ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Математика. Механика. Информатика Вып. 3(50)

УДК 517.956

Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и одной сверхсингулярной точкой

Б. М. Шоймкулов
Таджикский национальный университет
Таджикистан, 734025, г. Душанбе, ул. Рудаки, 17
boitura@mail.ru; +992 919-43-11-84

Исследована переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и одной сверхсингулярной точкой в трехмерном пространстве. Найдено условие совместности для переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и одной сверхсингулярной точкой в трехмерном пространстве. При выполнении условий совместности найдены интегральные представления многообразия решений в явном виде через одну произвольную постоянную, для которой можно поставить задачи с начальными данными (задачи типа Коши).

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения; системы дифференциальных уравнений; частные производные; переопределенная; сингулярные; сверхсингулярные; точка.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-3-17-23

Пусть область D является параллелепипедом
$D=\{(x,y):0<x<a_0, 0<y<b_0, 0<z<c_0\}$,
ограниченной поверхностями

$$\Gamma_1=\{0<x<a_0, y=0, z=0\},$$
$$\Gamma_2=\{0<y<b_0, x=0, z=0\},$$
$$\Gamma_3=\{0<z<c_0, x=0, y=0\}.$$

В области D рассмотрим систему вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{xa_1(x,y,z)}{r}u+\dfrac{f_1(x,y,z)}{r},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{ya_2(x,y,z)}{r}u+\dfrac{f_2(x,y,z)}{r},\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{za_3(x,y,z)}{r^\gamma}u+\dfrac{f_3(x,y,z)}{r^\gamma},\end{cases} \quad (1)$$

где $\gamma>1$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $a_i(x,y,z), f_i(x,y,z) (1\le i\le 3)$ – заданные функции, $u(x,y,z)\in C^1(D)$ – неизвестная функция.

Предположим, что коэффициенты и правые части системы (1) удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} &a_1, a_3, f_1, f_3 \in C_y^{'}(\overline{D})\\ &a_2, a_3, f_2, f_3 \in C_x^{'}(\overline{D}) \\ &a_1, a_2, f_1, f_2 \in C_z^{'}(\overline{D})\end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{ya_2}{r}]=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{xa_1}{r}], \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{za_3}{r^\gamma}]=\frac{\partial}{\partial z}[\frac{xa_1}{r}], \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\frac{za_3}{r^\gamma}]=\frac{\partial}{\partial z}[\frac{xa_2}{r}], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &r^2\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2}{r}]+ya_2f_1=\\ &=r^2\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_1}{r}]+xa_1f_2,\end{aligned} \quad (6)$$

$$r^{\gamma+1}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3}{r^\gamma}]+za_3 f_1 = \\ = r^{\gamma+1}\frac{\partial}{\partial z}[\frac{f_1}{r}]+xa_1 f_3, \quad (7)$$

$$r^{\gamma+1}\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_3}{r^\gamma}]+za_3 f_2 = \\ = r^{\gamma+1}\frac{\partial}{\partial z}[\frac{f_2}{r}]+ya_2 f_3. \quad (8)$$

Условия (2)–(8) для системы (1) являются условиями совместности (разрешимости), при их выполнении интегрирование системы (1) начнем с третьего уравнения.

В этом случае однородное уравнение, третье уравнение системы (1), имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{za_3(x,y,z)}{r^\gamma},$$

и после преобразования имеем

$$\frac{\partial \ln u}{\partial z}=\frac{za_3(x,y,z)}{r^\gamma}. \quad (9)$$

В равенстве (9) выражение $\frac{za_3(x,y,z)}{r^\gamma}$ в точке $r=0$ неинтегрируемо, поэтому интегрируя выражение

$$\frac{z(a_3(x,y,z)-a_3(0,0,0))}{r^\gamma}+\frac{za_3(0,0,0)}{r^\gamma}$$

для нахождения $u(x,y,z)$ получим

$$\ln u(x,y,z)=\int_0^z \frac{s(a_3(x,y,s)-a_3(0))}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^\gamma}ds - \\ -\frac{a_3(0)}{(\gamma-2)(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{\gamma-2}}+\psi_1(x,y). \quad (10)$$

