135 \cdot 10^{-2} (\kappa z^{-1} \cdot c).$$

$$\varphi = \arctg \frac{b_k - b_m}{g}$$

$$= \arctg \frac{10 \cdot 10^{-2} - 5 \cdot 10^{-2}}{14,286 \cdot 10^{-2}} = 19,29^\circ,$$

$$\underline{y} = Y e^{i\varphi} = 15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ} (\kappa \Gamma^{-1} \cdot c).$$

$$\dot{V} = \underline{y} \dot{F} =$$

$$= 15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ} \cdot 100 = 15,135 e^{i19,29^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 100 = 5 e^{-i90^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 = 10 e^{i90^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}),$$

$$\dot{V}_r = g \dot{F} = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 14,286 (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}).$$

Как и следовало ожидать,

$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = 5 e^{-i90^\circ} + 10 e^{i90^\circ} +$$

$$+ 14,286 = 15,135 e^{i19,29^\circ} (\text{м} \cdot \text{с}^{-1}) = \dot{V}.$$

Расчет с применением дифференциальных уравнений занял бы несколько страниц.

Данным примера 3 соответствует векторная диаграмма на рис. 5.

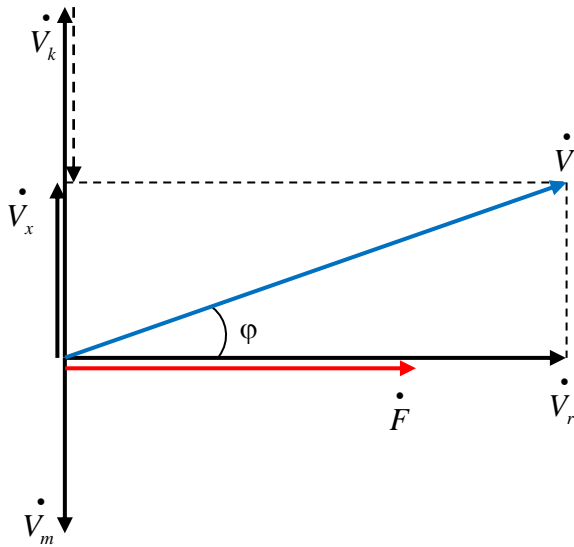


Рис. 5. Последовательное соединение

Пример 4. Для резонанса скоростей. Отличие от примера 2 состоит в том, что элементы соединены последовательно.

$$\begin{aligned} \underline{b}_k &= 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \text{ (кг}^{-1} \cdot \text{с)}, \\ Y = g &= 14,286 \cdot 10^{-2} \text{ (кз}^{-1} \cdot \text{с)}, \\ \varphi &= 0^\circ, \\ \underline{y} = Y e^{i\varphi} &= 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} \text{ (кг}^{-1} \cdot \text{с)}, \\ \dot{V} = \underline{y} \dot{F} &= 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 14,286 e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}), \\ \dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} &= 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 = 5 e^{i90^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}). \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать,

$$\begin{aligned} \dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r &= 5 e^{-i90^\circ} + 5 e^{i90^\circ} + 14,286 = \\ &= 14,286 e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}) = \dot{V} = \dot{V}_r \end{aligned}$$

Данным примера 4 соответствует векторная диаграмма на рис. 6.

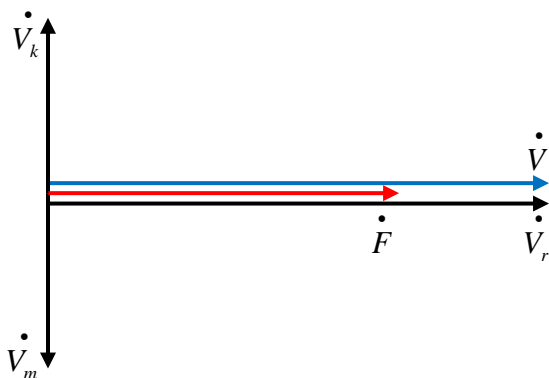


Рис. 6. Резонанс скоростей

Связь между механическими величинами

Теорема 1. Имеет место выражение:

$$\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}}.$$

Доказательство. С учетом (11)

$$\underline{z} = \frac{\dot{F}}{\dot{V}}.$$

С учетом (17)

$$\underline{y} = \frac{\dot{V}}{\dot{F}} = \frac{1}{\underline{z}}.$$

Теорема доказана.

Следствие. При $r = 0$

$$\underline{b} = 1/\underline{x},$$

Так как при этом $\underline{y} = \underline{b}$, $\underline{z} = \underline{x}$.

