

УДК 539.42+621.315.222+531.552+531.66

## Формулы для расчета глубины проникания ударников различной формы в анизотропные преграды

**А. В. Дубинский**

Университет им. Д. Бен-Гуриона в Негеве  
Israel, 84105, Beer-Sheva, P. O. Box 653  
dubin@bgu.ac.il

Рассматривается высокоскоростное проникание ударников с подобными поперечными сечениями (пирамиды, не обязательно правильные, тела вращения, тонкие тела с произвольной формой поперечного контура) в преграды с динамической твердостью, непрерывно меняющейся в зависимости от глубины преграды. Описание взаимодействия барьера с ударником основано на модели Витмана–Степанова; эффекты, связанные с неполным погружением ударника в барьер на начальном этапе, не учитываются. Получены явные формулы, описывающие зависимость глубины проникания от скорости удара, формы ударника, механических свойств материала преграды.

**Ключевые слова:** ударник; преграда; барьер; мишень; проникание; пробивание; анизотропия; глубина.

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-3-34-40

### Введение

Область применения функционально-градиентных материалов неуклонно расширяется, что стимулирует исследования в соответствующих областях [1–5]. Применительно к механике проникания это, прежде всего, экспериментальные исследования многослойных барьеров, состоящих из пластин с различными механическими свойствами, о чем свидетельствуют обзоры [6–7] и обзорные разделы монографий [8–9]. Теоретический анализ основан главным образом на модели, представляющей нормальное напряжение в точках поверхности проникающего тела, контактирующих с барьером, как квадратичную функцию нормальной компоненты локальной скорости с нулевым линейным членом ("модель Витмана–Степанова" [10]) либо на "законе плоских сечений" [11]. Обычно также принимаются дополнительные упрощения, в частности, предполагается, что нос ударника имеет форму прямого кругового конуса, иг-

норируются особенности начального и конечного этапов проникновения, когда ударник не полностью погружен в преграду, и др. Несмотря на интенсивные исследования [8–9, 12–21], явные формулы для интегральных характеристик проникания (глубины проникания и баллистического предела) получить не удается, за исключением случая, когда фактически предполагается последовательное пробивание слоев [8, 9, 12].

В рамках подхода, характерного для механики проникания, обобщенного на случай анизотропной преграды, выполнена работа [22], в которой задача определения глубины проникания сведена к решению трансцендентного уравнения.

В настоящей работе рассматривается высокоскоростное проникание ударников с подобными поперечными сечениями (пирамиды, не обязательно правильные, тела вращения, тонкие тела с произвольной формой поперечного контура) в преграды с динамической твердостью, непрерывно меняющейся в зависимости от глубины преграды.

Получены явные формулы, описывающие зависимость глубины проникания от скорости удара, формы ударника, механических свойств материала преграды.

### 1. Постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим высокоскоростное нормальное проникновение твердого, заостренного тела в полубесконечную преграду, твердость материала которой меняется в зависимости от глубины.

Предполагается, что взаимодействие снаряда с преградой описывается следующей двухчленной моделью, известной как модель Витмана–Степанова [10]:

$$d\vec{F} = [\gamma v_n^2 + Y] \vec{n}^0 dS \quad (1)$$

где  $\gamma$  – плотность материала преграды;  $Y$  – динамическая твердость материала преграды;  $d\vec{F}$  – сила, действующая на боковую поверхность элемента снаряда  $dS$ , находящегося в контакте с пластиной (преградой),  $\vec{n}^0$  и  $v_n$ , соответственно, единичный вектор внутренней нормали и нормальная составляющая мгновенной скорости снаряда в данной точке на поверхности снаряда.

Результирующая сила, действующая на снаряд в каждый момент времени, определяется интегрированием  $d\vec{F}$  по боковой поверхности контакта снаряд–преграда в тот же момент времени  $S_{lat}$ . В результате получается следующая формула для силы сопротивления  $D$ :

$$D = (-\vec{v}^0) \cdot \iint_{S_{lat}} d\vec{F} = \iint_{S_{lat}} (-\vec{v}^0) \cdot d\vec{F}, \quad (2)$$

где  $\vec{v}^0$  – единичный вектор скорости ударника.

Далее мы используем следующие обозначения (рис. 1). Координата  $h$ , текущая глубина проникания, определяется как расстояние между носом ударника и поверхностью преграды.