После

$$u(x,y,z)=\exp(\omega_3(x,y,z)- \\ -a_3(0)\omega_3^\gamma(x,y,z))\psi_1(x,y), \quad (11)$$

где

$$\omega_3(x,y,z)=\int_0^z \frac{s(a_3(x,y,s)-a_3(0))}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^\gamma}ds,$$

$$\omega_3^\gamma(x,y,z)=\frac{1}{(\gamma-2)(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{\gamma-2}},$$

$a_3(0)=a_3(0,0,0)$, $\psi_1(x,y)$ – произвольно-дифференцируемая функция переменных x и y.

Далее, предположим, что в равенстве (11) произвольная функция $\psi_1(x,y)$ также зависит от переменной z, тогда дифференцируем равенство (11):

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0)\omega_3^\gamma(x,y,z))\cdot \\ \cdot[\frac{za_3(x,y,z)}{r^\gamma}\psi_1(x,y)+\psi'_1(x,y)].$$

Подставляя значение $\frac{\partial u}{\partial z}$ в третьем уравнении системы (1), учитывая (11), имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0)\omega_3^\gamma(x,y,z))\cdot \\ \cdot[\frac{za_3(x,y,z)}{r^\gamma}\psi_1(x,y)+\psi'_1(x,y)]= \\ =\frac{za_3(x,y,z)}{r^\gamma}\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0)\cdot \\ \cdot\omega_3^\gamma(x,y,z))\psi_1(x,y)+\frac{f_3(x,y,z)}{r^\gamma}.$$

Отсюда

$$\psi'_1(x,y)=\frac{f_3(x,y,z)}{r^\gamma}\exp(-\omega_3(x,y,z)+ \\ +a_3(0)\omega_3^\gamma(x,y,z)).$$

После интегрирования, получим

$$\psi_1(x,y)=\int_0^z \frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^\gamma}\cdot \\ \cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+ \\ +a_3(0))\omega_3^\gamma(x,y,s))ds+\psi_2(x,y), \quad (12)$$

где $\psi_2(x,y)$ – произвольно-дифференцируемая функция переменных x и y.

Подставляя значение $\psi_1(x,y)$ из (12) в (11) находим общее решение третьего уравнения системы (1) в виде

$$u(x,y,z)=\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0)\cdot \\ \cdot\omega_3^\gamma(x,y,z))[\psi_2(x,y)+\int_0^z \frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^\gamma}\cdot \\ \cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0))\omega_3^\gamma(x,y,s))ds]. \quad (13)$$

Предположим, что функции $a_3(x,y,z)$ и $f_3(x,y,z)$ удовлетворяют следующим:

1). Функция $a_3(x,y,z)$ в окрестности точек $r=0$ удовлетворяет условию типа Гёлдера:

$$|a_3(x,y,z)-a_3(0)|\le H_1(r^{\gamma_1}), \\ H_1=const>0, \gamma_1>\gamma-1. \quad (14)$$

2). Функция $f_3(x,y,z)$ в окрестности точек $r=0$ обращается в нуль с асимптотической формулой

$$f_3(x,y,z)=o(r^{\gamma_2}),\gamma_2>\gamma-1. \qquad (15)$$

3). $a_3(0)>0.$

Тогда интегралы равенства (13) сходятся.

В этом случае дифференцируя (13) и подставляя во второй уравнение системы (1) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))\cdot$$
$$\{(\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial y}+\frac{ya_3(0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+ \qquad (16)$$
$$+a_3(0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}+$$
$$+\int_0^z\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+$$
$$+a_3(0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))]ds\}=$$
$$=\frac{ya_2(x,y,z)}{r}\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0)\cdot$$
$$\cdot\omega_3^{\gamma}(x,y,z))[\psi_2(x,y)+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\cdot$$
$$\cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+$$
$$\cdot a_3(0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+\frac{f_2(x,y,z)}{r}.$$