Теорема 2. Для обратных эквивалентных величин имеют место выражения:

$$\begin{aligned} g^* &= \frac{r}{r^2 + x^2}, \\ \underline{b}^* &= \frac{x}{r^2 + x^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}, \\ r^* &= \frac{g}{g^2 + b^2}, \\ \underline{x}^* &= \frac{b}{g^2 + b^2} e^{-i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \underline{z} &= r + \underline{x} = r + ix, \\ \underline{y} = \frac{1}{\underline{z}} &= \frac{1}{r + ix} \frac{r - ix}{r - ix} = \frac{r - ix}{r^2 + x^2} = \\ &= \frac{r}{r^2 + x^2} - i \frac{x}{r^2 + x^2} = g^* + \underline{b}^*, \\ \underline{y} &= g + \underline{b} = g + ib, \\ \underline{z} = \frac{1}{\underline{y}} &= \frac{1}{g + ib} \frac{g - ib}{g - ib} = \frac{g - ib}{g^2 + b^2} = \\ &= \frac{g}{g^2 + b^2} - i \frac{b}{g^2 + b^2} = r^* + \underline{x}^*. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Для схемы последовательного соединения механических систем имеет место выражение:

$$\underline{y} = \sum_{j=1}^n \underline{y}_j.$$

Доказательство. На все составляющие механические системы действует одна сила \dot{F} . Для любой из механических систем с учетом (17) можно записать

$$\dot{V}_j = \underline{y}_j \dot{F}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n \dot{V}_j = \sum_{j=1}^n \underline{y}_j \dot{F} = \dot{F} \sum_{j=1}^n \underline{y}_j = \dot{F} \underline{y}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1 $\frac{1}{\underline{z}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{z}_j}.$

Следствие 2. $\underline{z} = \frac{\prod_{j=1}^n \underline{z}_j}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n \underline{z}_j}.$

Следствие 3. Импеданс любой из составляющих механических систем больше эквивалентного импеданса.

Следствие 4. Если

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = \dots = \underline{z}_j = \dots = \underline{z}_n = \underline{z}^*, \text{ то } \underline{z} = \frac{\underline{z}^*}{n}.$$

Следствие 5.

$$\lim_{\underline{z}_1 \rightarrow \infty} \underline{z} = \frac{\prod_{j=2}^n \underline{z}_j}{\sum_{k=2}^n \prod_{j=2, j \neq k}^n \underline{z}_j}.$$

Теорема 4. Для схемы параллельного соединения механических систем имеет место выражение: $\underline{z} = \sum_{j=1}^n \underline{z}_j.$

Доказательство. Все составляющие механические системы имеют одну скорость \dot{V} . Для любой из составляющих механических систем с учетом (11) можно записать

$$\dot{F}_j = \underline{z}_j \dot{V}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$\dot{F} = \sum_{j=1}^n \dot{F}_j = \sum_{j=1}^n \underline{z}_j \dot{V} = \dot{V} \sum_{j=1}^n \underline{z}_j = \dot{V} \underline{z}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. $\frac{1}{\underline{y}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{y}_j}.$

Следствие 2. $\underline{y} = \frac{\prod_{j=1}^n \underline{y}_j}{\sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n \underline{y}_j}.$

Следствие 3. Адмитанс любой из составляющих механических систем больше эквивалентного адмитанса.

Следствие 4. Если

$$\underline{y}_1 = \underline{y}_2 = \dots = \underline{y}_j = \dots = \underline{y}_n = \underline{y}^*, \text{ то } \underline{y} = \frac{\underline{y}^*}{n}.$$

Следствие 5. $\lim_{\underline{y}_1 \rightarrow \infty} \underline{y} = \frac{\prod_{j=2}^n \underline{y}_j}{\sum_{k=2}^n \prod_{j=2, j \neq k}^n \underline{y}_j}.$

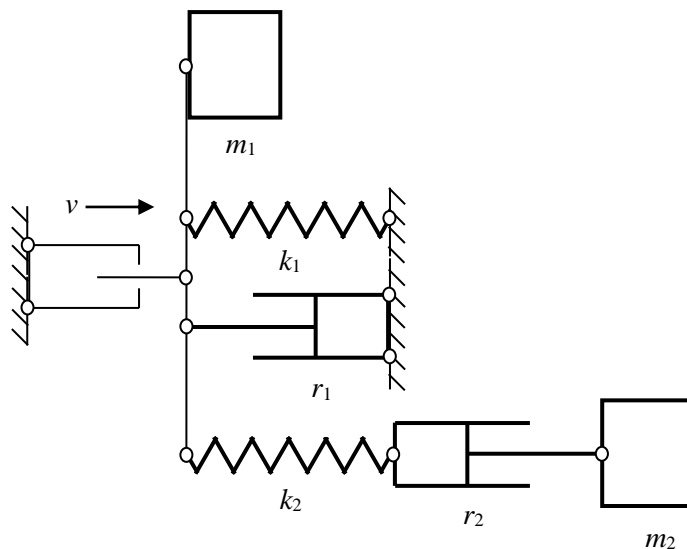


Рис. 7. Схема параллельно-последовательного соединения

Схема параллельно-последовательного соединения (рис. 7)

С учетом теоремы 1

$$\underline{z}_2 = 1/\underline{y}_2.$$

С учетом теоремы 4 $\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$. С уче-

том (11) $\dot{V} = \dot{F}/\underline{z}$.