Цилиндрические координаты  $x, \rho, \theta$  с началом координат в носовой части ударника связаны с ним, причем координата  $x$  направлена вдоль его оси. Уравнение  $\rho = \Phi(x, \theta)$ , где  $\Phi$  – выпуклая функция, определяет форму ударника,  $L$  – длина носовой части ударника, которая взаимодействует с преградой; он имеет также кормовую цилиндрическую часть длины  $L_0$ .

Заметим, что поперечное сечение  $x = x_0$ , расположено на глубине  $h_0 - x_0$ , если нос ударника расположен на глубине  $h = h_0$ .

В рамках предпринятой постановки задачи, в отличие от [22], учитывается различие показателя твердости в различных точках поверхности ударника.

Предполагается, что ударник имеет две плоскости симметрии, что обеспечивает его поступательное движение в преграде.

Нашей целью является получение явных формул для глубины проникания в преграду из материала, жесткость которого меняется в направлении проникания.

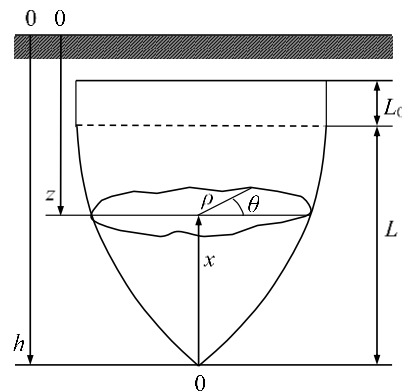


Рис. 1. Обозначения

### 2. Ударники с подобными поперечными сечениями. Математическая модель и формулы для глубины проникания

Ниже мы рассматриваем так называемые гомотетичные по форме ударники, имеющие подобные сечения, перпендикулярные его оси, вследствие чего функцию  $\Phi(x, \theta)$  можно представить в виде:

$$\Phi(x, \theta) = \rho(\theta) \cdot \varphi(x). \quad (3)$$

Для определенности предполагаем, что функция  $\varphi(x)$  задает уравнение контура ударника в сечении  $\theta = 0$  и  $0 \leq x \leq L$ , а безразмерная функция  $\rho(\theta)$  – уравнение кормового сечения, перпендикулярного оси  $x$ , причем  $\rho(0) = \rho(2\pi) = 1$ .

Пренебрегая эффектом, связанным с частичным погружением ударника в преграду на начальной стадии проникания, после несложных преобразований можно получить следующее выражение для  $D$  в случае модели, заданной уравнением (1) [8–9]:

$$D(h, v) = f_2(h)v^2 + f_0(h), \quad (4) \quad \text{где}$$

где

$$f_0(h) = \int_{x=0}^{x=L} dx \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta [Y(h-x)\Phi\Phi_x] = \int_0^L \varphi\varphi_x Y(h-x) dx \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta, \quad (5)$$

$$f_2 = \gamma \int_{x=0}^{x=L} dx \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\Phi^3\Phi_x^3 d\theta}{\Phi^2(\Phi_x^2+1) + \Phi_\theta^2} = \gamma \int_{x=0}^{x=L} \varphi\varphi_x^3 dx \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\rho^6 d\theta}{\rho^2(\rho^2\varphi_x^2+1) + \rho_\theta^2}, \quad (6)$$

причем  $f_2$  не зависит ни от  $x$  ни от  $\theta$ .

Тогда уравнение движения ударника массы  $m$  выглядит следующим образом:

$$\frac{m}{2} \frac{dv^2}{dh} + f_2 v^2 + f_0(h) = 0, \quad (7)$$

и решение этого линейного относительно  $v^2$  обыкновенного дифференциального уравнения при условии, что  $v(0) = v_{imp}$  ( $v_{imp}$  – скорость удара), может быть записано в виде:

$$v^2(h) = \frac{1}{Q(h)} \left[ v_{imp}^2 - \frac{2}{m} \int_0^h f_0(\tilde{h}) Q(\tilde{h}) d\tilde{h} \right], \quad (8)$$

где

$$Q(h) = \exp\left(\frac{2}{m} \int_0^h f_2 d\zeta\right) = \exp\left(\frac{2f_2}{m} h\right). \quad (9)$$

Используя условие  $v(H) = 0$ , получаем уравнение для определения глубины проникания:

$$\int_0^H f_0(h) Q(h) dh = \frac{m}{2} v_{imp}^2. \quad (10)$$

Для функции, описывающей динамическую твердость в зависимости от глубины преграды, выберем аппроксимацию [4–5]:

$$Y(z) = \alpha \exp(\beta z), \quad (11)$$

которая хорошо описывает возможные виды поведения зависимости  $Y(z)$ . Тогда

$$f_0 = \alpha I_x^{(0)} I_\theta^{(0)} \exp(\beta h), \quad (12)$$

где

$$I_x^{(0)} = \int_0^L \varphi\varphi_x \exp(-\beta x) dx, \quad I_\theta^{(0)} = \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta \quad (13)$$