Преобразуя равенство (16), имеем:

$$\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}=(\frac{ya_2(x,y,z)}{r}-\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial y}-$$
$$-\frac{ya_3(0,0,0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y)+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\cdot$$
$$\cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+$$
$$+\frac{f_2(x,y,z)}{r}\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0))\cdot$$
$$\cdot\omega_3^{\gamma}(x,y,z))-\int_0^z\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\cdot \qquad (17)$$
$$\cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))]ds\}.$$

В равенстве (17) левая часть зависит от переменных x и y, а правая часть зависит от переменных x, y и z. Отсюда получим условии совместности:

$$\frac{\partial}{\partial z}[(\frac{ya_2(x,y,z)}{r}-\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial y}-\frac{ya_3(0)}{r^{\gamma}})\cdot$$
$$\cdot[\psi_2(x,y)+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\cdot$$
$$\cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+ \qquad (18)$$
$$+\frac{f_2(x,y,z)}{r}\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0))\cdot$$
$$\cdot\omega_3^{\gamma}(x,y,z))]=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_3(x,y,z)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{\gamma}}\cdot$$
$$\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0))\omega_3^{\gamma}(x,y,z))],$$

которое эквивалентно условиям совместности системы (1). Используя условие (18), получим дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}=(\frac{ya_2(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{ya_3(0)}{(\sqrt{x^2+y^2})^{\gamma}})\cdot \qquad (19)$$
$$\cdot\psi_2(x,y)+\frac{f_2(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\exp(a_3(0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0)).$$

Далее, дифференцируем равенство (13) по переменной x и после подставляем его в первое уравнение системы (1):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0)\omega_3^{\gamma}(x,y,z))\cdot$$
$$\cdot\{(\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial x}+\frac{xa_3(0)}{r^{\gamma}})[\psi_2(x,y)+$$
$$+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+$$
$$+a_3(0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial x}+$$
$$+\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}}\exp(-\omega_3(x,y,s)+$$
$$+a_3(0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))]ds\}=$$
$$=\frac{xa_1(x,y,z)}{r}\exp(\omega_3(x,y,z)-a_3(0))\cdot$$
$$\cdot\omega_3^{\gamma}(x,y,z))[\psi_2(x,y)+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^{\gamma}} \qquad (20)$$
$$\cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0))\omega_3^{\gamma}(x,y,s))ds]+$$
$$+\frac{f_1(x,y,z)}{r}.$$

Отсюда после некоторых преобразований получим равенство

$$\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial x}=(\frac{xa_1(x,y,z)}{r}-\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial x}-$$
$$-\frac{xa_3(0)}{r^\gamma})[\psi_2(x,y)+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^\gamma}\cdot$$
$$\cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0))\omega_3^\gamma(x,y,s))ds]+$$
$$+\frac{f_1(x,y,z)}{r}\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0)\cdot$$
$$\cdot\omega_3^\gamma(x,y,z))-\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^\gamma}\cdot \quad (21)$$
$$\cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0))\omega_3^\gamma(x,y,s))]ds.$$

Равенство (21) дифференцируем по переменной z:

$$\frac{\partial}{\partial z}\{(\frac{xa_1(x,y,z)}{r}-\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial x}-$$
$$-\frac{xa_3(0)}{r^\gamma})[\psi_2(x,y)+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^\gamma}\cdot$$
$$\cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0))\omega_3^\gamma(x,y,s))ds]+$$
$$+\frac{f_1(x,y,z)}{r}\exp(-\omega_3(x,y,z)+a_3(0)\cdot$$
$$\cdot\omega_3^\gamma(x,y,z))-\int_0^z\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^\gamma}\cdot \quad (22)$$
$$\cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+$$
$$+a_3(0))\omega_3^\gamma(x,y,s))]ds\}=0.$$