Пример 5. $\dot{F} = 100e^{i0}$ (Н), $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 20$ (кг · с⁻²), $r = 7$ (кг · с⁻¹).

Определить все остальные параметры.

$$\begin{aligned} \underline{z}_2 &= 1/\underline{y}_2 = 1/(15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ}) \approx \\ &\approx 6,607e^{-i19,29^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \\ \underline{z} &= \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 12,207e^{i55^\circ} + 6,607e^{-i19,29^\circ} = \\ &= 15,372e^{i30,57^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \\ \dot{V} &= \dot{F}/\underline{z} = 100/(15,372e^{i30,57^\circ}) = \\ &= 6,505e^{-i30,57^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_{m1} &= \underline{x}_{m1} \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 6,505e^{-i30,57^\circ} = \\ &= 130,1e^{i59,43^\circ} \text{ (Н)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_{k1} &= \underline{x}_{k1} \dot{V} = 10e^{-i90^\circ} \cdot 6,505e^{-i30,57^\circ} = \\ &= 65,05e^{-i120,57^\circ} \text{ (Н)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_{r1} &= r_1 \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 6,505e^{-i30,57^\circ} = \\ &= 45,535e^{-i30,57^\circ} \text{ (Н)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_2 &= \underline{z}_2 \dot{V} = 6,607e^{-i19,29^\circ} \cdot 6,505e^{-i30,57^\circ} = \\ &= 42,979e^{-i49,86^\circ} \text{ (Н)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{m2} &= \underline{b}_{m2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 42,979e^{-i49,86^\circ} = \\ &= 2,149e^{-i139,86^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{k2} &= \underline{b}_{k2} \dot{F}_2 = 10 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 42,979e^{-i49,86^\circ} = \\ &= 4,298e^{i40,14^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{r2} &= g_2 \dot{F}_2 = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 42,979e^{-i49,86^\circ} = \\ &= 6,14e^{-i49,86^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}. \end{aligned}$$

Расчет с применением дифференциальных уравнений занял бы несколько страниц.

Данным примера 5 соответствует векторная диаграмма на рис. 8.

Пример 6. Для параллельно-последовательного (двойного) резонанса. Отличие от примера 5 состоит в том, что $k = 40$ (кг · с⁻²).

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 = r = 7e^{i0^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)},$$