и

$$f_2(h) = \gamma I_x^{(2)} I_\theta^{(2)}(x), \quad (14)$$

$$I_x^{(2)} = \int_0^L \varphi\varphi_x^3 dx, \quad (15)$$

$$I_\theta^{(2)}(x) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\rho^6 d\theta}{\rho^2(\rho^2\varphi_x^2+1) + \rho_\theta^2}$$

В разделах 3–4 мы рассмотрим классы форм ударников, для которых  $I_\theta^{(2)}$  не зависит от  $x$ . В этом случае уравнение (10) приобретает вид:

$$\alpha I_x^{(0)} I_\theta^{(0)} \int_0^H \exp((\beta + k_3)h) dh = \frac{m}{2} v_{imp}^2, \quad (16)$$

где

$$k_3 = \frac{2\gamma}{m} I_x^{(2)} I_\theta^{(2)}. \quad (17)$$

Вычислив интеграл в левой части уравнения (16), получаем:

$$\exp((\beta + k_3)H) - 1 = k_1 v_{imp}^2, \quad (18)$$

$$k_1 = \frac{\gamma m (\beta + k_3)}{2\alpha I_x^{(0)} I_\theta^{(0)}},$$

откуда

$$H = \frac{1}{\beta + k_3} \ln(1 + k_1 v_{imp}^2). \quad (19)$$

Если понимать под баллистическим пределом так называемый "армейский баллистический предел" (скорость удара, при котором ударник достигает тыльной границы преграды), то заменяя  $H$  толщиной преграды  $b$ , а также  $v_{imp}$  баллистическим пределом  $v_{bl}$ , получим из формулы (19) явную формулу для  $v_{bl}$ :

$$v_{bl}^2 = \frac{1}{k_1} [\exp(b(\beta + k_3)) - 1]. \quad (20)$$

В частном случае изотропной преграды  $\beta = 0$ ,  $\alpha = Y(0) = Y$ .

### 3. Ударники с конической формой носовой части

#### 3.1. Общее решение

Пусть ударник имеет коническую форму носовой части, то есть, ее поверхность образована движением отрезка, проходящего через начало координат и скользящего по контуру, являющемуся границей между носовой и цилиндрической частями ударника.

Очевидно, класс таких "носов" не ограничивается прямыми круговыми конусами; к этому классу принадлежат также, например, пирамидальные тела.

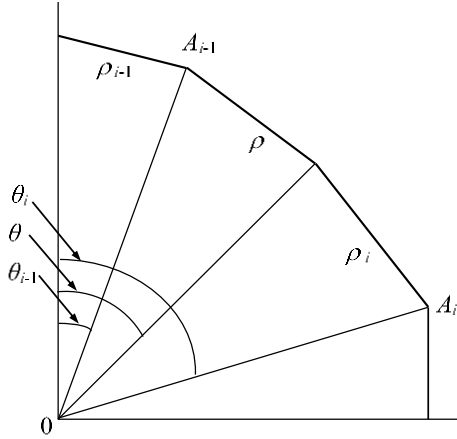


Рис. 2. Форма части поперечного контура ударника

Рассмотрим часть поперечного контура пирамидального тела (рис. 2), расположенную в области  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , имея в виду, что контур симметричен относительно осей  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ . Контур определяется точками с координатами  $(\theta_0 = 0, \rho_0 = 1), \dots, (\theta_{i-1}, \rho_{i-1}), (\theta_i, \rho_i), \dots, (\theta_n = \pi/2, \rho_n)$ , причем потребуем выполнения условий  $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_i < \dots < \theta_{i-1} < \dots < \theta_n$ .

