УДК 531.381:531.395

Интеграл Гриоли для уравнений движения сложной механической системы

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Получен критерий существования первого интеграла системы уравнений движения в поле силы тяжести механического объекта переменного состава массы и изменяемой геометрии масс. Интеграл является обобщенным аналогом классического интеграла Д. Гриоли, построенного для структурно неизменяемого твердого тела.

Ключевые слова: *сложная механическая система; интеграл Гриоли; критерий существования первого интеграла; управляющая связь.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-3-41-49

Введение

Понятие первого дополнительного интеграла системы уравнений движения твердого тела применялось Е. Уиттекером [1] и Г. Джакалья [2]. В классических задачах динамики твердого тела с неподвижной точкой [3] независимый четвертый интеграл системы уравнений движения, если он существует, наряду с интегралами энергии, кинетического момента, тривиальным, когда четвертый интеграл находится с ними в инволюции, называется *дополнительным* по отношению к трем упомянутым. Согласно теореме Бура–Лиувилля [4] существование этого интеграла позволяет отнести данную систему уравнений к *вполне интегрируемым* системам, обладающим полным набором независимых интегралов, находящихся в инволюции [5].

Вопрос о существовании дополнительных интегралов уравнений движения механических объектов переменного состава массы и изменяемой конфигурации масс с наложенными на них управляющими связями составляет мало исследованную область аналитической динамики.

В связи с этим являются актуальными постановка и исследование задачи о нахождении условий существования и свойств дополнительных первых алгебраических интегралов уравнений движения механических систем. Решение этой задачи сводится к нахождению структурно-динамических и других программнозаданных ограничений, обусловливающих существование данных интегралов.

Согласно известному результату А. Пуанкаре динамическая система (в общем случае) не интегрируема [6]. Однако это утверждение относится только к существованию однозначного (относительно некоторого параметра) интеграла. В силу этого для данной динамической системы могут существовать первые интегралы для отдельных значений параметров и для определенных начальных условий. Помимо этого, в отдельных и специальных случаях могут иметь место и непрерывные интегралы [2, с. 84].

Исходя из этой предпосылки следует ожидать, что дополнительные интегралы для заданных уравнений движения могут существовать в некотором классе структурно-динамических ограничений на заданном подмножестве начальных значений определяющих параметров системы. При этом ограничения, наложенные на структурно-динамические параметры системы, являются *управляющими связями*, реализация которых обусловливает выполнение определенных свойств движения и существование дополнительных интегралов уравнений состояния механического объекта.

Движение объекта, для которого существует дополнительный интеграл, может рассматриваться как движение, обладающее определенными заданными свойствами в классе его возможных движений [7, с. 126].

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании первого независимого дополнительного интеграла системы уравнений движения при структурных ограничениях, аналогичных конфигурационным условиям для неизменяемого твердого тела в классической задаче Гриоли [8].

1. Основные предпосылки

Под *сложной механической системой* (СМС) понимается динамически изменяемый механический объект, структурная модель которого предполагает непрерывное изменение во времени состава массы и (или) его конфигурации, явно задаваемые предварительно построенной для $t \in [0, +\infty) \equiv T$ управляющей программой. Эта программа определяет для $t \in T$ множество структурно-динамических параметров системы (в том числе и управляющих) так, что система ее динамических уравнений аналитически замкнута относительно компонент вектора угловой скорости ее *основного тела* (*базы* K_0). Под базой K_0 понимается неизменяемое абсолютно твердое тело постоянной массы и неизменяемой конфигурации ее распределения.

1.1. Структурная модель объекта

Рассмотрим детерминированную модель данного механического объекта, учитывающую принятые выше предпосылки.

Механическая система K составлена из неизменяемого (в смысле неизменности величины и геометрии массы) абсолютно твердого тела K_0 (*тела-носителя*) и структурно изменяемой подсистемы K_1 (*рабочего тела*). Величина массы подсистемы K_1 и ее геометрия масс (*конфигурация*) могут непрерывно изменяться со временем. В силу этого система $K = K_0 \cup K_1$ является объектом с изменяемой во времени структурой массы и ее геометрии.

В подсистеме K_1 перенос рабочего тела относительно носителя K_0 совершается путем его циркуляции в области D такой, что $K_1 \subset D$, и выноса (конвекции) массы за пределы области D с программно заданной по t относительно K_0 скоростью. Изменение структуры массы системы K реализуется заданием для $t \in T$ определенной предварительно заданной управляющей программой. Данная структурная схема основана на предпосылках к структурным моделям, построенным в работах М.Ш. Аминова [9] и И.Ф. Верещагина [10].

