

УДК 519.2

Численно-аналитическая схема расчета моментных характеристик вектора состояния стохастической дифференциально-разностной системы

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

В работе рассматривается численно-аналитическая схема вычисления моментных функций случайного векторного процесса, являющегося решением системы стохастическое обыкновенное дифференциально-разностное уравнение (СОДРУ). Схема состоит из нескольких подходов и включает адаптированное сочетание метода шагов и расширения пространства состояний системы СОДРУ, превращающее немарковский векторный процесс в цепочку марковских, процедуру построения расчетных формул для получения значений моментных функций для векторов состояния увеличивающейся размерности на заданной сетке и алгоритм пересчета начальных условий по шагам для указанных функций.

Ключевые слова: динамическая система; стохастическое обыкновенное дифференциально-разностное уравнение; постоянное запаздывание; моделирование.

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-3-56-65

Введение

Многие технические, природные и экономические системы обладают свойством последствия, заключающемся в том, что будущие состояния зависят не только от настоящего, но и от прошлого. Уже давно установлено, что наличие последствия необходимо учитывать в моделях механических, физических, химических, биологических и других систем, при решении задач теории управления, медицины, атомной энергии, теории информации и т.д. Такое широкое распространение последствия является основанием считать его универсальным свойством

окружающего мира. А вследствие того, что в связи с растущим спросом на более точные прогнозы, управление и производительность существует большая потребность в том, чтобы используемые модели как можно точнее описывали поведение реальных систем, естественен вывод о необходимости учета фактора запаздывания в имеющихся и разрабатываемых моделях различных процессов.

Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения (СОДУ) с постоянным запаздыванием и, в частности, дифференциально-разностные уравнения (СОДРУ), являются обобщениями и детерминистических уравнений с постоянным запаздыванием, и стохастических обыкновен-

ных дифференциальных уравнений (СОДУ) [1–4].

В настоящее время существует немало областей исследований, которые связаны с поиском статистических характеристик случайных процессов, являющихся решениями стохастических функционально-дифференциальных уравнений (СФДУ), подклассом которых являются СОДУ. Но получение таких решений затруднено. Поэтому актуальной задачей является разработка эффективных как прямых (получение траекторий решений), так и косвенных (вероятностных характеристик) приближенных численных алгоритмов анализа систем СФДУ.

К настоящему времени разработан достаточно широкий класс методов решения детерминированных ФДУ, а также их программных реализаций, которые включают и процедуры из математических пакетов *Maple*, *Matlab* и *Mathematica*. На основе этих процедур и методов численного решения СОДУ [5–9] интенсивно развиваются приближенные алгоритмы прямого численного интегрирования СФДУ различных классов [10–12] в связке с процедурами статистического моделирования (метод Монте-Карло, ММК) [13, 14] и др. Например, целью построения численных интеграторов для СОДУ, СОДРУ и других классов стохастических уравнений [5, 9] является вычисление (после дискретизации этих уравнений) с использованием ММК сеточных представлений $\{\hat{\mathbf{x}}_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) множества реализаций $\mathbf{x}(t)$ вектора состояния системы в узлах сетки, которые служат для оценки вероятностных характеристик вектора $\mathbf{X}(t)$ на основе методов математической и прикладной статистики.

Но различные алгоритмы, предназначенные для численного интегрирования даже простейших СДРУ, как правило, весьма сложны [15] и предназначены только для решения достаточно узких классов задач. При этом даже алгоритм основного метода – широко известной схемы Эйлера–Маруямы с постоянным шагом, приводящий к значительным объемам расчетов, существенно сложнее своего аналога, предназначенного для анализа СОДУ без запаздывания [16].

Отметим также следующие методы и их модификации: итерации Пикара [17]; метод многих масштабов [18]; использование рядов Тейлора [19]; слабую схему Эйлера [11]; неявный метод Эйлера дробных шагов [20]; полунеявный метод Эйлера [21]; явный и неявный сильные методы Эйлера порядка 0.5, явный и неявный сильные методы аппроксимации Тейлора порядка 1.0 [12]; явные слабые схемы второго порядка [22]; двухшаговый метод Муруямы [23]; многошаговые методы Маруямы [24]; сильную схему Мильштейна порядка 1 [25]; метод предиктор–корректор [26]; метод полудискретизации [27]; θ -метод Мильштейна дробных шагов [28]; двухэтапный метод Рунге–Кутты [29]; стабилизированные ортогональные явные методы Рунге–Кутты–Чебышёва (RKC–SROCK) с расширенными среднеквадратичными областями устойчивости, пригодные для решения жестких задач [30]; методы Хойна и балансировки [31]; схему предиктор–корректор, средней точки и схему, подобную методу Мильштейна, которая получена на основе аппроксимации Вонга–Закаи (Wong–Zakai) как промежуточного шага [32]; *theta*-методы [33]; спектральные коллокации на основе полиномов Чебышёва [34] и Лежандра [35]; аппроксимации решений СОДУсЗ в виде GARCH-моделей временных рядов [36] и др.

В работе рассматривается численно-аналитическая схема вычисления моментных функций случайного векторного процесса $\mathbf{X}(t)$, являющегося решением системы СОДРУ. Схема состоит из нескольких подсхем и включает адаптированное сочетание метода шагов и расширения пространства состояний системы СОДРУ, превращающее немарковский векторный процесс в цепочку марковских, процедуру построения расчетных формул для получения значений моментных функций для векторов состояния увеличивающейся размерности на заданной сетке и алгоритм пересчета начальных условий по шагам для указанных функций.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему СОДРУ в смысле Стратоновича следующего вида:

