МЕХАНИКА
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК_519.21, 51-75_

Капитал инвестиционной компании с описываемой моделью Орнштейна–Уленбека ценой рискового актива как решение стохастического дифференциального уравнения

О. В. Александрова, Т. В. Жмыхова
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры
Россия, Донецкая Народная Республика, 286123, г. Макеевка, ул. Державина, 2
alexand_olga_la@mail.ru; +38 (066) 156 87 33

Построена математическая модель компании, инвестирующей часть своего свободного капитала в рисковые активы (акции), под которыми можно понимать активы с неопределенной доходностью, а оставшуюся часть – в безрисковые активы (на банковский счет), т. е. активы, доходность которых заранее предопределена. В качестве основного процесса, выбранного для описания эволюции цены акции, был взят процесс Орнштейна–Уленбека. В явном виде найдено решение уравнения, описывающего динамику капитала инвестицион-ной компании методами группового анализа стохастических дифференциальных уравнений. Знание решения в явном виде позволит компании решать проблемы с инвестированным заемным капиталом, и переходить от инвестиционной деятельности к долгосрочному капиталу за счет краткосрочных заемных средств, характерных для международной практики.

Ключевые слова: *финансовый (B, S)-рынок; рисковые и безрисковые активы; модель Орнштейна–Уленбека; групповой анализ; стохастическое дифференциальное уравнение.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-3-24-28

Введение

В последнее время наиболее актуальными становятся вопросы, связанные с дополнительной аккумуляцией капитала компании за счет инвестиций на финансовом рынке. В частности, в работе [1] была рассмотрена модель накопления, потребления и "страхования", являющаяся компиляцией в некотором смысле динамической модели "страхования" и известной модели портфельного анализа Р. Мертона [2]. Была решена задача оптимального управления портфелем инвестора и потреблением, и найдены оптимальные управления, при которых предложенный функционал качества принимает наибольшее значение.

В работах [3, 4] также найдены оптимальные управления портфелем активов, при условии, что компания проводит рекламные кампании для привлечения новых клиентов, зачастую фонды работают на финансовых (B, S)-рынках, цены рисковых активов на которых описываются моделью Самуэльсона. Ввиду того, что в условиях глобализации экономики финансовые рынки характеризуются нестационарными и кризисными явлениями [5], классические модели, описывающие эволюцию цен рисковых активов, оказываются неадекватными.

Например, в приведенных выше работах локальная доходность модели П. Самуэльсона в момент времени t, $t \in [0, T]$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=\mu dt+\sigma dW(t)$$

состоит из детерминированных приращений $\mu\Delta t$ и независимых случайных величин $\sigma(W(t+\Delta t)-W(t))$. Однако вряд ли можно предположить полную независимость влияний этих величин на цену акции, а, следовательно, и на ее доходность. Также классическая теория не связывает оптимальное размещение активов с длиной горизонта инвестирования, однако, на практике долгосрочные инвесторы большую часть капитала должны инвестировать в акции, в отличие от краткосрочных. Поэтому формирование инвестиционного портфеля, а также вопрос выбора модели оценки финансового актива представляют особый интерес.

В данной работе в качестве основного процесса, выбранного для описания эволюции цены акции, был взят процесс Орнштейна–Уленбека. Безарбитражность такой модели была доказана в [6]. Адекватность процесса Орнштейна–Уленбека определена по его способности долгосрочного "прогнозирования" при наличии асимметрии распределения.

1. Постановка задачи

Пусть компания-инвестор, которая в момент времени t, имея капитал $X_x(t)\left(X(0)=x\right)$, инвестирует его на финансовый (B,S)-рынок. Причем часть капитала, а именно $uX_x(t), 0<u<1$, компания инвестирует в акции (рисковый актив), цена которого описывается моделью, заданной на стандартном вероятностном пространстве (Ω,F,P), и имеет вид:

$$S(t)=S(0)\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\eta(t)\right),$$

где $\eta(t),\ t\geq 0$ – процесс Орнштейна–Уленбека, такой что

$$d\eta(t)=-\gamma\eta(t)dt+\varpi dW(t),\ \eta(0)=0.$$

Тогда

$$dS(t)=S(t)\left((\mu-\gamma\eta(t))dt+\varpi dW(t)\right), \tag{1}$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс.

За владение акцией осуществляется выплата дивидендов D со скоростью $\delta uS(t), 0\leq\delta<r$ – пропорциональной рисковой составляющей капитала [4], а именно:

$$dD(t)=\delta udt. \tag{2}$$

Другую часть капитала, соответственно $(1-u)X_x(t)$, компания-инвестор размещает на банковском депозите (безрисковый актив), цена которого описывается уравнением

$$dB(t)=rB(t)dt, B(0)>0, \tag{3}$$

где $r(r>0)$ – процентная ставка или банковский процент, $B(0)$ – сумма на депозите в начальный момент времени. Другими словами, компанией задается "программное" управление. Считаем, что компания работает только с собственным капиталом, привлечение средств извне не рассматривается.