Таким образом, получим условие

$$\frac{\partial}{\partial z}\{(\frac{xa_1(x,y,z)}{r}-\frac{\partial\omega_3(x,y,z)}{\partial x}-$$
$$-\frac{xa_3(0)}{r^\gamma})[\psi_2(x,y)+\int_0^z\frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^\gamma}\cdot$$
$$\cdot\exp(-\omega_3(x,y,s)+a_3(0))\omega_3^\gamma(x,y,s))ds]+$$
$$+\frac{f_1(x,y,z)}{r}\exp(-\omega_3(x,y,z)+ \quad (23)$$
$$+a_3(0)\omega_3^\gamma(x,y,z))\}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y,z)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^\gamma}\exp(-\omega_3(x,y,z)+$$
$$+a_3(0))\omega_3^\gamma(x,y,z))],$$

эквивалентное условиям совместности системы (1). Из этого условия получим дифференциальное уравнение по переменной x:

$$\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial x}=(\frac{xa_1(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xa_3(0)}{(\sqrt{x^2+y^2})^\gamma})\cdot$$
$$\cdot\psi_2(x,y)+\frac{f_1(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\exp(\omega_3^\gamma(x,y,0)). \quad (24)$$

Из равенств (24) и (19) получим систему вида

$$\begin{cases}\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial x}=(\frac{xa_1(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xa_3(0)}{(\sqrt{x^2+y^2})^\gamma})\cdot\\ \cdot\psi_2(x,y)+\frac{f_1(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\exp(a_3(0)\omega_3^\gamma(x,y,0)),\\ \frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}=(\frac{ya_2(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{ya_3(0)}{(\sqrt{x^2+y^2})^\gamma})\cdot\\ \cdot\psi_2(x,y)+\frac{f_2(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\exp(a_3(0)\omega_3^\gamma(x,y,0)).\end{cases} \quad (25)$$

Интегрирование системы (25) начнем со второго уравнения. Однородное уравнение, второе уравнение системы (25), преобразуем в виде

$$\frac{\partial\ln\psi_2(x,y)}{\partial y}=\frac{ya_2(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{ya_3(0)}{(\sqrt{x^2+y^2})^\gamma}.$$

Интегрируя, имеем

$$\ln\psi_2(x,y)=\int_0^y\frac{\tau(a_2(x,\tau,0)-a_2(0))}{\sqrt{x^2+\tau^2}}d\tau+$$
$$+a_2(0)\sqrt{x^2+y^2}+$$
$$+\frac{a_3(0)}{(\gamma-2)(\sqrt{x^2+y^2})^{\gamma-2}}+\psi_1(x),$$

после получим

$$\psi_2(x,y)=\exp(\omega_2(x,y,0)+a_2(0)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{x^2+y^2}+a_3(0)\omega_3^\gamma(x,y,0))\psi_1(x), \quad (26)$$

где

$$\omega_2(x,y,0)=\int_0^y\frac{\tau(a_2(x,\tau,0)-a_2(0))}{\sqrt{x^2+\tau^2}}d\tau,$$
$$\omega_3^\gamma(x,y,0)=\frac{1}{(\gamma-2)(\sqrt{x^2+y^2})^{\gamma-2}},$$

$\psi_1(x)$ – произвольно дифференцируемая функция.

Равенство (26) дифференцируем по переменной y:

$$\frac{\partial\psi_2(x,y)}{\partial y}=\exp(\omega_2(x,y,0)+a_2(0)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{x^2+y^2}+a_3(0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0))\cdot$$
$$\cdot\{(\frac{ya_2(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{ya_3(0)}{(\sqrt{x^2+y^2})^{\gamma}})\psi_1(x)+\psi'_1(x)\}.$$

Подставляя во второе уравнение системы (25), получим

$$\psi'_1(x)=\frac{f_2(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\exp(-\omega_2(x,y,0)-$$
$$-a_2(0)\sqrt{x^2+y^2}). \tag{27}$$

После интегрирования находим $\psi_1(x)$ в виде

$$\psi_1(x)=\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,0)}{\sqrt{x^2+\tau^2}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)-$$
$$-a_2(0)\sqrt{x^2+\tau^2})d\tau+\psi_2(x). \tag{28}$$