Механизм массопереноса компонент массы подсистемы K_1 относительно базы K_0 и условия его реализации составляют основу *структурной модели* динамически изменяемого объекта K. Этот перенос определяется заданием *полной внутренней программы* (термин работы [10]) в виде упорядоченной системы явно заданных для $t \in T$ гладких функций времени. Эта система является иерархическим четырехуровневым программным массивом, полностью и однозначно определяющим изменение во времени величины массы и конфигурации механической системы K.

Механический объект K, идентифицированный с данной *структурной моделью*, является *сложной механической системой* [11].

1.2. Динамическая модель объекта

Предполагается, что СМС движется так, что ее неизменяемая основа (база K_0) вращается вокруг неподвижного полюса O в однородном параллельном поле силы тяжести под воздействием заданного результирующего силового момента $\mathbf{L}(t)$ $(t \in T)$.

Введем правые координатные ортобазисы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ с общим началом в полюсе O: неподвижный Γ_1; базис Γ_2, неизменно связанный с носителем, и базис Γ_3 $(Ox_1x_2x_3)$, оси Ox_j $(j = 1, 2, 3)$ которого для каждого момента времени $t \in T$ направлены по главным в полюсе O осям тензора инерции СМС с матрицей $\mathrm{J}(t) = \mathrm{diag}[A_1(t), A_2(t), A_3(t)]$. В силу непрерывного по $t \in T$ изменения конфигурации и состава массы СМС базис Γ_3 в общем случае вращается относительно Γ_2 с угловой скоростью ω^r (ω_j^r), зависимость которой от величин заданных компонент A_j (t) тензора инерции СМС $\mathbf{J}(t)$ известна [12].

Таким образом, непрерывные и непрерывно дифференцируемые зависимости вида $\boldsymbol{\omega}^r(t)$, $\mathbf{J}(t)$, отнесенные к базису Γ_3, считаются *программно заданными* и, следовательно, известными в любой момент времени $t \in T$.

Рассмотрим движение СМС под действием *квазиреактивных сил*, обусловленных переносом рабочего тела из некоторой области D, принадлежащей объекту, с программно заданной абсолютной скоростью **u** (t). Главный момент этих сил относительно полюса O для $t \in [0,+\infty) \equiv T$ определяется равенством

$$\mathrm{L}\ (t) = \int_S \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathrm{r} \times \mathrm{u})dV\ , \qquad (1)$$

Здесь $\rho(t, \mathbf{r})$ – локальная плотность массы в области S; $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ – абсолютная скорость переноса точечных масс рабочего тела из области D; $\mathbf{r}(t, \mathbf{r})$ – радиус-вектор точки области.

Обозначим

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}^r, \quad \boldsymbol{\lambda}\ (t) = \boldsymbol{\omega}^r - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^r, \quad (2)$$
$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^r = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda},$$
$$m_1(t) = A_2^{-1}(t) - A_3^{-1}(t) \qquad (1,\ 2,\ 3),$$

где $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$ – абсолютные угловые скорости носителя СМС (базиса Γ_2) и базиса Γ_3; $\mathbf{G}\ (G_j)$, $\mathbf{G}^r(t)$ – кинетические моменты относительно полюса O всего объекта и рабочего тела, соответственно (последний − относительно базиса Γ_2); $\lambda\ (t)$ − эффективная угловая скорость тела K_0; $A_j\ (t)\ (j = 1, 2, 3)$ − главные осевые моменты инерции СМС, заданные для каждого $t \in T$ в осях базиса Γ_3. Характерные вектор-параметры $\mathbf{L}(t), \mathbf{G}^r(t)$ являются *управляющими* [12]; каждый из них задан программой, определенной во времени. Любые ограничения, налагаемые на заданные управляющие параметры, являются *управляющими связями.* Здесь и далее символ (1, 2, 3) обозначает циклическую перестановку величин с индексами 1, 2, 3.

Пусть M (t) – величина массы СМС; g – стандартное значение величины ускорения силы тяжести; $P = Mg$; **s** (s_1, s_2, s_3) – орт, неизменно связанный с базисом Γ_1 такой, что $\mathbf{P} = -P\mathbf{s}$; $\mathbf{r}_C(t), r_j(t)$ – радиус-вектор центра тяжести объекта K и его координаты в проекциях на оси базиса Γ_3 (j = 1, 2, 3).