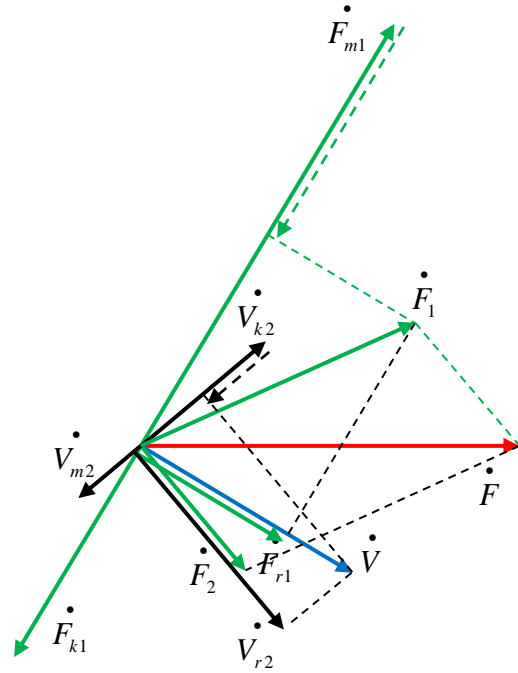


Рис. 8. Параллельно-последовательное соединение

$$\begin{aligned} \underline{z} &= \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 2r = 14e^{i0^\circ} \text{ (кг} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \\ \dot{V} &= \dot{F}/\underline{z} = 100/(14e^{i0^\circ}) = 7,143e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \\ \dot{F}_{m1} &= \underline{x}_{m1} \dot{V} = 20e^{i90^\circ} \cdot 7,143e^{i0^\circ} = \\ &= 142,857e^{i90^\circ} \text{ (Н)}, \\ \dot{F}_{k1} &= \underline{x}_{k1} \dot{V} = 20e^{-i90^\circ} \cdot 7,143e^{i0^\circ} = \\ &= 142,857e^{-i90^\circ} \text{ (Н)}, \\ \dot{F}_{r1} &= r_1 \dot{V} = 7e^{i0} \cdot 7,143e^{i0^\circ} = 50e^{i0^\circ} \text{ (Н)}, \\ \dot{F}_2 &= \underline{z}_2 \dot{V} = 7e^{i0^\circ} \cdot 7,143e^{i0^\circ} = 50e^{i0^\circ} \text{ (Н)}, \\ \dot{V}_{m2} &= \underline{b}_{m2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 50e^{i0^\circ} = \\ &= 2,5e^{-i90^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \\ \dot{V}_{k2} &= \underline{b}_{k2} \dot{F}_2 = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 50e^{i0^\circ} = \\ &= 2,5e^{i90^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \\ \dot{V}_{r2} &= g_2 \dot{F}_2 = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 50e^{i0^\circ} = \\ &= 7,143e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}. \end{aligned}$$

Данным примера 6 соответствует векторная диаграмма на рис. 9.

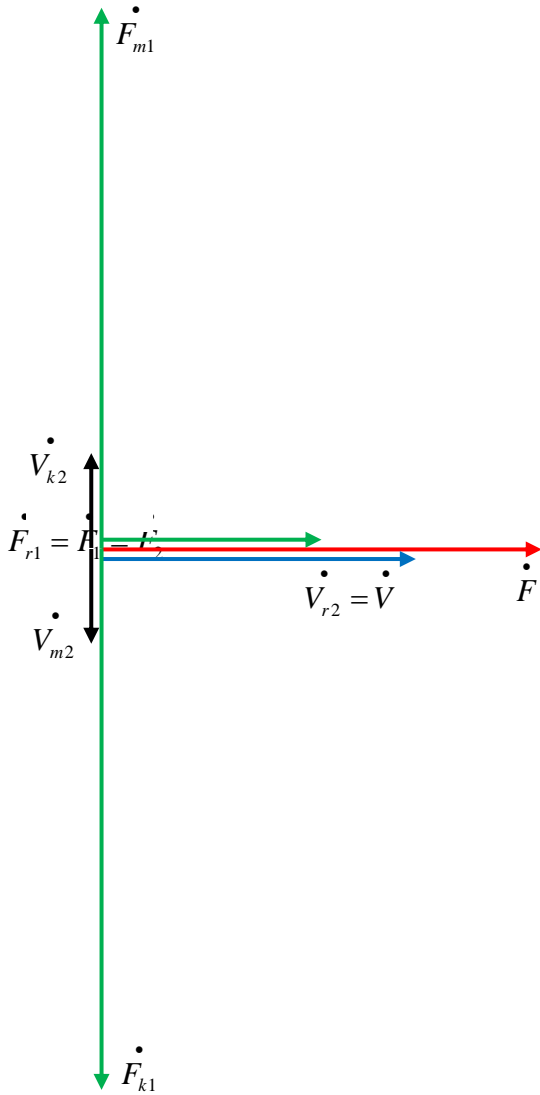


Рис. 9. Параллельно-последовательный (двойной) резонанс

Схема последовательно-параллельного соединения (рис. 10)

С учетом теоремы 1 $\underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2$.

С учетом теоремы 3 $\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2$.

С учетом (17) скорость штока $\dot{V} = \underline{y} \dot{F}$.

Пример 7. Отличие от примера 5 состоит в том, что элементы соединены последовательно-параллельно.

$$\underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2 = 1/(12,207e^{i55^\circ}) = 8,192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} (\kappa z^{-1} \cdot c),$$

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = 15,135 \cdot 10^{-2} e^{i19,29^\circ} + 8,192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} = 19,061 \cdot 10^{-2} e^{-i5,126^\circ} (\kappa z^{-1} \cdot c),$$

$$\dot{V} = \dot{F} \underline{y} = 100 \cdot 19,061 \cdot 10^{-2} e^{-i5,126^\circ} = 19,061 e^{-i5,126^\circ} (m \cdot c^{-1}),$$

$$\dot{V}_2 = \dot{F} \underline{y}_2 = 100 \cdot 8,192 \cdot 10^{-2} e^{-i55^\circ} = 8,192 e^{-i55^\circ} (m \cdot c^{-1}),$$

$$-\dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 15,135 e^{i19,29^\circ} + 8,192 e^{-i55^\circ} = 19,061 e^{-i5,126^\circ} (m \cdot c^{-1}) = \dot{V}.$$

Данным примера 7 соответствует векторная диаграмма на рис. 11.