Учитывая равенство (28), получим $\psi_2(x,y)$ в виде

$$\psi_2(x,y)=\exp(\omega_2(x,y,0)+a_2(0)\sqrt{x^2+y^2}+$$
$$+a_3(0)\omega_3^{\gamma}(x,y,0))\{\psi_2(x)+$$
$$+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,0)}{\sqrt{x^2+\tau^2}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)-$$
$$-a_2(0)\sqrt{x^2+\tau^2})d\tau\}. \tag{29}$$

От функции $\psi_2(x,y)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла первому уравнению системы (25), для этого равенство (29) дифференцируем по переменной x и затем подставляя в первое уравнение системы (25), получим:

$$\psi'_2(x)=(\frac{xa_1(x,0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\partial\omega_2(x,y,0)}{\partial x}-\frac{xa_2(0)}{\sqrt{x^2+y^2}})\cdot$$
$$\cdot[\psi_2(x)+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,0)}{\sqrt{x^2+\tau^2}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)+$$
$$-a_2(0)\sqrt{x^2+y^2})d\tau]+$$
$$+\frac{f_1(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\exp(-\omega_2(x,y,0)-a_2(0)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{x^2+y^2})-\int_0^y\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,\tau,0)}{\sqrt{x^2+\tau^2}}\cdot$$
$$\cdot\exp(-\omega_2(x,\tau,0)-a_2(0)\sqrt{x^2+\tau^2})]d\tau. \tag{30}$$

Дифференцируя по переменной y, получим условие

$$\frac{\partial}{\partial y}\{(\frac{xa_1(x,0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\partial\omega_2(x,y,0)}{\partial x}-\frac{xa_2(0)}{\sqrt{x^2+y^2}})\cdot$$
$$\cdot[\psi_2(x)+\int_0^y\frac{f_2(x,\tau,0)}{\sqrt{x^2+\tau^2}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0)+$$
$$-a_2(0)\sqrt{x^2+\tau^2})d\tau]+\frac{f_1(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot$$
$$\cdot\exp(-\omega_2(x,y,0)-a_2(0)\sqrt{x^2+y^2})\}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,y,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\exp(-\omega_2(x,y,0)+$$
$$-a_2(0)\sqrt{x^2+y^2})]. \tag{31}$$

При выполнении условия (31), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\psi'_2(x)=(a_1(x,0,0)-a_2(0))\psi_2(x)+$$
$$+\frac{f_1(x,0,0)}{x}\exp(-\omega_2(x,0,0)+$$
$$-a_2(0)x). \tag{32}$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$\psi'_2(x)=(a_1(x,0,0)-a_2(0))\psi_2(x).$$

После, интегрируя, получим

$$\psi_2(x)=\exp(\omega_1(x,0,0)-$$
$$-a_2(0)x)c_1, \tag{33}$$

где $\omega_1(x,0,0)=\int_0^x a_1(t,0,0)dt$ и c_1 – произвольная постоянная.

Дифференцируя равенство (33), считая что c_1 зависит от переменной x, и подставляя в (32), получим дифференциальное уравнение вида

$$c_1'=\frac{f_1(x,0,0)}{x}\exp(-\omega_1(x,0,0)-\omega_2(x,0,0)).$$

Интегрируя, получим

$$c_1=\int_0^x\frac{f_1(t,0,0)}{t}\exp(-\omega_1(t,0,0)-$$
$$-\omega_2(t,0,0))dt+c. \tag{34}$$

Учитывая равенство (34), находим $\psi_2(x)$ в виде

$$\psi_2(x)=\exp(\omega_1(x,0,0)+a_2(0)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{x^2+y^2})[c+\int_0^x\frac{f_1(t,0,0)}{t}\cdot$$
$$\cdot\exp(-\omega_1(t,0,0)-\omega_2(t,0,0))dt]. \tag{35}$$