Движение СМС при данных предпосылках характеризуется системой уравнений типа Жуковского–Пуассона [13]

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{G} = \mathbf{L} + P(\mathbf{s} \times \mathbf{r}_C), \\ &\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{s} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{s} = 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

где **L** (L_1, L_2, L_3) определяется равенством (1); $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – характерный вектор, определяемый равенством (2).

Уравнения (3) в проекциях на главные в полюсе O оси инерции объекта K, определяемые базисом Γ_3, принимают вид [14]

$$\dot{G}_1 + m_1 G_2 G_3 + \lambda_2 G_3 - \lambda_3 G_2 = L_1 + P(r_3 s_2 - r_2 s_3),$$
$$\dot{s}_1 + (A_2^{-1} G_2 + \lambda_2) s_3 - (A_3^{-1} G_3 + \lambda_3) s_2 = 0, \quad (4)$$
$$(1,\ 2,\ 3).$$

Система уравнений (4) обладает первыми алгебраическими интегралами

$$\|\mathbf{s}\|^2 = 1, \qquad (\mathbf{s} \bullet \mathbf{G}) = H, \qquad (5)$$

причем последний интеграл (5) существует для $t \in T$ на управляющей связи **L** (t) ≡ 0.

2. Постановка задачи

Введем структурно-конфигурационные условия, выполняющиеся для любых $t \in T$

$$r_1\sqrt{A_2 - A_3} - r_3\sqrt{A_1 - A_2} = 0, \qquad (6)$$
$$r_2(t) \equiv 0. \qquad (7)$$

Эти условия характеризуют *обобщенный аналог классического случая Гриоли*, существующего для структурно неизменяемого твердого тела [8]. При этом ограничение (7) реализуется при выполнении условия стабилизации центра масс СМС по координате r_2 относительно базиса Γ_3 [14].

Согласно условиям (6), (7) центр масс СМС расположен на нормали, проведенной из полюса O к одному из круговых сечений эллипсоида инерции, соответствующего этому полюсу.

Поставим задачу: на многообразии возможных значений $W(\mathbf{G}, \mathbf{s})$ при ограничениях (6), (7) и $\mathbf{L}\ (t) \equiv 0$ найти условия существования независимого алгебраического первого интеграла $I(\mathbf{G}, \mathbf{s}) \in \mathrm{C}^2$ динамической системы (4), определенного в области **E** (**G**, **s**) фазового пространства и находящегося в инволюции с интегралами (5). □

Данная задача может быть решена как задача нахождения части интегрального многообразия заданной динамической системы при поставленных ограничениях.

3. Обобщенный аналог интеграла Гриоли

Положим $n_i = A_i^{-1} r_i \quad (i = 1, 2, 3)$,

$$n = \sqrt{n_1^2 + n_3^2} \neq 0 \qquad (8)$$

и, согласно ограничению (6), примем условие

$$(A_2 - A_3)(A_1 - A_2) > 0,$$

представленное для дальнейшего в виде

$$m_1 m_3 > 0. \qquad (9)$$

Введем соотношение

$$F(t) \equiv n_1 G_1 + n_3 G_3 = h, \qquad (10)$$

где h − произвольная постоянная, и представим конфигурационное условие (6) в форме

$$D(t) \equiv A_1 m_1 n_1^2 - A_3 m_3 n_3^2 = 0. \qquad (11)$$

Здесь величины m_1, m_3 должны удовлетворять ограничению (9), а n_1, n_3 − условию (8).

Обозначим

$$k_3 = Pr_3, \quad K = m_1 n_1^2 - m_3 n_3^2, \qquad (12)$$
$$\Phi_3 = (n_1 \lambda_3 - n_3 \lambda_1)\, n_1 - h m_3 n_3$$

и докажем следующее предложение.

Утверждение 1. Если равенство (10) является первым интегралом системы уравнений (4) для значений $t \in T$, то имеют место структурно-динамические условия (7),

$$n_1 L_1 + n_3 L_3 + h n_1^{-1}(\dot{n}_1 + \lambda_2 n_3) = 0, \qquad (13)$$

$$n_1 \dot{n}_3 - \dot{n}_1 n_3 - \lambda_2 n^2 = 0, \qquad (14)$$

а также соотношение связи

$$A_1 n_1^2 m_2 k_3 s_2 = (\Phi_3 - K G_3) G_2, \qquad (15)$$

справедливое для всех значений $t \in T$.