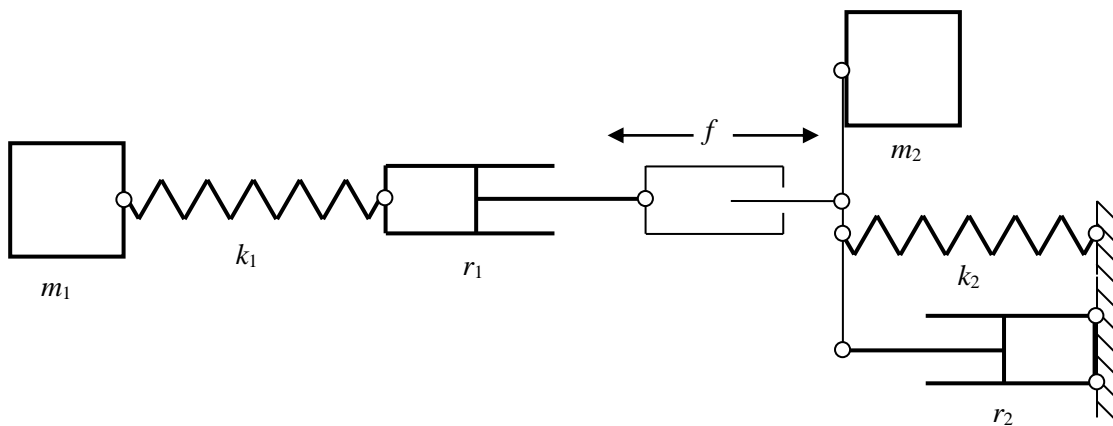


Рис. 10. Схема последовательно-параллельного соединения

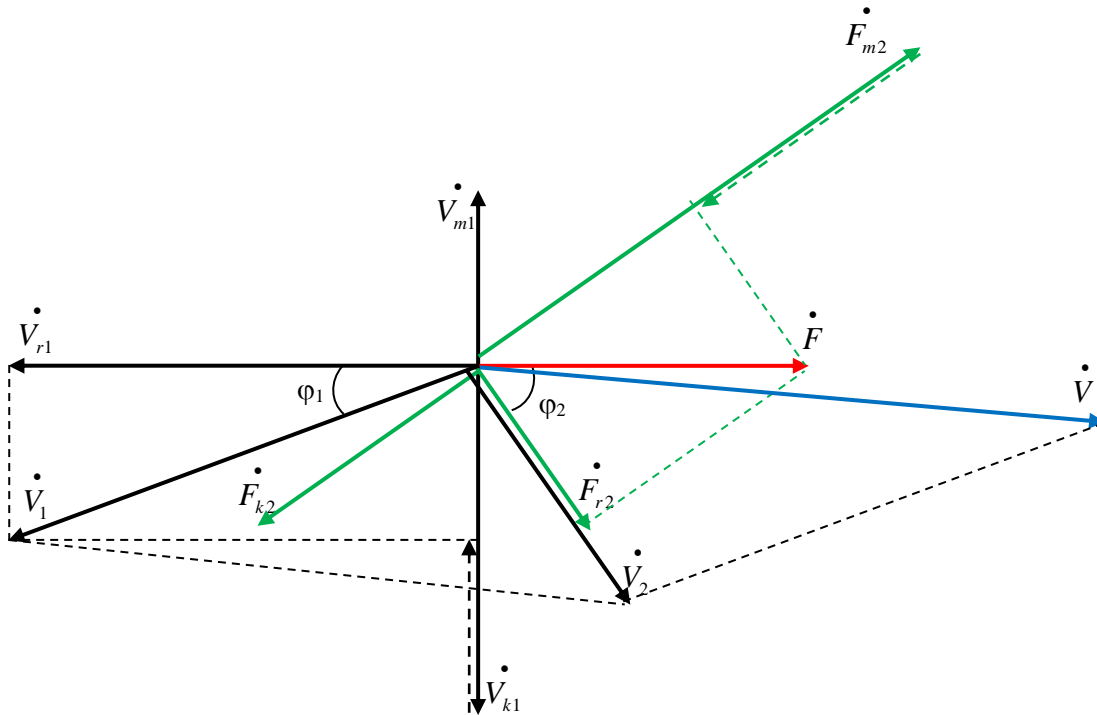


Рис. 11. Последовательно-параллельное соединение

Пример 8. Для последовательно-параллельного (двойного) резонанса отличие от примера 6 состоит в том, что элементы соединены последовательно-параллельно.