Учитывая доход от инвестиционной деятельности на (B,S)-рынке, уравнение, описывающее динамику капитала компании, имеет вид:

$$dX_x(t)=udB(t)+(1-u)dS(t)+dD(t), \tag{4}$$

или, учитывая (1), (2) и (3), уравнение (4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}&dX_x(t)=\\&X_x(t)\left(u(\mu+\delta)+(1-u)r-u\gamma\eta(t)\right)dt+\\&+uX_x(t)\sigma dW(t).\end{aligned} \tag{5}$$

В статье [7] показано, что решение уравнения (5) существует.

1.1. Основные понятия группового анализа стохастических дифференциальных уравнений и предварительные утверждения

Решение уравнения (5) мы будем искать методами группового анализа стохастических дифференциальных уравнений. Поэтому приведем здесь основные понятия и теоремы теории группового анализа стохастических дифференциальных уравнений.

На полном вероятностном пространстве (Ω,F,P) рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) Ито:

$$u(t)=u_0+\int_0^t A(h,u(h))dh+\int_0^t B(h,u(h))dW(h). \tag{6}$$

В уравнении (6) $\{W(t),t\in[0,T]\}$ – d-мерный винеровский процесс относительно фильтрации $\{F_t,t\in[0,T]\}$, $W^{(i)}(t)$ – независимые винеровские процессы, u_0 - F_0 – измеримый случайный вектор, $A:[0,T]\times R^n\to R^n$,

$B:[0,T]\times R^n \to R^n \times R^d$ – измеримые неслучайные функции.

Предполагается, что коэффициенты уравнения (6) удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения, сформулированной в работе [8].

1.2. Определение инвариантности системы СДУ Ито относительно группы преобразований

Рассматриваются обратимые преобразования переменной времени в интервале $t\in[0,T]$, зависящие от одного вещественного параметра a:

$$s = f(t,a), \tag{7}$$

где $s\in[s_0,s_T]$, $a\in\Delta\subseteq R$ – групповой параметр, Δ – симметричный около нуля интервал, $s_0 = f(0,a)$, $s_T = f(T,a)$.

Функция $f(t,a)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t,0)=t$, $\forall t\in[0,T]$;

2) $f(f(t,a),b)= f(t,a+b)$,

$\forall t\in[0,T]$, $\forall a\in\Delta$, $\forall b\in\Delta$, таких, что $(a+b)\in\Delta$;

3) $f\in C^2([0,T]\times\Delta)$, $f_t>0$, $\forall t\in[0,T]$, $\forall a\in\Delta$.

Из условия 2) следует, что обратное преобразование получается изменением знака параметра a, т.е.

$$f^{-1}(s,a)= f(f(t,a),-a)=t= f(s,-a).$$

После замены переменной времени $t = f(s,-a)$ в уравнении (6) получим:

$$\hat{u}(s)=u_0+\int_{s_0}^{s} A(f(r,-a),\hat{u}(r))f_r(r,-a)dr+$$
$$+\int_{s_0}^{s} B(f(r,-a),\hat{u}(r))\sqrt{f_r(r,-a)}dw(r). \tag{8}$$

Лемма, доказанная в работе [10], устанавливает взаимосвязь винеровских процессов, входящих в уравнения (6) и (8).

Затем преобразуется фазовая переменная u:

$$v = g(t,W(t),u,a). \tag{9}$$

Здесь $a\in\Delta\subseteq R$ – групповой параметр, Δ – симметричный около нуля интервал.

Функция g удовлетворяет условиям:

1а) $g(t,W(t),u,0)=u$;

2а) $g(f(t,a),w(f(t,a)),g(t,W(t),u,a),b)=g(t,W(t),u,a+b)$ с вероятностью 1 для любых $t\in[0,T]$, $u\in R^n$, $a\in\Delta$, $b\in\Delta$, таких, что $(a+b)\in\Delta$, $W(t)$ и $w(s)$ связаны преобразованием времени по формулам (9)–(10);

3а) $g\in C^2([0,T]\times R^d\times R^n\times\Delta)$;

4а) матрица первых производных функции g по переменной u невырожденная.

Преобразования f и g, определенные формулами (7) и (9), порождают группу G.

В работе [9] дано определение допустимой группы для СДУ Ито (6) относительно преобразований (7)–(9).