Доказательство. Пусть равенство (10) − первый интеграл подсистемы динамических уравнений (4). Тогда, принимая для определенности $n_1 \neq 0$ (что принимается и всюду далее) согласно условию (8), найдем величину $\dot{F}(t)$ в силу уравнений (4). В результате получим равенство, из которого исключим величину G_1, выраженную из соотношения (10). Это равенство, рассматриваемое как ограничение, выполняется тождественно при условиях (7), (13), (14) и при наличии соотношения связи (15), определенного для любых значений $t \in T$. □

Докажем предложение, обратное утверждению 1.

Утверждение 2. Если для $t \in T$ выполняются структурно-динамические условия (7), (13), (14), а также соотношение связи (15), то равенство (10) является первым интегралом системы уравнений (4).

Доказательство. Составим линейную комбинацию вида $n_1 \dot{G}_1 + n_3 \dot{G}_3$ и найдем ее выражение в силу подсистемы динамических уравнений (4), выделив в нем величины $F, \dot{F}$ согласно равенству (10). Применяя очевидное тождество

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0,$$

и соотношения (7), (13)−(15), в результате получаем уравнение

$$(F - h)^{\cdot} + Q(F - h) = 0, \qquad (16)$$

где обозначено

$$Q(t, G_2) = n_1^{-1}[m_3 n_3 G_2 - (\dot{n}_1 + \lambda_2 n_3)].$$

Из уравнения (16) следует

$$F - h = (F^0 - h)\exp\left[-\int_0^t Q(\tau, G_2)\, d\tau\right], \text{ (A)}$$

причем $F^0 = F(0)$. Отсюда, применяя очевидное условие $F^0 = h$, заключаем, что равенство (10) является первым интегралом динамической подсистемы уравнений (4).

Замечание. Наряду с определяющими условиями (13), (14) и соотношением связи (15) аналогичным образом можно получить альтернативные структурно-динамические соотношения, одно из которых совпадает с равенством (14), а другое при $n_3 \neq 0$, имеет вид

$$n_1 L_1 + n_3 L_3 + h n_3^{-1}(\dot{n}_3 - \lambda_2 n_1) = 0, \qquad (17)$$

симметричный выражению (13). При этом соотношение связи, альтернативное равенству (15), будет

$$A_3 n_3^2 m_2 k_1 s_2 = (\Phi_1 + K G_1) G_2. \qquad (18)$$

Здесь обозначено

$$k_1 = Pr_1, \ \ \Phi_1 = (n_1 \lambda_3 - n_3 \lambda_1) n_3 - h m_1 n_1.$$

4. Сравнительный анализ определяющих условий и соотношений связи

Сравним между собой два вида полученных определяющих условий и соотношений связи, заданных выражениями (13)−(15) и (14), (17), (18), соответственно.

Определяющие условия (13), (17) идентичны в силу условия (14) при любом значении h, а соотношения связи (15), (18) эквивалентны согласно интегралу (10). Объединяя между собой соотношения (15), (18), в результате при $A_1 \neq A_3$ получим

$$A_3 n_3 m_2 k_1 n^2 s_2 = [\Phi + K(n_3 G_1 - n_1 G_3)]G_2 \ , \quad (19)$$

где обозначено

$$\Phi(t) = n_1 \Phi_3 + n_3 \Phi_1 =$$
$$= (n_1 \lambda_3 - n_3 \lambda_1) n^2 + h m_2 n_1 n_3 .$$

В некоторых специальных случаях вид соотношения (19) может быть упрощен. Это, в частности, относится к случаю, при котором эффективный кинетический момент тела K_0 , равный $\mathbf{J}\boldsymbol{\lambda}$, коллинеарен барицентрическому вектору СМС, что выражается условием

$$n_1 \lambda_3 - n_3 \lambda_1 = 0$$

или, при $t \in T$,

$$(G_1^r - A_1 \omega_1^r) r_3 - (G_3^r - A_3 \omega_3^r) r_1 = 0 .$$

Данное ограничение является структурно-динамической (программной управляющей) связью, обусловленной заданным изменением во времени массового состава и конфигурации системы. На этой управляющей связи соотношение (19) приводится к одной из следующих форм

$$n^2 k_{2k+1} s_2 = [h A_{k+3}^{-1} n_{2k+1} +$$
$$+ m_{k+3} n_{k+3} (n_1 G_3 - n_3 G_1)] G_2 \quad (k = 0, 1).$$

Здесь и всюду далее все индексы при указанных величинах не должны превосходить значения $r = 3$, что в ином случае достигается вычитанием числа $r = 3$ из значения данного индекса.