$$\begin{aligned} \underline{y}_1 &= 1/\underline{z}_1 = g_1 = \underline{y}_2 = 1/\underline{z}_2 = g_2 = \\ &= 1/(12,207e^{i55^\circ}) = 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} \text{ (}\kappa\text{z}^{-1} \cdot \text{c)}, \\ \underline{y} &= \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = 2 \cdot 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} = \\ &= 28,571 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} \text{ (}\kappa\text{z}^{-1} \cdot \text{c)}, \\ \dot{V} &= \dot{F} \underline{y} = 100 \cdot 28,571 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} = \\ &= 28,571 e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{c}^{-1}\text{)}, \\ \dot{V} &= -\dot{V}_1 + \dot{V}_2, \\ -\dot{V}_1 &= -\dot{F} \underline{y}_1 = \dot{V}_2 = \dot{F} \underline{y}_2 = \\ &= 100 \cdot 14,286 \cdot 10^{-2} e^{i0^\circ} = 14,286 e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{c}^{-1}\text{)}, \\ -\dot{V}_{m1} &= \underline{b}_{m1} \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{-i90^\circ} \cdot 100 e^{i0^\circ} = \\ &= 5 e^{-i90^\circ} \text{ (м} \cdot \text{c}^{-1}\text{)}, \\ -\dot{V}_{k1} &= \underline{b}_{k1} \dot{F} = 5 \cdot 10^{-2} e^{i90^\circ} \cdot 100 e^{i0^\circ} = \\ &= 5 e^{i90^\circ} \text{ (м} \cdot \text{c}^{-1}\text{)}, \\ -\dot{V}_{r1} &= -g_1 \dot{F} = 14,286 \cdot 10^{-2} \cdot 100 e^{i0^\circ} = \\ &= 14,286 e^{i0^\circ} \text{ (м} \cdot \text{c}^{-1}\text{)}, \\ \dot{F}_{m2} &= \underline{x}_{m2} \dot{V}_2 = 20 e^{i90^\circ} \cdot 14,286 e^{i0^\circ} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 285,714 e^{i90^\circ} \text{ (Н)}, \\ \dot{F}_{k2} &= \underline{x}_{k2} \dot{V}_2 = 20 e^{-i90^\circ} \cdot 14,286 e^{i0^\circ} = \\ &= 285,714 e^{-i90^\circ} \text{ (Н)}, \\ \dot{F}_{r2} &= \dot{F}_2 = \dot{F} = r_2 \dot{V}_2 = \\ &= 7 e^{i0} \cdot 14,286 e^{i0^\circ} = 100 e^{i0^\circ} \text{ (Н)}. \end{aligned}$$

Данным примера 8 соответствует векторная диаграмма на рис. 12.

Характер реактивности импеданса

Если $\dot{F} = F e^{i0}$,

$$\underline{z} = r + \underline{x}_m = \sqrt{r^2 + x_m^2} e^{i \arctg \frac{x_m}{r}} = z e^{i\varphi},$$

то
$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{F e^{i0}}{z e^{i\varphi}} = \frac{F}{z} e^{-i\varphi}.$$

Пример 9. При тех же количественных значениях, что и выше,

$$\begin{aligned} \underline{z} &= \sqrt{r^2 + x_m^2} e^{i \arctg \frac{x_m}{r}} = \\ &= \sqrt{7^2 + 20^2} e^{i \arctg \frac{20}{7}} \approx 21,19 e^{i70,71^\circ} \text{ (}\kappa\text{z} \cdot \text{c}^{-1}\text{)}, \\ \dot{V} &= \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100 e^{i0}}{21,19 e^{i70,71^\circ}} \approx 4,719 e^{-i70,71^\circ} \text{ (м} \cdot \text{c}^{-1}\text{)}. \end{aligned}$$