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t - \tau), t) dt +$$

$$+ \mathcal{G}(\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t - \tau), t) \circ d\mathbf{W}(t),$$

$$t_0 + \tau = t_1 < t \leq T < +\infty, \quad (1.1)$$

где t – время, t_0 и T – начальное и конечное время, $t_0 < T < +\infty$; $\tau > 0$ – постоянное запаздывание; $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ – векторный случайный процесс, представляющий состояние системы. Начальное условие $\mathbf{X}^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_n^0)$ – гильбертов случайный вектор, распределенный согласно плотности вероятности $p^0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Его вектором математических ожиданий, ковариационной матрицей и центральными моментами являются соответственно $\mathbf{m}_X^0 = \mathbb{E}[\mathbf{X}^0]$, $\mathcal{K}_{XX}^0 = \mathbb{E}[(\mathbf{X}^0 - \mathbf{m}_X^0)(\mathbf{X}^0 - \mathbf{m}_X^0)^\top]$ и $\mu_{X\alpha}^0 = \mathbb{E}[(X^0 - m_X^0)^\alpha]$ ($|\alpha| > 2$, $r = n$); α (β , γ) – мультииндекс:

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}, \quad \beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\},$$

$$k_1 \alpha + k_2 \beta = \{k_1 \alpha_1 + k_2 \beta_1,$$

$$k_1 \alpha_2 + k_2 \beta_2, \dots, k_1 \alpha_r + k_2 \beta_r\},$$

$$e_i = \{\delta_{ij}\}, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad e_{ij} = e_i + e_j,$$

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_r^{\alpha_r},$$

$$C_\alpha^\beta = C_{\alpha_1}^{\beta_1} C_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots C_{\alpha_r}^{\beta_r},$$

$$\sum_{\gamma=\beta}^\alpha h_\gamma = \sum_{\gamma_1=\beta_1}^{\alpha_1} \sum_{\gamma_2=\beta_2}^{\alpha_2} \dots \sum_{\gamma_r=\beta_r}^{\alpha_r} h_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_r},$$

$$|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_r,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; C_s^q – число сочетаний. Вход $\{\mathbf{W}(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t)), t \geq t_0\} \in \mathbb{R}^m$ – векторный стандартный винеровский случайный процесс, который состоит из независимых компонент и не зависит от \mathbf{X}^0 . Обобщенная производная от $\mathbf{W}(t)$ по t , обозначаемая $\{\dot{\mathbf{W}}(t) = (\dot{W}_1(t), \dot{W}_2(t), \dots, \dot{W}_m(t)), t \geq t_0\}$, – векторный гауссовский белый шум с независимыми компонентами, такой, что

$$\mathbb{E}[\dot{\mathbf{W}}(t)] = 0,$$

$$\mathbb{E}[\dot{\mathbf{W}}(t) \dot{\mathbf{W}}^\top(t')] = \mathcal{I}_m \delta_0(t - t').$$

$\mathbf{f}(\cdot, \cdot, \cdot) = \{f_i(\cdot, \cdot, \cdot)\} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$,
 $\mathcal{G}(\cdot, \cdot, \cdot) = \{g_{ij}(\cdot, \cdot, \cdot)\} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ – детерминированные векторная и матричная функции, дифференцируемые необходимое число раз по всем своим аргументам, соответственно.

Будем считать, что на отрезке $(t_0, t_1]$ вектор состояния $\mathbf{X}(t)$ удовлетворяет системе СОДУ без запаздывания:

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}_0(\mathbf{X}(t), t) dt +$$

$$+ \mathcal{G}_0(\mathbf{X}(t), t) \circ d\mathbf{W}(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{f}_0(\cdot, \cdot) = \{f_{0i}(\cdot, \cdot)\} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$,
 $\mathcal{G}_0(\cdot, \cdot) = \{g_{0ij}(\cdot, \cdot)\} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Вопрос о существовании и единственности сильных и слабых решений систем типа (1.1), (1.2) (в случае, когда на начальном множестве $[t_0, t_1]$ непосредственно задается вектор $\mathbf{X}(t)$) рассматривался в монографиях [2, 3].

Отметим, что во многих задачах случаи задания на начальном множестве $[t_0, t_0 + \tau]$ вектора состояния $\mathbf{X}(t)$ в виде $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^0$ или $\mathbf{X}(t) = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – заданная детерминированная векторная функция, можно привести к указанной выше схеме.

Принимая во внимание предыдущие определения и обозначения, можно констатировать, что проблема, решаемая ниже, заключается в построении схемы вычисления вектор-функции математических ожиданий $\mathbf{m}_X(t) \equiv \{m_{X_i}(t)\} = \mathbb{E}[\mathbf{X}(t)]$ и различных центральных моментных функций $\mu_{X\alpha}(t) = \mathbb{E}[\{X(t) - m_X(t)\}^\alpha]$, а в частности, матричной функции ковариаций

$$\mathcal{K}_{XX}(t) = \{\mathcal{K}_{ij}(t)\} \equiv \mathbb{E}[\dot{\mathbf{X}}(t) \dot{\mathbf{X}}^\top(t)],$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{m}_X(t),$$

для всех t из $(t_0, T]$.

2. Уравнения для плотностей вероятности расширенных векторов состояния

Для получения плотности вероятности $p(\mathbf{X}, t)$ при любом $t > t_0$ расширим пространство состояний исследуемой системы (сведя немарковский векторный процесс к марковскому) [37, 38]. Для этого введем следующие обозначения:

$$s \in [0, \tau], \quad t_q = t_0 + q\tau,$$

$$q = 0, 1, 2, \dots, N + 1, \quad t_{N+1} \geq T,$$

$$\Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \bar{\Delta}_q = [t_q, t_{q+1}], \quad s_q = t_q + s,$$