Обозначим

$$F_{2k+1}(t) = (A_{k+3} n_{k+3}^2 m_2)^{-1} \Phi_{2k+1} + \lambda_{2k+1}$$
$$(k = 0, 1),$$
$$G_* = G_1 + i G_3 , \quad F_*(t) = F_1 + i F_3 ,$$
$$L_*(t) = L_1 + i L_3$$

и введем уравнение

$$\dot{G}_* - i \lambda_2 G_* + i F_* G_2 = L_* , \quad (20)$$

в котором i − мнимая единица; индекс $*$ относится к комплексной величине.

Докажем следующее предложение.

Утверждение 3. Для того, чтобы равенство (10) являлось первым интегралом комплексного уравнения (20), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись определяющие условия (13), (14) и

$$h D(t) = 0 \qquad (t \in T), \quad (21)$$

где величина D определяется равенством (11).

Доказательство. Необходимость. В силу интеграла (10) и уравнения (20) получаем определяющие условия (13), (14), а также соотношение

$$n_1 F_3 - n_3 F_1 = 0 \qquad (t \in T), \quad (22)$$

эквивалентное ограничению (21), что и доказывает необходимость.

Достаточность. Если выполняются определяющие условия (13), (14) и ограничение (21), то в силу уравнения (20) получаем соотношение типа (A) из утверждения 2, в котором

$$Q(t) = -(\dot{n}_1 + \lambda_2 n_3) n_1^{-1}.$$

Поскольку $F^0 = h$, где F определяется равенством (10), то отсюда непосредственно следует первый интеграл вида (10), что и доказывает достаточность.

***Следствие* 1.** Если игнорировать нулевой уровень интеграла Гриоли (10) ($h \neq 0$), то из соотношения (21) следует структурное условие (11). Таким образом, комплексное уравнение (20) при условиях (13), (14) имеет первый интеграл (10) либо в случае выполнения соотношения (11), либо при выполнении ограничения $h = 0$. □

Обозначим

$$N_k(t) = m_k + (A_k n_k^2 m_2)^{-1} K \quad (k = 1, 3),$$
$$Z_*(t; G_1, G_3) = N_1 G_3 + i N_3 G_1$$

и рассмотрим подсистему динамических уравнений (4), из которых исключим величину s_2, заменив ее выражениями (15), (18) с учетом условия (7). В результате получим уравнение

$$\dot{G}_* - i \lambda_2 G_* + (Z_* + i F_*) G_2 = L_* . \quad (23)$$

Комплексные уравнения (20), (23) идентичны при выполнении структурных ограничений

$$N_1(t) = N_3(t) \equiv 0 \qquad (t \in T), \quad (24)$$

в силу которых $Z_*(t; G_1, G_3) \equiv 0$.

***Следствие* 2.** Комплексное уравнение (23) имеет первый интеграл (10) тогда и только тогда, когда выполняются структурно-динамические условия (13), (14); при этом для значений $t \in T$ имеют место тождества

$$\begin{gathered} n_1 F_3 - n_3 F_1 - h n_1^{-1} n_3 N_3 = 0, \\ N_1 n_1^2 - N_3 n_3^2 = 0, \end{gathered} \quad (25)$$

адекватные соотношениям связи (15), (18). □

Отметим, что при $h = 0$ или при выполнении условий (24) соотношения (22), (25) совпадают.

Введем вектор $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$, обозначим

$$P_1 = (\mathbf{r}_C \cdot \dot{\mathbf{G}}) = r_1 \dot{G}_1 + r_3 \dot{G}_3,$$
$$P_2 = (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{G}}) = n_1 \dot{G}_1 + n_3 \dot{G}_3$$

и с учетом ограничения (7) докажем следующее предложение.

Утверждение 4. Если подсистема динамических уравнений (4) имеет первый интеграл (10), то ее подсистема уравнений, соответствующих значениям j = 1, 3, эквивалентна комплексному уравнению (20). При этом структурное условие (11) эквивалентно системе соотношений связи (15), (18).

Доказательство. Составим определяющую систему уравнений, соответствующую уравнению (23), образуем величину P_1 и вычислим ее в силу уравнений составленной системы, условия (7) и интеграла (10). К полученному соотношению присоединим равенство, найденное путем дифференцирования по t соотношения (10), и содержащее комбинацию вида P_2.