Уравнение прямой, проходящей через точки  $A_{i-1}$  и  $A_i$ , имеет вид:

$$\rho(\theta) = \rho_i \frac{\cos(\theta_i + \omega_i)}{\cos(\theta + \omega_i)}, \quad (21)$$

где уравнение для  $\omega_i$  получается после подстановки в (21)  $\theta = \theta_{i-1}, \rho = \rho_{i-1}$ :

$$\rho_{i-1} \cos(\theta_{i-1} + \omega_i) = \rho_i \cos(\theta_i + \omega_i). \quad (22)$$

Выражения (13) и (15) для  $I_\theta^{(0)}$  и  $I_\theta^{(2)}$  с учетом формул (21)–(22) и соотношений тригонометрии принимают вид:

$$\begin{aligned} I_\theta^{(0)} &= 4 \sum_{i=1}^n \rho_i \cos(\theta_i + \omega_i) \Psi_i = \\ &= 4 \sum_{i=1}^n \rho_{i-1} \rho_i \sin(\theta_i - \theta_{i-1}) = 2S. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} I_\theta^{(2)} &= 4 \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i^4 \cos^4(\theta_i + \omega_i)}{1 + \rho_i^2 \cos^2(\theta_i + \omega_i) \operatorname{tg}^2 \mathcal{G}} \Psi_i = \\ &= 4 \sum_{i=1}^n \frac{\rho_{i-1} \rho_i^3 \cos^2(\theta_i + \omega_i) \sin(\theta_i - \theta_{i-1})}{1 + \rho_i^2 \cos^2(\theta_i + \omega_i) \operatorname{tg}^2 \mathcal{G}}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $S$  – площадь сечения, ограниченного поперечным контуром,  $\mathcal{G}$  – угол при вершине треугольника в продольном сечении контура ударника при  $\theta = 0$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta + \omega_i)} = \\ &= \operatorname{tg}(\theta_i + \omega_i) - \operatorname{tg}(\theta_{i-1} + \omega_i) = \\ &= \frac{\sin(\theta_i - \theta_{i-1})}{\cos(\theta_i + \omega_i) \cos(\theta_{i-1} + \omega_i)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Вычислив интегралы в выражениях (13)

и (15) для  $I_x^{(0)}$  и  $I_x^{(2)}$ , получим:

$$\begin{aligned} I_x^{(0)} &= \operatorname{tg}^2 \mathcal{G} \int_0^L x \exp(-\beta x) dx = \\ &= \frac{1 - (L\beta + 1) \exp(-\beta L)}{\beta^2} \operatorname{tg}^2 \mathcal{G}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$I_x^{(2)} = \operatorname{tg}^4 \mathcal{G} \int_0^L x dx = 0.5 \operatorname{tg}^4 \mathcal{G} L^2. \quad (27)$$

В частном случае ромбовидного поперечного сечения  $n = 1, \theta_1 = \pi/2$  и, как обычно,  $\theta_0 = 0, \rho_0 = 1$ . Тогда уравнение (22) приводит к выражению для  $\omega_1$ :

$$\operatorname{tg} \omega_1 = -1/\rho_1, \quad \sin^2 \omega_1 = 1/(1 + \rho_1^2) \quad (28)$$

и формулы (23)–(24) приобретают вид:

$$I_\theta^{(0)} = 4\rho_1, \quad I_\theta^{(2)} = \frac{4\rho_1^3}{1 + \rho_1^2 / \cos^2 \mathcal{G}}. \quad (29)$$

### 3.2. Случай поперечного контура ударника, вписанного в окружность

Рассмотрим ударники, носовая часть которых может быть вписана в прямой круговой конус. Тогда

$$\rho_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (30)$$

Уравнение (22) приводит к соотношению  $\cos(\theta_{i-1} + \omega_i) = \cos(\theta_i + \omega_i)$ , откуда следует, что  $\theta_{i-1} + \omega_i = -(\theta_i + \omega_i)$  и, следовательно,

$$\omega_i = -0,5(\theta_{i-1} + \theta_i). \quad (31)$$

В рассматриваемом случае соотношения (23) и (24) примут вид:

$$I_{\theta}^{(0)} = 4 \sum_{i=1}^n \sin(\theta_i - \theta_{i-1}), \quad (32)$$

$$I_{\theta}^{(2)} = 4 \sum_{i=1}^n \frac{\cos^2\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}\right) \sin(\theta_i - \theta_{i-1})}{1 + \cos^2\left(\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2}\right) \operatorname{tg}^2 \vartheta}. \quad (33)$$

### 3.3. Случай носовой части ударника в форме правильной пирамиды

В этом случае к условиям (30) добавляется равенство

$$\theta_i = 0.5\pi i/n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (34)$$

соотношения (32) и (33) преобразуются к виду:

$$I_{\theta}^{(0)} = 4n \sin(0.5\pi/n), \quad (35)$$

$$I_{\theta}^{(2)} = 4n \frac{\cos^2(0.25\pi/n) \sin(0.5\pi/n)}{1 + \cos^2(0.25\pi/n) \operatorname{tg}^2 \vartheta}. \quad (36)$$