Подставим в равенство (29):

$$\psi_2(x,y) = \exp(\omega_2(x,y,0) + a_2(0)\cdot \cdot\sqrt{x^2+y^2} + a_3(0)\omega_3^\gamma(x,y,0))\cdot \cdot\{\exp(\omega_1(x,0,0) + a_2(0)\sqrt{x^2+y^2})[c + +\int_0^x \frac{f_1(t,0,0)\exp(-\omega_1(t,0,0))}{t\cdot\exp(\omega_2(t,0,0))}dt] + +\int_0^y \frac{f_2(x,\tau,0)}{\sqrt{x^2+\tau^2}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0) - -a_2(0)\sqrt{x^2+\tau^2})d\tau\}. \quad (36)$$

Подставляя в равенство (13), общее решение системы (1) находим в виде

$$u(x,y,z) = \exp(\omega_3(x,y,z) - -a_3(0)\omega_3^\gamma(x,y,z))\cdot \cdot\{\exp(\omega_2(x,y,0) + a_2(0)\sqrt{x^2+y^2} + +a_3(0)\omega_3^\gamma(x,y,0))[\exp(\omega_1(x,0,0) + +a_2(0)x)(c + \int_0^x \frac{f_1(t,0,0)}{t}\cdot \cdot\exp(-\omega_1(t,0,0) - \omega_2(t,0,0))dt) + +\int_0^y \frac{f_2(x,\tau,0)}{\sqrt{x^2+\tau^2}}\exp(-\omega_2(x,\tau,0) - -a_2(0)\sqrt{x^2+\tau^2})d\tau] + +\int_0^z \frac{f_3(x,y,s)}{(\sqrt{x^2+y^2+s^2})^\gamma}\exp(-\omega_3(x,y,s) + +a_3(0))\omega_3^\gamma(x,y,s))ds\}. \quad (37)$$

Теорема. *Пусть коэффициенты и правые части системы (1) удовлетворяют условиям (2),(3),(4),(5),(6),(7),(8),(14),(15),(18). Функция* $a_2(x,y,0)$ *в окрестности точек* $r=0$ *удовлетворяет условии типа Гёлдера:*

$$|a_2(x,y,0) - a_2(0)| \le H_2(r^{\gamma_3}),$$
$$H_2 = const > 0, \gamma_3 > 0.$$

Функции $f_2(x,y,0)$ *и* $f_1(x,0,0)$ *обращаются в нуль с асимптотическими формулами*

$$f_2(x,y,0) = 0(\sqrt{x^2+y^2})^{\gamma_4}, \gamma_4 > 0,$$
$$f_1(x,0,0) = 0(x^{\gamma_5}), \gamma_5 > 0.$$

Кроме того $a_3(0) > 0$. *Тогда любое решение системы (1) из класса* $C^1(D)$ *представимо в виде (37), где* c *– произвольная постоянная.* Заметим, что решение вида (37) в окрестности точек $r=0$ ораничено.

Список литературы

1. *Seiler W.M.* Involution. The Formal Theory of Differential Equations and its Applications in Computer Algebra, Springer, 2010. URL: https://www.springer.com/gp/book/9783642012860.
2. *Wilczynski E.J.* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. Leipzig: B.G. Teubner, 1906. 324 p.
3. *Appel P.* Fonctons hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d’Hermite / P. Appel, M.J. Kampe de Feriet. Paris: Gauthier-Villars. 1926. 434 p.
4. *Архутик Г.М.* Регулярная особая точка линейных уравнений в полных дифференциалах высших порядков // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979. № 3. С. 46–54.
5. *Begehr H.* Transformations, transmutations and kernel functions. Vol.2. Harlow: Longman, 1993. 268 p.
6. *Пиров Р.* Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости // Крайові задачі для диференціалних рівнянь. Чернівці: Прут, 2006. Вып. 14. С. 313–320.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
8. *Раджабов Н.* Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. Душанбе: Изд-во ТГУ. Ч. 1, 1980. 126 с., ч. 2, 1981. 170 с., ч. 3. 1982. 170 с.
9. *Раджабов Н.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверх сингулярными коэффициентами: учеб. пособие по спецкурсу. Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. 236 с.
10. *Шоймкулов Б.М.* Интегральные представление многообразия решений некоторых переопределенных систем двух уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами // Вестник педагогического университета (серия естественных наук) / ТГПУ, ч. 1. Душанбе, 1999. № 5. С. 102–105.
11. *Шоймкулов Б.М.* Интегральные представления многообразия решений некоторых переопределенных систем трех уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками в полярных координатах // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения: сб. науч. статей / ТГПУ. Душанбе, 1999. Вып. 8. С. 105–108.