$$p_q(\mathbf{x}_q, s) = p_X(\mathbf{x}_q, s + t_q),$$

$$p_q(\mathbf{x}_q, 0) = p_{q-1}(\mathbf{x}_q, \tau), \quad p_0(\mathbf{x}, 0) = p_X^0(\mathbf{x}),$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{f}(\mathbf{X}_q(s), \mathbf{X}_{q-1}(s), s_q) = \\
 & \mathbf{f}(\mathbf{X}(s+t_q), \mathbf{X}(s+t_{q-1}), s+t_q), \\
 & \mathbf{X}_q(s) = \mathbf{X}(s+t_q), \quad \mathbf{X}_q(0) = \mathbf{X}_{q-1}(\tau), \\
 & \mathbf{Y}(s) = \mathbf{Y} \equiv \mathbf{X}^0, \\
 & \mathbf{W}_q(s) = \mathbf{W}(s+t_q), \quad \mathbf{W}_q(0) = \mathbf{W}_{q-1}(\tau), \\
 & \mathbf{V}_q(s) = \mathbf{V}(s+t_q), \quad \mathbf{V}_q(0) = \mathbf{V}_{q-1}(\tau), \\
 & \mathbf{Z}_0(s) = \text{col}(\mathbf{Y}(s), \mathbf{X}_0(s)), \\
 & \mathbf{Z}_1(s) = \text{col}(\mathbf{Y}(s), \mathbf{X}_0(s), \mathbf{X}_1(s)) \equiv \\
 & \text{col}(\mathbf{Z}_0(s), \mathbf{X}_1(s)), \\
 & \mathbf{Z}_2(s) = \text{col}(\mathbf{Z}_1(s), \mathbf{X}_2(s)), \quad \dots
 \end{aligned}$$

(см. рис. 1), причем $p_0(\mathbf{x}_0, 0) = p_X^0(\mathbf{x}_0)$, а равенство векторных случайных процессов понимается в смысле сходимости *почти наверное*, и построим цепочку уравнений типа ФПК для плотностей распределения векторов $\mathbf{Z}_0(s), \mathbf{Z}_1(s), \mathbf{Z}_2(s), \dots, \mathbf{Z}_N(s)$, принадлежащих семейству вложенных пространств состояния $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{3n} \subset \mathbb{R}^{3n} \subset \dots \subset \mathbb{R}^{n(N+2)}$. Цель построения такой цепочки – получить совместные статистические характеристики вектора состояния при различных значениях времени.

0°. Рассмотрим полуинтервал Δ_0 (рис. 1). Определенный на Δ_0 случайный векторный процесс $\mathbf{Z}_0(s)$ удовлетворяет системе СОДУ вида:

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{Y}(s) &= \mathbf{0} ds, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{X}^0, \\
 d\mathbf{X}_0(s) &= \mathbf{f}_0(\mathbf{X}_0(s), s_0) ds + \\
 &+ \mathcal{G}_0(\mathbf{X}_0(s), s_0) \circ d\mathbf{W}_0(s), \quad \mathbf{X}_0(0) = \mathbf{X}^0.
 \end{aligned}$$

Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнение) и начальное условие для одноточечной плотности распределения $p_{Z_0}(\mathbf{z}_0, s)$ расширенного вектора $\mathbf{Z}_0(s)$ имеют вид:

$$\frac{\partial p_{Z_0}}{\partial s} = \mathcal{L}_0[p_{Z_0}] \equiv \quad (2.1)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial^2 (b_{0ij} p_{Z_0})}{\partial z_{0i} \partial z_{0j}} - \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial (a_{0i} p_{Z_0})}{\partial z_{0i}},$$

$$p_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}, 0) = p^0(\mathbf{x}_0) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0), \quad (2.2)$$

где

$$a_{0i} = f_{0i}^+ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{2m} \frac{\partial g_{0ik}^+}{\partial z_{0j}} g_{0jk}^+,$$

$$b_{0ij} = \sum_{k=1}^{2m} g_{0ik}^+ g_{0jk}^+,$$

$$\mathbf{f}_0^+(\mathbf{z}_0, s) = \{\mathbf{f}_{0\ell}^+(\mathbf{z}_0, s)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n \\ \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0, s_0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_0^+(\mathbf{z}_0, s) &= \{\mathcal{g}_{0\ell k}^+(\mathbf{z}_0, s)\} = \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{O}_{n \times m} & \mathcal{G}_0(\mathbf{x}_0, s_0) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

При этом обозначим вектор коэффициентов сноса через $\mathbf{a}_0 = \{a_{0i}\}$, матрицу коэффициентов диффузии – через $\mathcal{B}_0 = \{b_{0ij}\}$ (подобные обозначения используются и далее), а искомая плотность вероятности $p(\mathbf{x}, t)$ при $t \in (t_0, t_1]$ будет равна $p_0(\mathbf{x}, t - t_0)$.

1°. Теперь обратимся к сегментам Δ_0 и Δ_1 . Систему СОДУ для вычисления вектора $\mathbf{Z}_1(s)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{Y}(s) &= \mathbf{0} ds, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{X}^0, \\
 d\mathbf{X}_0(s) &= \mathbf{f}_0(\mathbf{X}_0(s), s_0) ds + \\
 &+ \mathcal{G}_0(\mathbf{X}_0(s), s_0) \circ d\mathbf{W}_0(s), \quad \mathbf{X}_0(0) = \mathbf{X}^0, \\
 d\mathbf{X}_1(s) &= \mathbf{f}(\mathbf{X}_1(s), \mathbf{X}_0(s), s_1) ds + \\
 &+ \mathcal{G}(\mathbf{X}_1(s), \mathbf{X}_0(s), s_1) \circ d\mathbf{W}_1(s), \\
 \mathbf{X}_1(0) &= \mathbf{X}_0(\tau).
 \end{aligned}$$

Поэтому плотность вероятности $p_{Z_1}(\mathbf{z}_1, s)$ расширенного вектора состояния $\mathbf{Z}_1(s)$ будут удовлетворять ФПК-уравнению вида

$$\frac{\partial p_{Z_1}}{\partial s} = \mathcal{L}_1[p_{Z_1}] \equiv \quad (2.3)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3n} \frac{\partial^2 (b_{1ij} p_{Z_1})}{\partial z_{1i} \partial z_{1j}} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial (a_{1i} p_{Z_1})}{\partial z_{1i}},$$

$$\begin{aligned}
 p_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}, 0) &= \\
 &= p_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0, \tau) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0), \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{1i} &= f_{1i}^+ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n} \sum_{k=1}^{3m} \frac{\partial g_{1ik}^+}{\partial z_{1j}} g_{1jk}^+, \\
 b_{1ij} &= \sum_{k=1}^{3m} g_{1ik}^+ g_{1jk}^+,
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_1^+(\mathbf{z}_1, s) = \{\mathbf{f}_{1\ell}^+(\mathbf{z}_1, s)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0^+(\mathbf{z}_0, s) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0, s_1) \end{bmatrix},$$