Выражая из данной системы величины $\dot{G}_1, \dot{G}_3$ при $A_1 \neq A_3,\ r_1 r_3 \neq 0,$ получим систему двух уравнений, линейную относительно G_1, G_3 и не содержащую переменных s_j. Сопоставляя полученную систему с уравнением (23), заключаем, что эти уравнения идентичны в силу условий (13), (14) тогда и только тогда, когда выполняются условия (24). Вместе с тем, выполнение условий (24) согласно соотношениям (25) приводит к структурному условию (11). □

5. Свойства движения системы с интегралом Гриоли

Рассмотрим некоторые свойства СМС, находящейся в режиме ограничений (13), (14) при соотношении связи (15).

Обозначим

$$\sigma(t) = \int_0^t \lambda_2(\tau)\, d\tau \qquad (t \in T), \tag{26}$$

где λ_2 − управляющий параметр. Имеет место следующее предложение.

Утверждение 5. Динамическая система с первым интегралом (10) и управляющим параметром (26) при условиях $nn_1 \neq 0,\ A_1 \neq A_2$ подчиняется структурным ограничениям

$$\frac{n_3}{n_1} = \sqrt{\frac{A_1 m_1}{A_3 m_3}} = \mathrm{tg}\,(\beta + \sigma) \quad (t \in T), \tag{27}$$

где β − аддитивная постоянная, определяемая условием

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{n_3^0}{n_1^0} \quad \left(n_1^0 = n_1(0),\ n_3^0 = n_3(0)\right). \ \square$$

Доказательство первого равенства (27) непосредственно следует из условий (6), (7), а второго − из соотношения (14).

Следствие (*из утверждения* 1). Динамическая система с первым интегралом (10) при условиях (7), (8) находится на управлениях $L_1(t), L_3(t)$, подчиненных управляющей связи

$$n_1 L_1 + n_3 L_3 + h\frac{\dot{n}}{n} = 0, \tag{28}$$

где $t \in T$. □

Действительно, исключая из равенств (13), (14) параметр λ_2, в результате при условиях (8) и $n_1 \neq 0$ получаем соотношение (28).

Замечание. Пусть для равенства (28) выполняется условие

$$n_1 L_1 + n_3 L_3 = 0 \quad (t \in T), \tag{29}$$

достижимое либо при h = 0, либо в случае, при котором $n(t) = \mathrm{const}$. Первый случай имеет место при ортогональности векторов $\mathbf{r}_C^0, \left(\mathbf{J}^0\right)^{-1}\mathbf{G}^0$, а второй − в случае $|\mathbf{n}| = \mathrm{const}$ для $t \in T$ при условии (7). □

Из соотношений (27)−(29) вытекают следующие свойства движения системы.

***Свойство* 1.** Множеством траекторий центра масс C системы на координатной плоскости Ox_1x_3 (далее − плоскости 1–3) являются реономные эллипсы с уравнениями

$$\frac{r_1^2}{(A_1 n^0)^2} + \frac{r_3^2}{(A_3 n^0)^2} = 1 \quad (t \in T), \tag{30}$$

а его уравнения движения и первый интеграл (10) для значений $t \in T$ определяются равенствами

$$[r_1(t), r_3(t)] = n^0[A_1 \cos \vartheta(t), A_3 \sin \vartheta(t)], \tag{31}$$
$$G_1 \cos \vartheta(t) + G_3 \sin \vartheta(t) = h, \quad \vartheta = \beta + \sigma(t),$$

где функция $\sigma(t)$ задана выражением (26).□

Равенства (31) являются параметрическими уравнениями траектории центра C, параметризованные переменной ϑ.

***Свойство* 2.** Величины скорости $\mathbf{v}_C$ (v_1, v_3) и ускорения $\mathbf{w}_C(w_1, w_3)$ центра масс C системы на плоскости 1–3 для $t \in T$ задаются соотношениями

$$v_1 = \frac{\dot{A}_1}{A_1} r_1 - \frac{\lambda_2}{f} r_3, \quad v_3 = \frac{\dot{A}_3}{A_3} r_3 + \lambda_2 f r_1, \quad (32)$$

$$w_1 = l_1 r_1 - p_3 r_3, \quad w_3 = l_3 r_3 + p_1 r_1, \quad (33)$$

где обозначено

$$p_1(t) = \lambda_2 f U(\lambda_2 f), \quad p_3(t) = \frac{\lambda_2}{f} U\left(\frac{\lambda_2}{f}\right),$$

$$U(t) = \frac{\dot{A}_1}{A_1} + \frac{\dot{A}_3}{A_3} + \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}, \quad f(t) = \frac{A_3}{A_1}, \quad \varphi = \varphi(t),$$

$$l_k(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{A}_k}{A_k}\right) + \left(\frac{\dot{A}_k}{A_k}\right)^2 - \lambda_2^2 \ (k = 1, 3). \ \square$$

На основе соотношений (30), (32), (33) находятся уравнения подвижных годографов векторов $\mathbf{v}_C, \mathbf{w}_C$ на плоскости 1–3, которые в общем случае являются нераспадающимися кривыми второго порядка.