### 3.4. Случай носовой части ударника в виде прямого кругового конуса

Соответствующие формулы можно получить, переходя в соотношениях (35)–(36) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ ; в результате получаем:

$$I_{\theta}^{(0)} = 2\pi, \quad I_{\theta}^{(2)} = 2\pi \cos^2 \vartheta. \quad (37)$$

Эти формулы можно получить из соотношений (13) и (15) для  $I_{\theta}^{(0)}$  и  $I_{\theta}^{(2)}$ , подставив  $\rho(\theta) = 1$  и  $\varphi(x) = \operatorname{tg} \vartheta x$ .

## 4. Тонкие ударники

Для тонких ударников (не обязательно конических) справедливо условие:

$$\rho^2 \varphi_x^2 \ll 1, \quad (38)$$

с учетом которого формула (15) для  $I_{\theta}^{(2)}$  приобретает вид

$$I_{\theta}^{(2)} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\rho^6 d\theta}{\rho^2 + \rho_{\theta}^2}, \quad (39)$$

а формулы (13), (15) для  $I_x^{(0)}$ ,  $I_x^{(2)}$ ,  $I_{\theta}^{(0)}$  и формулы (19), (20) для  $H$  и  $v_{bl}$  остаются без изменений. Вычисление интегралов  $I_x^{(2)}$  и

$I_{\theta}^{(0)}$  не вызывает принципиальных затруднений; например, для тела вращения  $\rho = 1$  и, следовательно,  $I_{\theta}^{(2)} = 2\pi$ .

Что касается описания продольного контура, то не представляет большого труда найти аппроксимации, позволяющие совместить требования выпуклости и тонкости тела с простотой вычисления интегралов  $I_x^{(0)}$  и  $I_x^{(2)}$ . Пусть, например, форма продольного контура ударника задается в виде:

$$\varphi(x) = R \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (40)$$

Тогда  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(L) = R$  и

$$\varphi_x(x) = \frac{\pi R}{2L} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right), \quad (41)$$

$$\varphi_{xx}(x) = -\frac{\pi^2 R}{4L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right),$$

т. е.  $\varphi(x)$  – возрастающая, выпуклая вверх функция на интервале  $(0, L)$ .

Интегралы  $I_x^{(0)}$  и  $I_x^{(2)}$  легко вычисляются:

$$I_x^{(0)} = \frac{0.25\pi^2 R^2}{\beta^2 L^2 + \pi} [\exp(-\beta L) + 1], \quad I_x^{(2)} = \frac{\pi^2 R^4}{16L^2}. \quad (42)$$

В качестве одного из универсальных методов расчета интегралов  $I_x^{(0)}$  и  $I_x^{(2)}$  может быть использован подход, основанный на кусочно-линейной аппроксимации продольного контура.

В этом случае получаем формулы:

$$I_x^{(0)} \approx \sum_{i=1}^N \frac{\varphi(x_i) \exp(-\beta x_i) + \varphi(x_{i-1}) \exp(-\beta x_{i-1})}{2} \Delta x \times \frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})}{\Delta x}, \quad (43)$$

$$I_x^{(2)} \approx \sum_{i=1}^N \frac{\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})}{2} \Delta x \times \left[ \frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})}{\Delta x} \right]^3, \quad (44)$$

где  $N+1$  – количество точек аппроксимации (включая  $x_0 = 0$ ),  $x_N = L$ ,  $\Delta x = L/N$ ,  $x_i = i\Delta x$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Очевидно, увеличивая  $N$ , можно добиться нужной точности аппроксимации.

## 5. Ударники формы тела вращения

В случае ударника, имеющего форму тела вращения (не обязательно тонкого), формулы (18)–(19) остаются в силе, но

$$I_{\theta}^{(0)} = 2\pi, \quad k_3 = \frac{4\pi\gamma}{m} \int_0^L \frac{\varphi\varphi_x^3 dx}{\varphi_x^2 + 1}. \quad (45)$$