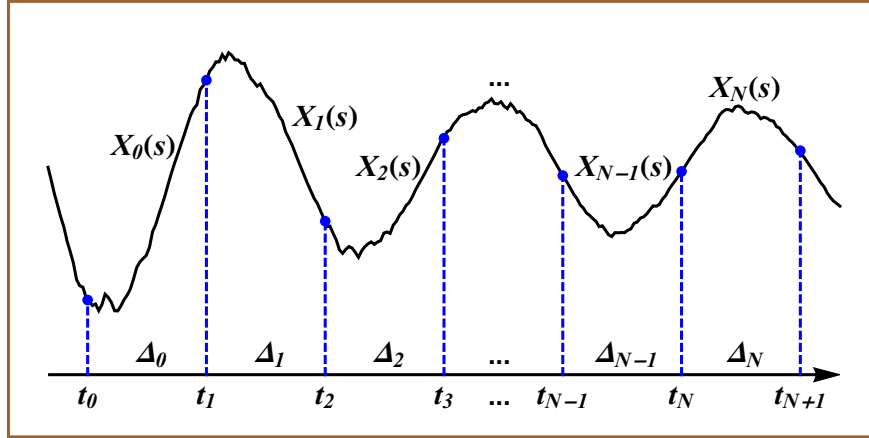


Рис. 1

$$\mathcal{G}_1^+(z_1, s) = \{g_{1\ell k}^+(z_1, s)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_0^+(z_0, s) & \mathbf{O}_{2n \times m} \\ \mathbf{O}_{n \times 2m} & \mathcal{G}(x_1, x_0, s_1) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n(N+2)} \frac{\partial^2 (b_{Nij} p_{Z_N})}{\partial z_{Ni} \partial z_{Nj}}, \quad (2.5)$$

После вычисления $p_1(x_1, x_0, y, s)$ плотность $p(x, t)$ при $t \in (t_1, t_2]$ можно будет определить по формуле

$$p(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} p_1(x, x_0, y, t - t_1) dx_0 dy.$$

№. Рассмотрим временные полуинтервалы $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$. Построим систему СОДУ для вектора $Z_N(s)$ в виде:

$$\begin{aligned} dY(s) &= \mathbf{0} ds, \quad Y(0) = X^0, \\ dX_0(s) &= f_0(X_0(s), s_0) ds + \mathcal{G}_0(X_0(s), s_0) \circ dW_0(s), \quad X_0(0) = X^0, \\ dX_1(s) &= f(X_1(s), X_0(s), s_1) ds + \mathcal{G}(X_1(s), X_0(s), s_1) \circ dW_1(s), \\ X_1(0) &= X_0(\tau) \\ &\dots \\ dX_N(s) &= f(X_N(s), X_{N-1}(s), s_N) ds + \mathcal{G}(X_N(s), X_{N-1}(s), s_N) \circ dW_N(s), \\ X_N(0) &= X_{N-1}(\tau). \end{aligned}$$

Для плотности распределения $p_{Z_N}(z_N, s)$ векторного СП $Z_N(s)$ можно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial p_{Z_N}}{\partial s} = \mathbb{L}_N[p_{Z_N}] \equiv - \sum_{i=1}^{n(N+2)} \frac{\partial (a_{Ni} p_{Z_N})}{\partial z_{Ni}} +$$

$$p_N(x_N, \dots, x_1, x_0, y, 0) = p_{N-1}(x_N, \dots, x_1, x_0, \tau) \delta(y - x_0). \quad (2.6)$$

В этом уравнении коэффициенты сноса и диффузии имеют вид:

$$a_{Ni} = f_{Ni}^+ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n(N+2)} \sum_{k=1}^{m(N+2)} \frac{\partial g_{Nik}^+}{\partial z_{Nj}} g_{Njk}^+,$$

$$b_{Nij}^+ = \sum_{k=1}^{m(N+2)} g_{Nik}^+ g_{Njk}^+,$$

$$f_N^+(z_N, s) = \{f_{N\ell}^+(z_N, s)\} = \begin{bmatrix} f_{N-1}^+(z_{N-1}, s) \\ f(x_N, x_{N-1}, s_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}_N^+(z_N, s) = \{g_{N\ell k}^+(z_N, s)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{N-1}^+(z_{N-1}, s) & \mathbf{O}_{n(N+1) \times m} \\ \mathbf{O}_{n \times m(N+1)} & \mathcal{G}(x_N, x_{N-1}, s_N) \end{bmatrix}.$$

После вычисления функции p_N находим значения искомой плотности на полуинтервале $(t_N, t_{N+1}]$ по формуле

$$p(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{Nn}} p_N(x, x_{N-1}, \dots, x_1, x_0, y, t - t_N) \times dx_{N-1} dx_1 dx_0 dy.$$

3. Построение расчетных формул

Для того чтобы получить расчетные формулы для моментных функций расширенных векторов состояния по этапам $0^*, 1^*$,