***Свойство* 3.** Годограф вектора $\mathbf{v}_C$ на плоскости v_1, v_3 определяется уравнением

$$a_{11} v_1^2 + 2a_{13} v_1 v_3 + a_{33} v_3^2 = a^2, \quad (34)$$

где выражения для величин $a_{rk}(t)$ (r, k = 1,3), a (t) находятся из равенств

$$a_{11} = \dot{A}_3^2 + (A_3\lambda_2)^2, \ a_{13} = (A_1\dot{A}_3 - \dot{A}_1 A_3)\lambda_2,$$

$$a_{33} = \dot{A}_1^2 + (A_1\lambda_2)^2, \ a = (\dot{A}_1\dot{A}_3 + A_1 A_3 \lambda_2^2) n^0.$$

Пусть

$$\delta(t) = \dot{A}_1^2 \dot{A}_3^2 + A_1 A_3 (2\dot{A}_1\dot{A}_3 + A_1 A_3 \lambda_2^2)\lambda_2^2$$

− инвариант кривой (34) − годографа вектора скорости на плоскости квазикоординат v_1, v_3. Отбрасывая случай вырождения этой кривой, при котором $a_{11} \equiv 0$, получаем $\delta \neq 0$.

При $\delta > 0$ годографом является действительный *эллипс* с центром при $v_1 = v_3 = 0$ и с каноническим уравнением в координатах z_1, z_3

$$\frac{z_1^2}{c_1^2} + \frac{z_3^2}{c_3^2} = 1,$$

где обозначено

$$(c_1, c_3) = a_{11}\left[(a')^{-1/2}, (c')^{-1/2}\right],$$

$$a' = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{D_1}), \quad c' = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{D_1}),$$

$$\alpha = a_{11} + a_{33}, \quad D_1 = (a_{11} - a_{33})^2 + 4a_{13}^2.$$

Случай, при котором $\delta < 0$, соответствует годографу, являющемуся *гиперболой*, а при $\delta = 0$ – паре прямых, параллельных или совпадающих. □

***Свойство* 4.** Годограф вектора $\mathbf{w}_C$ на плоскости квазикоординат w_1, w_3 определяется уравнением

$$b_{11} w_1^2 + 2b_{13} w_1 w_3 + b_{33} w_3^2 = b^2, \quad (35)$$

где выражения для величин $b_{rk}(t) \ (r, k = 1,3)$, b (t) определяются равенствами

$$b_{11} = (A_1 p_1)^2 + (A_3 l_3)^2,$$

$$b_{13} = A_3^2 l_3 p_3 - A_1^2 l_1 p_1,$$

$$b_{33} = (A_1 l_1)^2 + (A_3 p_3)^2,$$

$$b = A_1 A_3 \Delta n^0, \quad \Delta(t) = p_1 l_1 + p_3 l_3. \ \square$$

Используя формальную идентичность вида квадратичных форм (34), (35), можно аналогично предыдущему исследовать геометрию годографа вектора ускорения (35).

***Свойство* 5.** Согласно равенствам (31) движение центра масс СМС на плоскости переменных (n_1, n_3) имеет квазигармонический характер [15]. При этом на управлении

$$G_2^r(t) = A_2(\omega_2^r - \lambda_2^0),$$

где $\lambda_2^0 \neq 0$ − заданный постоянный параметр, это движение − периодическое с периодом $2\pi(\lambda_2^0)^{-1}$.

Если выполняются условия

$$\mathbf{r}_C(t) = \mathbf{r}_C^0, \quad \mathbf{v}_C(t) = 0 \quad (t \in T),$$

то центр масс СМС стабилизирован относительно базиса Γ_3. При этом, согласно ограничениям (32), имеет место условие

$$\frac{\dot{A}_1}{A_1}\frac{\dot{A}_3}{A_3} + \lambda_2^2 = 0 \quad (t \in T),$$

которое для значений $\lambda_2 \neq 0$ возможно лишь при $\dot{A}_1\dot{A}_3 < 0$.