1.3. Основные характеристики допустимой группы

К основным характеристикам группы, допускаемой данным уравнением, относится понятие оператора первого порядка, который также называют *инфинитезимальным оператором группы.*

В статье [10] дано его определение. Для нахождения решения мы будем использовать теоремы 1 и 2. Теорема 1 была доказана в [9] для двумерного случая и в [10] для n-мерного.

Теорема 1. Критерий инвариантности относительно группы преобразований. *Система уравнений (6) инвариантна относительно группы преобразований с инфинитезимальным оператором (11) тогда и только тогда, когда коэффициенты уравнения и координаты оператора удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\xi_t\cdot B-\eta_u\cdot B+\xi\cdot B_t+B_u\cdot\eta-\eta_w=0,\\ -\eta_t+\xi_t\cdot A-\eta_u\cdot A+\xi\cdot A_t+A_u\cdot\eta-\\ -\frac{1}{2}Sp(\eta_{uu}\cdot B\cdot B^*)-Sp(\eta_{uW}\cdot B)-\frac{1}{2}Sp(\eta_{WW})=0,\end{cases} \tag{10}$$

где B^* – матрица, транспонированная к данной.

1.4. Первые интегралы систем СДУ Ито

Определение 3 [10]. Функция $\Phi\neq\mathrm{const}$, такая, что

$$\Phi:[0,T]\times R^d\times R^n\to R,$$
$$\Phi\in C^2([0,T]\times R^d\times R^n),$$

называется первым интегралом для СДУ (6), если с вероятностью 1 выполнено равенство:

$$\Phi(t,W(t),u(t)) = \Phi(0,0,u_0),\ \forall t \geq 0 .$$

Теорема 2 [10]. *Уравнение (6) допускает оператор*

$$X^* = \partial_t + \sum_{i=1}^{n} \theta^{(i)}(t,W(t),u) \cdot h(\Phi(t,W(t),u(t)))\partial_{u_i},$$

где функции $\theta^{(i)}(t,W(t),u)$ *удовлетворяют системе определяющих уравнений (12) при условии, что* $\xi(t)=1$ *тогда и только тогда, когда функция* $\Phi(t,W(t),u(t))$ *является первым интегралом системы стохастических уравнений (6). Функция h произвольная.*

2. Основной результат

Теорема 3. *Предположим, компания имеет на момент времени t капитал* $X_x(t)$ $(X(0)=x)$, *инвестирует его на финансовый* (*B*, *S*)-*рынок, цены на котором описываются уравнениями (1) и (2) и за владение акцией осуществляется выплата дивидендов согласно (3), пусть динамика такой компании описывается уравнением (5). Тогда общее решение уравнения (5) имеет вид:*

$$X_x(t) = EXP\left(\frac{1}{2}X_0\sqrt{t} + \left(u(\mu+\delta)+(1-u)r\right)t\right)\times$$
$$\times EXP\left(-u\gamma\int_0^t \eta(s)ds - \frac{\sigma^2u^2}{2}t + u\sigma W(t)\right). \quad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим линейное СДУ:

$$du(t) = b\,udt + \sigma\,udW(t). \quad (12)$$

Подставив его коэффициенты в систему (10), найдем координаты касательного вектора группы, допускаемой уравнением (12):

$$\xi(t) = c_1 + c_2 t,$$

$$\eta(t,W(t),u) = \frac{c_2 u}{2}\left(\ln(\sigma u) + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) + c_3\sigma u .$$

Таким образом, уравнение (12) допускает трехмерную алгебру Ли с операторами

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = t\partial_t + \frac{u}{2}\left(\ln(\sigma u) + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\partial_u,$$

$$X_3 = \sigma u\partial_u .$$

Для того чтобы выписать решение уравнения (5), используем оператор X_2. Согласно [10], инварианты группового оператора можно получить, решив уравнение: $X_2F = 0$ или

$$t\partial_t F + \frac{u}{2}\cdot\left(\ln(\sigma u) + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\partial_u F = 0. \quad (13)$$

Решим уравнение (13) (учитываем, что $F = F(t,u,W(t))$). Для этого сначала найдем его инвариант, а затем уточним вид полученной функции, используя теорему 2.