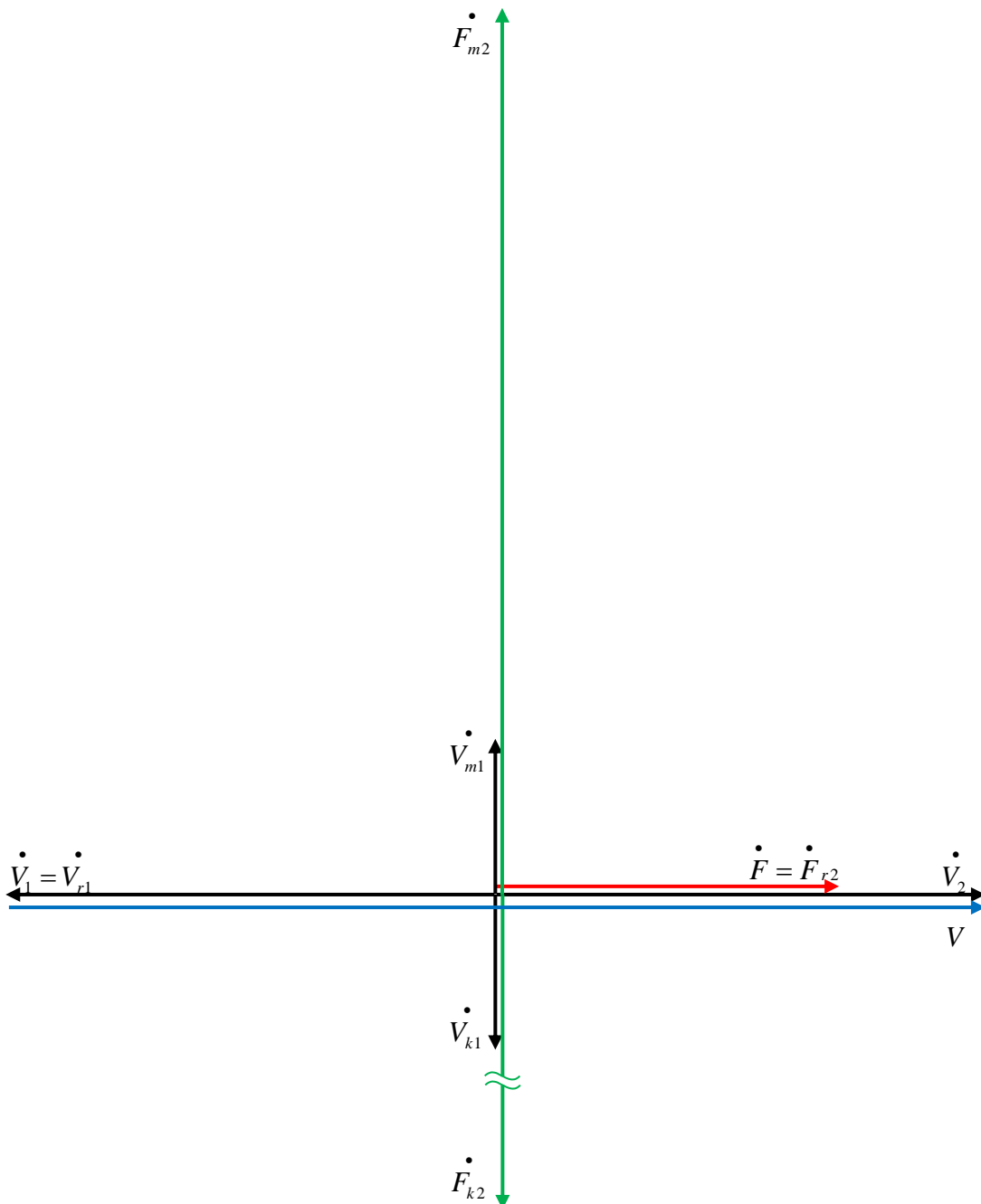


Рис. 12. Последовательно-параллельный (двойной) резонанс

Данным примера 9 соответствует векторная диаграмма на рис. 13.



Рис. 13. "Инертный" импеданс

Пусть теперь

$$\underline{z} = r + \underline{x}_k = \sqrt{r^2 + x_k^2} e^{i \arctg \frac{x_k}{r}} = z e^{i\varphi}.$$

Пример 10. При тех же количественных значениях, что и выше,

$$\begin{aligned} \underline{z} &= \sqrt{r^2 + x_k^2} e^{i \arctg \frac{x_k}{r}} = \\ &= \sqrt{7^2 + 10^2} e^{i \arctg \frac{10}{7}} \approx 12,207 e^{-i55^\circ} \text{ (к}\Omega \cdot \text{с}^{-1}\text{)}, \end{aligned}$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \frac{100 e^{i0}}{12,207 e^{-i55^\circ}} \approx 8,192 e^{i55^\circ} \text{ (м}\cdot\text{с}^{-1}\text{)}.$$

Данным примера 10 соответствует векторная диаграмма на рис. 14.

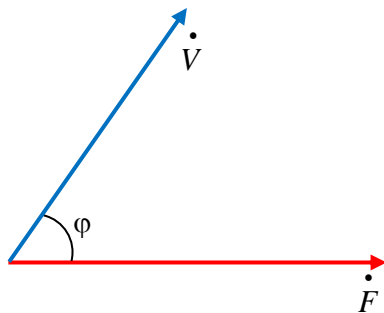


Рис. 14. "Упругий" импеданс

Из примеров 9 и 10 вытекает доказанная этими примерами

Теорема 5. Если сила опережает скорость по фазе, то нагрузка инертная, если отстает, то – упругая. Если фазы силы и скорости совпадают, то – резистивная (активная).

Замечание. При $\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k$ и $\underline{x}_m < \underline{x}_k$ импеданс "упругий". При $\underline{x}_m > \underline{x}_k$ импеданс "инертный".