В случае, при котором $\boldsymbol{\omega}^r(t) \equiv 0$, стабилизация центра масс СМС при этих условиях имеет место и относительно базиса Γ_2. □

Комментарии

Система уравнений движения СМС в форме (4) была применена М.Ш. Аминовым [9, с. 33] в связи с решением ряда задач интегрирования системы уравнений движения твердого тела переменного состава, движущегося вокруг неподвижного полюса, и в последующем в других работах [14].

Линейный интеграл Гриоли, представленный в компонентах вектора угловой скорости, а также связанные с ним частные решения, свойства уравнений движения неизменяемого твердого тела и гиростата, помимо Гриоли [8] (см. также: Proceeding International Congress Mathematical. Amsterdam.1954. Vol.2. P. 351), были исследованы М.П. Гуляевым [16, 17] (см. также: Доклады Академии наук Казахской ССР. 1958. Т. 1. С. 202−208).

В частности, в работе [17, с. 747] получено одно соотношение связи типа (15) и не приведено симметричное ему по форме соотношение типа (18), являющееся союзным по отношению к условию (15).

Интеграл Гриоли (10) не является безусловным (регулярным) первым интегралом в общепринятом смысле. Он существует только при выполнении специального условия, являющегося *соотношением связи* типа (15) или (18) между одним из направляющих косинусов орта вертикали $\mathbf{s}$ и двумя компонентами вектора кинетического момента системы.

В силу этого данный интеграл является *условным интегралом*, системно связанным с любым из взаимно союзных определяющих условий.

Можно показать, что данные условия являются эквивалентными; это достигается путем исключения величины s_2 из системы парных соотношений (15), (18).

Как и в случае гиростата с постоянным гиростатическим моментом, носитель СМС, для которой имеет место интеграл Гриоли, при движении в однородном поле силы тяжести при некоторых ограничениях совершает прецессию относительно фиксированной невертикальной оси.

Список литературы

1. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
2. *Джакалья Г.Е.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
5. *Арнольд В.И. и др.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Т.3. М.: ВИНИТИ. 1985. 304 с.
6. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избранные труды: в 3 т. М.: Наука. Т. 2, 1972. 999 с.
7. *Галиуллин А.С.* Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981. 144 с.
8. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precesioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Annali di Matematica Pura ed Applicata. Ser. IV. 1947. Vol. 26, № 3−4. P. 271−281.
9. *Аминов М.Ш.* Некоторые вопросы движения и устойчивости тела переменной массы // Тр. Казанского авиационного ин-та. Вып. 48. 1959. 118 с.
10. *Верещагин И.Ф.* Методы исследования режимов полета аппарата переменной массы. В 2 т. Пермь: ун-т. Т. 1, 1969. 260 с.
11. *Макеев Н.Н.* Асимптотика вращений сложной механической системы // Проблемы механики и управления. Межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Перм. ун-т, 2004. С. 52−73.
12. *Макеев Н.Н.* О некоторых свойствах главных осей инерции тела переменной массы // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Перм. ун-т, 1978. С. 126−131.
13. *Макеев Н.Н.* Некоторые случаи интегрируемости уравнений движения гиростата переменной массы // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Перм. ун-т, 1976. С. 99−104.
14. *Макеев Н.Н.* Интегралы сложных систем на управляющих связях / Саратовский политех. ин-т. Саратов, 1989. 123 с. Деп. в ВИНИТИ 14.03.89, № 1656-В89.
15. *Макеев Н.Н.* Первые интегралы и асимптотика малых движений сложной системы / Саратовский политех. ин-т. Саратов,

1987. 13 с. Деп. в ВИНИТИ 17.09.87, № 6730-В 87.
16. *Гуляев М.П.* Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку // Вестник Московского ун-та. Сер. физико-математические и естественные науки. 1955, № 3. С. 15−21.
17. *Гуляев М.П.* О регулярных прецессиях тяжелого гиростата // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 746−753.

Grioli integral for the equations of motion of a complex mechanical system

N. N. Makeyev
Problems of Precision Mechanics and Control Institute Russian Academy of Sciences
24, Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

The criterion for the existence of the first integral of the system of equations of motion in the field of gravity of a mechanical object of variable mass composition and variable mass geometry is obtained. The integral is a generalized analog of the classical D. Grioli integral constructed for a structurally unchangeable solid body.

Keywords: *complex mechanical system; integral of Grioli; a criterion for the existence of a first integral; control constraints.*