Таким образом, получим:

$$F\sqrt{t} = 2\left(\ln(\sigma u) - 2\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right). \quad (14)$$

В формуле (14), полагая $F = u_0$, и выражая из этой же формулы переменную u, получим:

$$u = \frac{1}{\sigma}EXP\left(\frac{u_0 t}{2} + \left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right). \quad (15)$$

Учитывая соответствие между уравнениями (5) и (12), можем выписать решение уравнения (5):

$$X_x(t) = EXP\left(\frac{1}{2}X_0\sqrt{t} + \left(u(\mu+\delta)+(1-u)r\right)t\right)\times$$
$$\times EXP\left(-u\gamma\int_0^t \eta(s)ds - \frac{\sigma^2u^2}{2}t + u\sigma W(t)\right). \quad (11)$$

Замечание 2. *Полагая в формуле (11) x = 0, мы получим результат из [6], что не вполне соответствует действительности, так как начальный капитал не может быть нулевым. Таким образом, методами группового анализа мы получаем решение, которое имеет более правдоподобный эффект в сравнении с реальностью.*

Заключение

В данной работе продемонстрирован новый подход к нахождению капитала компании, работающей на финансовом (*B*, *S*)-рынке с учетом инвестиций в безрисковый и рисковый актив.

Предполагалось, что эволюция цены рискового актива описывается моделью Орнштейна–Уленбека. Знание решения в явном виде позволит компании решать проблемы с инвестированным заемным капиталом, и переходить от инвестиционной деятельности к долгосрочному капиталу, характерному для международной практики, за счет краткосрочных заемных средств.

Также это знание снимет вопрос с рядом обязательств, граничащих с собственным капиталом, в частности, с такими, как отложенные налоговые обязательства, долгосрочные оценочные обязательства, внутригрупповые займы и займы, предоставленные учредителями и т.д.

Список литературы

1. *Бондарев Б.В., Баев А.В.* Управление накопительно-потребительским фондом с функциями страховой компании // Украинский математический вестник. 2006. Т.3, № 2. С. 166–186.
2. *Merton R.C.* Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model // Journal of Economic Theory. 1971. № 3. С. 373–413.
3. *Zhmykhova T.V.* Consumer fund control with opportunity to invest in a financial (B, S)-market and charges on advertisement // Visn. Ser. Fiz.- Mat. Nauky Kyiv. Univ. im. Tarasa Shevchenka. 2011. № 3. С. 149–152.
4. *Zhmykhova T.V.* The control of cumulative-consumer fund with investments in the financial (B, S)-market and advertising costs, provided that the premium is incidental // Prykl. Stat. Aktuarna Finans. Mat. 2011. № 1–2. С. 21–26.
5. *Sornette D.O.* Why stock markets crash. Princeton: Princeton University Press, 2002. 448 p.
6. *Бондарев Б.В., Баев А.В.* Процесс Орнштейна–Уленбека и его применения в задачах финансовой математики // Прикладная статистика. Актуарная и финансовая математика. 2002. № 1. С. 3–28.
7. *Бондарев Б.В., Баев А.В.* О вероятности банкротства страховой компании, функционирующей на (*B*, *S*)-рынке // Теория вероятностей и математическая статистика. 2006. Вып. 74. С. 10–22.
8. *Крылов Н.Б., Розовский Б.Л.* О стохастических эволюционных процессах // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. 1979. Т. 14. С. 72–147.
9. *Alexandrova O.V.* Group analysis of the Ito Stochastic system // Differential Equations and Dynamical Systems. 2006. Vol. 14, № 3/4. P. 255–279.
10. *Александрова О.В.* Симметрия и первые интегралы систем стохастических дифференциальных уравнений Ито // Вестник НовГУ им. Ярослава Мудрого. Сер. Физ.-мат. науки. Великий Новгород, 2013. Т. 1, № 75. С. 54–60.
11. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. М.: Знание: Новое в жизни, науке и технике, 1989. № 8. 44 с.

The value company capital with the risk price asset described by Ornstein–Uhlenbeck model as the solution of stochastic differential equation

O. V. Aleksandrova, T. V. Zhmykhova
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture
2, Derzhavina st., Makeevka, Donetsk People's Republic, 286123, Russia
mailbox@donnasa.org, +38 062 343 70 33

In the article the mathematical model of company capital which invests the part of its free capital in risk assets (shares), which can be defined as the assets of uncertain return, and the rest is invested in the riskless assets (bank deposit), i.e. the assets with the certain return, is constructed. The evolution of the risk asset price is described by Ornstein–Uhlenbeck model. The company works just with its capital, mobilization of external funds is not considered. The solution of the equation showing the dynamic of investment company capital was founded in the explicit form by group analysis methods of stochastic differential equations. Some information from the group analysis theory of the stochastic differential equations is presented. The knowledge-based solution in the explicit form allows the company to solve the problems with the invested loan financing arrangements and move away from investing activities to the long-term capital by short-term loans characterized the international practice.

Keywords: *financial (B, S)-market; risky and risk-free assets; Ornstein–Uhlenbeck model; group analysis; stochastic differential equation.*