12. *Шоймкулов Б.М.* Интегральные представление многообразия решений некоторых переопределенных систем трех уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости // Диффе-ренциальные и интегральные уравнения и их приложения: сб. науч. статей / ТГПУ. Душанбе, 1999. Вып. 8. С. 109–111.
13. *Шоймкулов Б.М.* Интегральные представления многообразия решений некоторых переопределенных систем двух уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения: сб. науч. статей / ТГПУ. Душанбе, 1999. Вып. 8. С. 112–114.
14. *Шоймкулов Б.М.* Об одной переопределенной системе уравнений второго порядка с сингулярной точкой // Вестник педагогического университета (серия естественных наук) / ТГПУ. Душанбе, 2001. № 3. С. 42–43.
15. *Шоймкулов Б.М.* Об одной переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами // Вестник педагогического университета (серия естественных наук) / ТГПУ. Душанбе, 2003. № 2. С. 50–52.
16. *Шоймкулов Б.М.* Об одной переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярной точкой // Вестник педагогического университета (серия естественных наук) / ТГПУ. Душанбе, 2003. № 2. С. 53–57.
17. *Шоймкулов Б.М.* Линейные неоднородные переопределенные системы трех уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой // Вестник Национального университета (серия естественных наук) / ТГНУ. Душанбе: "Сино", 2003. № 4(18). С. 8–12.
18. *Шоймкулов Б.М.* О некоторых переопределенных системах трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и с одной сингулярной точкой // Вестник педагогического университета (серия естественных наук) / ТГПУ. Душанбе, 2005. № 3. С. 67–70.
19. *Шоймкулов Б.М.* Линейная переопределенная система второго порядка с одной сингулярной точкой // Вестник Национального университета (серия естественных наук) / Душанбе: ТГНУ "Сино", 2005. № 3(26). С. 3–10.
20. *Шоймкулов Б.М.* Об одной переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных с одной сингулярной и с одной сверхсингулярной точкой // Вестник педагогического университета (серия естественных наук) / ТГПУ. Душанбе, 2009. № 1(33). С. 101–105.
21. *Шоймкулов Б.М.* О некоторых переопределенных систем дифференциальных уравнений второго порядка с одной сингулярной линией // Вестник Таджикского национального университета (серия естественных наук) / ТНУ, Душанбе, 2010. № 3(59). С. 113–118.
22. *Шоймкулов Б.М.* О некоторых переопределенных системах дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сверхсингулярной линией в общем случае // Вестник Таджикского национального университета (серия естественных наук) / ТНУ. Душанбе, 2017. № 1/2. С. 46–52.
23. *Шоймкулов Б.М.* К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверх сингулярными линиями // Вестник Таджикского национального университета (серия естественных наук). Душанбе, 2018. № 3. С. 32–43.

Over determined system of differential equations of the first order with one singularand one supersingular points

B. M. Shoimkulov
Tajik State University; 17, Rudaki st., Dushanbe, 734025, Tajikistan; boitura@mail.ru; +992 919-43-11-84

In this paper, we investigate over determined system of first-order partial differential equations with one singular and one super singular points in three-dimensional space. A compatibility condition is found for redefined systems of first-order partial differential equations with one singular and one super singular points in three-dimensional space. If the compatibility condition is met, integral representations of a variety of solutions are found explicitly in terms of a single arbitrary constant for which initial data problems (Cauchy-type Problems) can be set.

Keywords: *differential equations; systems of differential equations; partial derivatives; redefined; singular; supersingular; point.*