Теорема 6. Если $\underline{x}_m \neq \underline{x}_k$, то реактивный характер импеданса изменяется на противоположный при замене схемы соединения элементов (с последовательного на параллельное или наоборот).

Доказательство. Если $\underline{x}_m > \underline{x}_k$ и соединение параллельное, то

$$\underline{x} = \underline{x}_m + \underline{x}_k = \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

С учетом замечания к теореме 5 импеданс является "инертным", при этом фаза $i\pi/2 > 0$.

Если эти же элементы соединить последовательно, то

$$\underline{b} = \underline{b}_k + \underline{b}_m = \left(\frac{\omega}{k} - \frac{1}{\omega m} \right) e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{\omega m - k/\omega}{km} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

С учетом следствия из теоремы 1

$$\underline{x} = \frac{1}{\underline{b}} = \frac{km}{\omega m - k/\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Фаза поменяла знак ($-i\pi/2 < 0$).

Другими словами, импеданс стал "упругим".

Очевидно, что при $\underline{x}_m < \underline{x}_k$ дело обстоит точно так же.

Теорема доказана.

Заключение

Использование символического (комплексного) описания механических систем - при вынужденных гармонических колебаниях (в установившемся режиме) позволило отказаться от чрезвычайно громоздкого и трудоемкого алгоритма расчета, связанного с решением дифференциальных уравнений и заменить его простыми и наглядными алгебраическими операциями. Благодаря этому время расчетов уменьшается в разы.

Для рассмотренных разветвленных механических схем классические методы, основанные на решении дифференциальных уравнений второго порядка, многократно усложняются и требуют решения систем уравнений, которые сводятся к дифференциальным уравнениям более высоких порядков.

Использование символического (комплексного) описания механических процессов и систем позволяет применять вместо этого простые и компактные алгебраические методы, трудоемкость которых меньше в десятки раз.

Векторные диаграммы, не являясь необходимой составляющей исследования механических систем, имеют существенное методическое значение, поскольку показывают количественные и фазные соотношения между параметрами систем.

Список литературы

1. *Роров И.Р.* Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76. Iss. 4. P. 393–395. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.005.
2. *Попов И.П.* Дифференциальные уравнения двух механических резонансов // Прикладная физика и математика. 2019. № 2. С. 37–40. DOI: 10.25791/pfim.02.2019.599.
3. *Повышение энергоэффективности приводов решетных сортировальных вибромашин / И.П. Попов, С.С. Родионов, В.И. Мошкин.* Курган: Изд-во Курганского государственного университета, 2019. 154 с. ISBN 978-5-4217-0519-2.
4. *Попов И.П.* Мультиинертный осциллятор // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. № 1(48). С. 60–64. DOI: 10.17072/1993-0550-2020-1-60-64.
5. *Попов И.П.* Моделирование биинертного осциллятора // Приложение математики в экономических и технических исследова-

- ниях: сб. науч. тр. / под общ. ред. В.С. Мхитаряна. Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2017. С. 188–192.
6. Попов И.П. Инертная колебательная система из двух грузов для вибрационных механизмов // Вестник Вологодского государственного университета. 2020. №2(8). С. 10–12.
 7. Попов И.П. Инертные реактансы вибрационных машин // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. 2019. Т. 17, № 4. С.52–55. <https://doi.org/10.18503/1995-2732-2019-17-4-52-55>.
 8. Попов И.П. Механические аналоги реактивной мощности // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2015. № 3(30). С. 37–39.
 9. Попов И.П. Условно-ортогональные механические мощности // Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России. 2019. № 4(144). С. 15–17.
 10. Попов И.П. Резонансы сил и скоростей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. №4(47). С. 62–66. DOI: 10.17072/1993-0550-2019-4-62-66.

Complex concepts for calculation of mechanical systems in harmonic processes

I. P. Popov

Kurgan State University; 106-52, Tomina st., Kurgan, 640002, Russia
ip.popov@yandex.ru; 8-905-85-28-121

It is noted that the traditional calculation of mechanisms for forced vibrations is often a difficult task. Most often, calculators are interested in steady-state modes of oscillation. The aim of the work is to significantly simplify calculations by replacing the need to solve differential equations with algebraic methods. This approach is widely used in electrical engineering. The use of a symbolic (complex) description of mechanical systems with forced harmonic oscillations (in a steady state) made it possible to abandon the extremely cumbersome and laborious calculation algorithm associated with solving differential equations and replace it with simple and visual algebraic operations. Thanks to this, the calculation time is reduced significantly. Vector diagrams, while not being a necessary component of the study of mechanical systems, have significant methodological significance, since they show quantitative and phase relationships between the parameters of systems.

Keywords: *consumers of mechanical power; forced vibrations; parallel; series connection; resonance of forces; resonance of speeds.*