..., \mathbf{N}° , рассмотрим произвольный этап, а соответствующие величины будем обозначать чертой снизу. Тогда на этом этапе будем иметь расширенный вектор состояния $\underline{\mathbf{Z}}(s) = \{\underline{Z}_i(s)\} \in \mathbb{R}^r$, вектор функций математического ожидания $\underline{\mathbf{m}}_Z(s) = \{m_i(s)\} \equiv \mathbb{E}[\underline{\mathbf{Z}}(s)]$, центральные моменты $\underline{\mu}_\alpha(s)$, матрицу функций ковариации $\underline{\mathbf{K}}_{ZZ}(s) = \{K_{ij}(s)\}$, начальный вектор $\underline{\mathbf{Z}}^0 = (\underline{Z}_1^0, \underline{Z}_2^0, \dots, \underline{Z}_r^0)$ и его моменты: центральные $\underline{\mu}_\alpha^0$, функции математического ожидания $\underline{\mathbf{m}}_Z^0 = \{m_i^0\} \equiv \mathbb{E}[\underline{\mathbf{Z}}^0]$ и ковариации $\underline{\mathbf{K}}_{ZZ}^0 = \{K_{ij}^0\}$. ФПК-уравнение и начальное условие для плотности распределения $\underline{p}(\underline{\mathbf{z}}, s)$ вектора $\underline{\mathbf{Z}}(s)$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{p}}{\partial s} &= \underline{\mathbb{L}}_{z,s}[\underline{p}] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2 (b_{ij} \underline{p})}{\partial z_i \partial z_j} - \sum_{i=1}^r \frac{\partial (a_i \underline{p})}{\partial z_i}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\underline{p}(\underline{\mathbf{z}}, 0) = \underline{p}^0(\underline{\mathbf{z}}), \quad (3.2)$$

где a_i и b_{ij} – коэффициенты сноса и диффузии, вычисляемые по формулам Стратоновича.

Применим обобщенный метод интегратора [39, 40], который позволяет приближенно анализировать нелинейные системы со случайным входом, не предполагая, что распределение вектора состояния близко к совместному гауссовскому распределению.

А именно, для построения формальной аппроксимации решения ФПК-уравнения (3.1) воспользуемся какой-нибудь численной схемой для решения ОДУ по временной переменной, например классической схемой Рунге–Кутты четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{p}}_{\ell+1} &= \tilde{\underline{p}}_\ell + \frac{h_\ell}{6} (k_{\ell 1} + 2k_{\ell 2} + 2k_{\ell 3} + k_{\ell 4}), \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots, L-1, \end{aligned}$$

где h_ℓ – шаг сетки,

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{L-1} < \tau_L = \tau,$$

$$h_\ell = \tau_\ell - \tau_{\ell-1}, \quad \ell = 1, 2, \dots, L,$$

$$\max_\ell h_\ell = h_* \ll 1,$$

$\tilde{\underline{p}}_\ell$ – аппроксимация $\underline{p}(\underline{\mathbf{z}}, s)$ при $s = \tau_\ell$, $\tilde{\underline{p}}_0 = \underline{p}^0(\underline{\mathbf{z}})$,

$$k_{\ell 1} = \underline{\mathbb{L}}_{z,\tau_\ell}[\tilde{\underline{p}}_\ell] \equiv \underline{\mathbb{L}}_\ell^+[\tilde{\underline{p}}_\ell],$$

$$\begin{aligned} k_{\ell 2} &= \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^+ \left[\tilde{\underline{p}}_\ell + \frac{h_\ell}{2} k_{\ell 1} \right] \equiv \\ &\equiv \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^+[\tilde{\underline{p}}_\ell] + \frac{h_\ell}{2} \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^+ \underline{\mathbb{L}}_\ell^+[\tilde{\underline{p}}_\ell], \\ k_{\ell 3} &= \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^+ \left[\tilde{\underline{p}}_\ell + \frac{h_\ell}{2} k_{\ell 2} \right] \equiv \\ &\equiv \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^+[\tilde{\underline{p}}_\ell] + \frac{h_\ell}{2} \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+2}[\tilde{\underline{p}}_\ell] + \\ &+ \frac{h_\ell^2}{4} \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^+ \underline{\mathbb{L}}_\ell^+[\tilde{\underline{p}}_\ell], \\ k_{\ell 4} &= \underline{\mathbb{L}}_{\ell+1}^+[\tilde{\underline{p}}_\ell + h_\ell k_{\ell 3}] \equiv \\ &\equiv \underline{\mathbb{L}}_{\ell+1}^+[\tilde{\underline{p}}_\ell] + h_\ell \underline{\mathbb{L}}_{\ell+1}^+ \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^+[\tilde{\underline{p}}_\ell] + \\ &+ \frac{h_\ell^2}{2} \underline{\mathbb{L}}_{\ell+1}^+ \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+2}[\tilde{\underline{p}}_\ell] + \frac{h_\ell^3}{4} \underline{\mathbb{L}}_{\ell+1}^+ \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+2} \underline{\mathbb{L}}_\ell^+[\tilde{\underline{p}}_\ell]. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$\tilde{\underline{p}}_{\ell+1} = \tilde{\underline{\mathbb{L}}}_\ell[\tilde{\underline{p}}_\ell], \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\mathbb{L}}}_\ell &= \underline{\mathbb{L}} + \frac{h_\ell}{6} \left[(\underline{\mathbb{L}}_\ell^+ + 4\underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^+ + \underline{\mathbb{L}}_{\ell+1}^+) + \right. \\ &+ h_\ell (\underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^+ \underline{\mathbb{L}}_\ell^+ + \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+2} + \underline{\mathbb{L}}_{\ell+1}^+ \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^+) + \\ &+ \frac{h_\ell^2}{2} (\underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+2} \underline{\mathbb{L}}_\ell^+ + \underline{\mathbb{L}}_{\ell+1}^+ \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+2}) + \\ &\left. + \frac{h_\ell^3}{4} \underline{\mathbb{L}}_{\ell+1}^+ \underline{\mathbb{L}}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+2} \underline{\mathbb{L}}_\ell^+ \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее воспользуемся соотношением (3.3) для определения математического ожидания некоторой функции $\phi(\underline{\mathbf{Z}}(\tau_{\ell+1}))$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(\underline{\mathbf{Z}}(\tau_{\ell+1}))] &\equiv \int_{\mathbb{R}^r} \phi(\underline{\mathbf{z}}) \underline{p}(\underline{\mathbf{z}}, \tau_{\ell+1}) d\underline{\mathbf{z}} \approx \\ &\approx \tilde{\mathbb{E}}[\phi(\underline{\mathbf{Z}}(\tau_{\ell+1}))] \equiv \int_{\mathbb{R}^r} \phi(\underline{\mathbf{z}}) \tilde{\underline{p}}_{\ell+1} d\underline{\mathbf{z}} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^r} \phi(\underline{\mathbf{z}}) \tilde{\underline{\mathbb{L}}}_\ell[\tilde{\underline{p}}_\ell] d\underline{\mathbf{z}} = \int_{\mathbb{R}^r} \tilde{\underline{p}}_\ell \tilde{\underline{\mathbb{L}}}_\ell^*[\phi(\underline{\mathbf{z}})] d\underline{\mathbf{z}} = \\ &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\tilde{\underline{\mathbb{L}}}_\ell^*[\phi(\underline{\mathbf{z}})] \Big|_{\underline{\mathbf{z}}=\underline{\mathbf{Z}}(\tau_{\ell+1})} \right], \end{aligned}$$