### Список литературы

1. *S. Suresh and A. Mortensen*. Fundamentals of functionally graded materials: processing and thermomechanical behaviour of graded metals and metal-ceramic composites. IOM Communications, London. 1998.
2. *Birman, V., and Byrd, L. W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Applied Mechanics Reviews*. 2007. Vol. 60. P. 195–216.
3. *Larson, R. A., Palazotto, A. N., Gardenier, H. E.* Impact response of titanium and titanium boride monolithic and functionally graded composite plates. // *AIAA Journal*. 2009. Vol. 47(3). P. 676–691. doi:10.2514/1.38577.
4. *Khan T., Zhang N., Akram A.* State of the art review of Functionally Graded Materials. In: 2nd International Conference on Computing, Mathematics and Engineering Technologies. 2019. P. 1-9.
5. *Guo L.C., Wu L.Z., Zeng T., Cao D.H.* The transient response of a coating–substrate structure with a crack in the functionally graded interfacial layer // *Composite structures*. 2005. Vol. 70(1). P. 109–119.
6. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Investigation and optimization of protective properties of metal multi-layered shields: A Review // *International Journal of Protective Structures*. 2012. Vol. 3(3). P. 275–291.
7. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* New results on ballistic performance of multi-layered metal shields: review // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2017. Vol. 88. P. 1-8.
8. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Engineering models in high-speed penetration mechanics and their applications. A Two-Volume Set. Vol.1: Engineering models; Vol. 2: Applied problems. World Scientific, 2019. 1076 p.
9. *Аптуков В.Н., Дубинский А.В., Хасанов А.Р.* Исследование и оптимизация защитных свойств многослойных металлических преград при высокоскоростном ударе: монография. Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2019. 430 с.
10. *Витман Ф.Ф., Степанов В.А.* Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара 100–1000 м/с // *Некоторые проблемы прочности твердого тела*. АН СССР. 1959. С. 207-221.
11. *Сагомоян А.Я.* Динамика пробивания преград. М.: МГУ, 1988. 219 с.
12. *Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T.* Applied high-speed plate penetration dynamics. Springer. Dordrecht, 2006. 357 p.
13. *Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В.* Прикладная теория проникания. М.: Наука, 1992. 105 с.
14. *Аптуков В.Н., Хасанов А.Р.* Оптимизация параметров слоистых плит при динамическом проникании жесткого индентора с учетом трения и ослабляющего эффекта свободных поверхностей // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета*. Механика. 2014. Вып. 2. С. 48-75.
15. *Хасанов А.Р.* Оптимальное торможение жесткого конического ударника слоистой плитой при ударе по нормали с учетом вязкостных эффектов // *Вестник Пермского университета*. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2(41). С. 54-60.
16. *Каниболотский М.А., Уржумцев Ю. С.* Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука. Сиб. Отделение, 1989. 176 с.
17. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В.* Проникание жестких ударников в слоистые пластины и некоторые задачи глобальной многоцелевой структурной оптимизации // *Проблемы прочности и пластичности*. 2012. № 74. С. 124-133.
18. *Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В., Турутько А.И.* Некоторые аналитические и численные оценки параметров оптимальной структуры защитной плиты // *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. № 75(3). С. 206-214.
19. *Banichuk N.V., Ivanova S.Y., Ragnedda F., Serra M.* Multiobjective approach for optimal design of layered plates against penetration of strikers // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2013. Vol. 41(2). P. 189-201.

20. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Игровой подход к решению задачи оптимизации формы ударника и структуры слоистой среды при высокоскоростном пробивании // Проблемы прочности и пластичности. 2016. № 78(4). С. 426-435.
21. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Optimal Structural Design: Contact Problems and High-Speed Penetration. Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Boston, 2017. 207 p.
22. Баничук Н.В., Отгонбаяр С. О движении осесимметричного ударника в средах с линейно изменяющимися прочностными характеристиками // Проблемы прочности и пластичности. 2017. № 79(4). С. 484-491.

## Formulas for calculating the depth of penetration of projectiles of different shapes into anisotropic barriers

**A. V. Dubinsky**

Ben-Gurion University of the Negev; P. O. Box 653, Beer-Sheva, 84105, Israel  
dubin@bgu.ac.il

We consider the high-speed penetration of impactors with similar cross sections (pyramids, not necessarily regular, bodies of revolution, thin bodies with an arbitrary shape of the cross section) into barriers with a dynamic hardness that continuously changes depending on the depth of the shield. The description of the interaction of the barrier with the impactor is based on the Vitman-Stepanov model; the effects associated with incomplete immersion of the impactor in the barrier at the initial stage are not taken into account. Explicit formulas describing the dependence of the penetration depth on the impact velocity, the shape of the impactor, and the mechanical properties of the barrier material are obtained.

**Keywords:** *impactor; barrier; obstacle; shield; penetration; perforation; anisotropy; depth.*