где $\tilde{\underline{\mathbb{L}}}_\ell^*$ – оператор, сопряженный к $\tilde{\underline{\mathbb{L}}}_\ell$. Заметим, что этот оператор формируется из операторов $\underline{\mathbb{L}}_\ell^*$ вида

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{L}}_\ell^* &\equiv \underline{\mathbb{L}}_{z,\tau_\ell}^*[\cdot] = \quad (3.5) \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 [\cdot]}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial [\cdot]}{\partial x_i} \right\} \Big|_{s=\tau_\ell} \end{aligned}$$

и имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{L}}_\ell^* = & \mathbb{I} + \frac{h_\ell}{6} \left[(\mathbb{L}_\ell^{+*} + 4\mathbb{L}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+*} + \mathbb{L}_{\ell+1}^{+*}) + \right. \\ & + h_\ell (\mathbb{L}_\ell^{+*} \mathbb{L}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+*} + \mathbb{L}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+*2} + \mathbb{L}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+*} \mathbb{L}_{\ell+1}^{+*}) + \\ & + \frac{h_\ell^2}{2} (\mathbb{L}_\ell^{+*} \mathbb{L}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+*2} + \mathbb{L}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+*2} \mathbb{L}_{\ell+1}^{+*}) + \\ & \left. + \frac{h_\ell^3}{4} \mathbb{L}_\ell^{+*} \mathbb{L}_{\ell+\frac{1}{2}}^{+*2} \mathbb{L}_{\ell+1}^{+*} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если коэффициенты ФПК-уравнения не зависят от времени, то вид оператора $\tilde{\mathbb{L}}_\ell^* \equiv \tilde{\mathbb{L}}^*$ будет следующим:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{L}}^* = & \mathbb{I} + \frac{h_k}{1!} \mathbb{L}^* + \\ & + \frac{h_\ell^2}{2!} \mathbb{L}^{*2} + \frac{h_\ell^3}{3!} \mathbb{L}^{*3} + \frac{h_\ell^4}{4!} \mathbb{L}^{*4}. \end{aligned}$$

Подставляя переменные \underline{z}_i , требуемые для получения необходимых центральных моментов набор произведений $(z - \underline{m}_{\ell+1})^\alpha$, где $1 < |\alpha| \leq M$, α – мультииндекс, вместо функции $\phi(\underline{z})$ получаем соотношения для вычисления функций математического ожидания:

$$\underline{m}_{\ell+1,i} = \tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{\mathbb{L}}_\ell^* [\underline{z}_i] \Big|_{\underline{z}=\underline{Z}(\tau_{\ell+1})} \right] \quad (3.7)$$

и центральных моментов:

$$\begin{aligned} \mu_{\ell+1,\alpha} = & \\ = & \tilde{\mathbb{E}} \left[\tilde{\mathbb{L}}_\ell^* [(z - \underline{m}_{\ell+1})^\alpha] \Big|_{\underline{z}=\underline{Z}(\tau_{\ell+1})} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для получения замкнутых приближенных расчетных формул необходимо разложить выражения в квадратных скобках предыдущих равенств в ряды Тейлора в точке $\tilde{\underline{m}}_\ell$ и оставить члены со степенями не выше N , что позволит выразить требуемые моменты вектора \mathbf{x} при $s = \tau_{\ell+1}$ через центральные моменты этого же вектора при $s = \tau_\ell$ [41].

Построить расчетные формулы при реализации метода можно с помощью какой-либо из современных компьютерных систем аналитических вычислений. В процессе такого построения с целью сокращения длинных выкладок желательно параллельно получать соотношения сразу для всех необходимых моментов.

4. Начальные условия по шагам

Используя соотношения (3.7), (3.8), в принципе можно вычислить значения искомым статистических характеристик на выбранной сетке, но для получения замкнутых расчетных формул еще необходимы величины этих характеристик при $s = 0$ по шагам.

0°. Рассмотрим полуинтервал Δ_0 и сравним структуры уравнений (3.1), (3.2) и (2.1) (2.2). Заключаем, что для $r = 2n$ эти системы подобны. Зафиксируем начальные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{Z_0}(0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{m}_{X_0}(\tau) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{K}_{Z_0 Z_0}(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{XX}^0 \\ \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{XX}^0 \end{bmatrix} \\ \mu_{Z_0 \alpha_0}(0) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} [z_0 - \mathbf{m}_{Z_0}(0)]^{\alpha_0} p_{Z_0}(z_0, 0) dz_0 \equiv \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^{2n}} (x_0 - m^0)^{\alpha_{X_0}} (y - m^0)^{\alpha_Y} \times \\ &\quad \times p^0(\mathbf{x}_0) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (x_0 - m^0)^{\alpha_{X_0} + \alpha_Y} p^0(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 = \mu_{X, \alpha_{X_0} + \alpha_Y}^0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \langle \alpha_{X_0}, \alpha_Y \rangle \equiv \\ &\equiv \{ \alpha_{X_0 1}, \alpha_{X_0 2}, \dots, \alpha_{X_0 n}, \alpha_{Y 1}, \alpha_{Y 2}, \dots, \alpha_{Y n} \}, \\ &\text{– мультииндекс } (|\alpha_0| > 2). \end{aligned}$$

1°. Теперь обратимся к сегментам Δ_0 и Δ_1 и сравним структуры уравнений (3.1), (3.2) и (2.3) (2.4), которые для $r = 3n$ будут подобны. Определяем начальные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{Z_1}(0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{m}_{X_0}(\tau) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{K}_{Z_1 Z_1}(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) \\ \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) \\ \mathcal{K}_{X_0 Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0 Y}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0 X_0}(\tau) \end{bmatrix}, \\ \mu_{Z_1 \alpha_1}(0) &= \int_{\mathbb{R}^{3n}} [z_1 - \mathbf{m}_{Z_1}(0)]^{\alpha_1} p_{Z_1}(z_1, 0) dz_1 \equiv \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^{3n}} [x_1 - \mathbf{m}_{X_0}(\tau)]^{\alpha_{X_1}} (x_0 - m^0)^{\alpha_{X_0}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (y - m^0)^{\alpha_Y} p_{Z_0}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0, \tau) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_1 \times \\ & \quad \times d\mathbf{x}_0 d\mathbf{y} = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} [x_1 - m_{X_0}(\tau)]^{\alpha_1} (x_0 - m^0)^{\alpha_{X_0} + \alpha_Y} \times \\ & \quad \times p_{Z_0}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0, \tau) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_0 = \\ & = \mu_{Z_0, \langle \alpha_{X_1}, \alpha_{X_0} + \alpha_Y \rangle}(\tau), \end{aligned}$$

где

$$\alpha_1 = \langle \alpha_{X_1}, \alpha_{X_0}, \alpha_Y \rangle \equiv \{ \alpha_{X_{11}}, \dots, \alpha_{X_{1n}}, \alpha_{X_{01}}, \dots, \alpha_{X_{0n}}, \alpha_{Y_1}, \dots, \alpha_{Y_n} \}.$$

... ..

N°. На последнем шаге рассматриваются промежутки времени $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$ сравним структуры уравнений (3.1), (3.2) и (2.5) (2.6), которые для $r = n(N + 2)$ будут подобны. Используем начальные условия:

$$\begin{aligned} m_{Z_N}(0) &= \begin{bmatrix} m_{Z_{N-1}}(0) \\ m_{X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{K}_{Z_N Z_N}(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{Z_{N-1} Z_{N-1}}(0) & \mathcal{K}_{N12} \\ \mathcal{K}_{N21} & \mathcal{K}_{X_{N-1} X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{K}_{N12} &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{Y X_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}_{Y X_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{K}_{X_0 X_{N-1}}(\tau) \\ \dots \\ \mathcal{K}_{X_{N-21} X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{K}_{N21} &= [\mathcal{K}_{X_{N-1} Y}(\tau) \quad \mathcal{K}_{X_{N-1} Y}(\tau) \\ & \quad \mathcal{K}_{X_{N-1} X_0}(\tau) \quad \dots \quad \mathcal{K}_{X_{N-1} X_{N-2}}(\tau)], \\ \mu_{Z_N \alpha_N}(0) &= \int_{\mathbb{R}^{n(N+2)}} [z_N - m_{Z_N}(0)]^{\alpha_N} \times \\ & \quad \times p_{Z_N}(z_N, 0) dz_N \equiv \\ & \equiv \int_{\mathbb{R}^{n(N+2)}} [x_N - m_{X_{N-1}}(\tau)]^{\alpha_{X_N}} \dots \\ & \quad \dots [x_1 - m_{X_0}(\tau)]^{\alpha_{X_1}} (x_0 - m^0)^{\alpha_{X_0}} \times \\ & \quad \times (y - m^0)^{\alpha_Y} p_{Z_{N-1}}(\mathbf{x}_{N-1}, \dots, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0, \tau) \times \\ & \quad \times \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_{N-1} \dots d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_0 d\mathbf{y} = \\ & = \int_{\mathbb{R}^{n(N+2)}} [x_N - m_{X_{N-1}}(\tau)]^{\alpha_{X_N}} \dots \\ & \quad \dots [x_1 - m_{X_0}(\tau)]^{\alpha_{X_1}} (x_0 - m^0)^{\alpha_{X_0} + \alpha_Y} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times p_{Z_{N-1}}(\mathbf{x}_{N-1}, \dots, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0, \tau) d\mathbf{x}_{N-1} \dots d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_0 = \\ & = \mu_{Z_{N-1}, \langle \alpha_{X_N}, \dots, \alpha_{X_1}, \alpha_{X_0} + \alpha_Y \rangle}(\tau), \end{aligned}$$

где

$$\alpha_N = \langle \alpha_{X_N}, \dots, \alpha_{X_1}, \alpha_{X_0}, \alpha_Y \rangle.$$

Заключение

Рассмотренный численно-аналитический алгоритм может применяться как с постоянным, так и с автоматически выбираемым шагом.

Список литературы

1. Рубаник В.П. Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. Мн.: Изд-во "Университетское", 1985. 143 с.
2. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.
3. Mao X. Stochastic differential equations and applications. 2nd ed. Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011. xviii, 422 p.
4. Mohammed S.E.A. Stochastic functional differential equations. Boston, London: Pitman Publishing, 1984. ix, 245 p.
5. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. 4-е изд. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. xxx, 786 с.
6. Kloeden P.E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer, 1992. xxxvi, 636 p.
7. Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. Numerical solution of SDE through computer experiments. Berlin: Springer, 2003. xiv, 292 p.
8. Milstein G.N., Tretyakov M.V. Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xix, 594 p.
9. Platen E., Bruti-Liberati N. Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance. Berlin: Springer, 2010. xxviii, 856 p.
10. Buckwar E. Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations // J. of Comput. and Appl. Math. 2000. Vol. 125, № 1-2. P. 297-307.
11. Buckwar E., Kuske R., Mohammed S.-E. et al. Weak convergence of the Euler scheme for stochastic differential delay equations // London Math. Society J. of Comput. and Math. 2008. Vol. 11. P. 60-99.

12. *Küchler U., Platen E.* Strong discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay // *Math. and Computers in Simulation*. 2000. Vol. 54, № 1–3. P. 189–205.
13. *Кельтон В., Лоу А.* Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. СПб.: Питер; К.: BHV, 2004. 847 с.
14. *Allen E.* Modeling with Itô stochastic differential equations. Dordrecht: Springer, 2007. xii, 230 p.
15. *Baker C.T.H., Buckwar E.* Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations // *MCCM Numerical Analysis Report*. Manchester University, 2000. № 345 (revised). 25 p.
16. *Baker C.T.H., Buchwar E.* Exponential stability in p -th mean of solutions, and of convergent Euler-type solutions, of stochastic delay differential equations // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2005. Vol. 184, № 2. P. 404–427.
17. *Kim Y.-H.* An estimate of the solutions for stochastic functional differential equations // *J. of Appl. Math. & Informatics*. 2011. Vol. 29, № 5–6. P. 1549–1556.
18. *Saha N., Bandyopadhyay M.* Multiple scale analysis of a delayed predator–prey model within random environment // *J. of Appl. Math. & Informatics*. 2008. Vol. 26, № 5–6. P. 1191–1205.
19. *Milošević M.* On the approximations of solutions to stochastic differential delay equations with Poisson random measure via Taylor series // *Filomat*. 2013. Vol. 27, № 1. P. 201–214.
20. *Zhang H., Gan S., Hu L.* The split-step backward Euler method for linear stochastic delay differential equations // *J. of Comput. and Appl. Maths*. 2009. Vol. 225, № 2. P. 558–568.
21. *Wang W., Chen Y.* Mean-square stability of semi-implicit Euler method for nonlinear neutral stochastic delay differential equations // *Applied Numerical Mathematics*. 2011. Vol. 61, № 5. P. 696–701.
22. *Küchler U., Platen E.* Weak discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay // *Math. and Computers in Simulation*. 2002. Vol. 59, № 6. P. 497–507.
23. *Cao W., Zhang Z.* On exponential mean-square stability of two-step Maruyama methods for stochastic delay differential equations // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2013. Vol. 245. P. 182–193.
24. *Buckwar E., Winkler R.* Multi-step Maruyama methods for stochastic delay differential equations // *Stochastic Anal. and Appl.* 2007. Vol. 25, № 5. P. 933–959.
25. *Hu Y., Mohammed S.-E.A., Yan A.* Discrete-time approximations of stochastic delay equations: The Milstein scheme // *The Annals of Probability*. 2004. Vol. 32, № 1A. P. 265–314.
26. *Niu Yu., Zhang Ch., Duan J.* Strong predictor–corrector approximation for stochastic delay differential equations // *J. of Comput. Math.* 2015. Vol. 33, № 6. P. 587–605.
27. *Sun J.Q.* Stochastic dynamics and control. Oxford, UK: Elsevier Science, 2006. xvi, 410 p.
28. *Guo Q., Tao X., Xie W.* A split-step θ -Milstein method for linear stochastic delay differential equations // *J. of Information & Comput. Science* 2013. Vol. 10, № 5. P. 1261–1273.
29. *Rosli M., Bahar A., Yeak S.H. et al.* 2-stage stochastic Runge–Kutta for stochastic delay differential equations // *AIP Conf. Proc.* 2015. Vol. 1660. P. 050006-1–050006-9.
30. *Komori Y., Eremin A., Burrage K.* S-ROCK methods for stochastic delay differential equations with one fixed delay // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2019. Vol. 353. P. 345–354.
31. *Zhu X., Peng H.* T-Stability of the Heun method and balanced method for solving stochastic differential delay equations // *J. of Appl. Math.* 2014. Vol. 2014. Article ID 545830. 10 p.
32. *Cao W., Zhang Z., Karniadakis G.E.* Numerical methods for stochastic delay differential equations via the Wong–Zakai approximation // *SIAM J. on Scientific Computing*. 2015. Vol. 37, № 1. P. A295–A318.4
33. *Huang C.* Mean square stability and dissipativity of two classes of theta methods for systems of stochastic delay differential equations // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2014. Vol. 259. P. 77–86.
34. *Yin Z., Gan S.* Chebyshev spectral collocation method for stochastic delay differential equations // *Advances in Difference Equations*. 2015. № 1. Article ID 113. P. 1–12.
35. *Ernst Ph.A., Soleymani F.* A Legendre-based computational method for solving a class of Ito stochastic delay differential equations // *Numerical Algorithms*. 2019. Vol. 80, № 4. P. 1267–1282.
36. *Lorenz R.* Weak approximation of stochastic delay differential equations with bounded memory by discrete time series. Diss. ... doctor rerum naturalium im Fach Mathematik. Berlin: Humboldt–Universität, 2006. 121 S.
37. *Полосков И.Е.* Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // *Автоматика и телемеханика*. 2002. № 9. С. 58–73.

38. Полосков И.Е. Методы анализа систем с запаздыванием. Пермь: Издат. центр ПГНИУ, 2020. 19 Мб; 900 с.
39. Полосков И.Е. Обобщенный метод интегратора и его применение для анализа линейных стохастических систем с мультипликативными возмущениями // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 1999. Вып. 31. С. 132–145.
40. Полосков И.Е. Стохастический анализ динамических систем: монография. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.
41. Полосков И.Е. О соотношениях, связывающих кумулянты с центральными моментами // В печати.

Numerical-analytical scheme for calculating the moment characteristics of the state vector of a stochastic differential-difference system

I. E. Poloskov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
polosk@psu.ru; (342) 239 65 60

The paper is devoted to numerical-analytical scheme for calculating the moment functions of a random vector process that is a solution of the system of stochastic ordinary differential-difference equation (SODRE). The scheme consists of several subschemes and includes the adapted combination of the method of steps and expansion of the state space of the SODRE system, which transforms a non-Markov vector process into a chain of the Markov processes, a procedure for constructing calculation formulae for obtaining values of moment functions for state vectors with increasing dimension on a given grid, and an algorithm for recalculating the initial conditions step by step for the specified functions.

Keywords: *dynamic system; stochastic ordinary differential-difference equation; constant delay; modeling.*