МАТЕМАТИКА

УДК 512.54

О конечных группах с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой подгруппе

Я. Д. Половицкий[1], **Т. М. Коневских**[1]
[1]Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
alg@psu.ru; 8(342) 239−63−21

Рассматриваются конечные группы, в каждой из которых G существует истинная подгруппа S, такая, что пересечение любых двух неинцидентных подгрупп группы G, не содержащихся в S, циклическое (SC-группа). Получен ряд свойств таких групп. Описаны некоторые подклассы класса конечных SC-групп.

Ключевые слова: *группа; циклическая группа; пересечение; инцидентная подгруппа.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-3-5-16

Введение

В работе [1] описаны два класса групп с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп (C_N-групп) – конечные разрешимые C_N-группы и бесконечные бинарно конечные C_N-группы. В настоящей работе рассматривается класс конечных SC-групп – групп, в которых цикличность пересечения требуется только для всех неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой выделенной подгруппе (сепарирующей подгруппе, введенной С. Н. Черниковым в [2]), включающей в себя класс конечных C_N-групп. Оба эти класса связаны с рассмотренным в [3] классом CIM-групп – групп с циклическими пересечениями максимальных подгрупп. В настоящей работе получен ряд свойств SC-групп и получено описание конечных нильпотентных SC-групп и конечных SC-групп с циклическими силовскими подгруппами.

Наряду со стандартными используются и следующие обозначения:

$A \gtrless B$ – подгруппы A и B инцидентны;

$A \not\gtrless B$ – подгруппы A и B не инцидентны;

группа типа $n \times m$ – прямое произведение циклических групп порядков n и m.

Основные определения и некоторые свойства SC-групп

Определение 1. Пусть в группе G существует такая истинная подгруппа S, что либо для любых двух неинцидентных подгрупп A и B группы G, не содержащихся в S, пересечение $A \cap B$ является циклической группой, либо таких пар (A, B) в G нет. Такую группу G назовем *SC-группой*, или группой с *SC-условием*, а S – ее *сепарирующей* подгруппой (понятие сепарирующей подгруппы относительно некоторого набора теоретико-групповых свойств введено в [2]).

Очевидно, в определении 1 обе подгруппы A и B можно считать нециклическими.

Определение 2 (см. [1])**.** Группу, в которой либо пересечение любых двух ее неинцидентных подгрупп является циклической группой, либо любые две подгруппы инцидентны, назовем *C_N-группой.*

© Половицкий Я. Д., Коневских Т. М., 2020

Замечание 1. Очевидно, каждая C_N-группа является SC-группой (достаточно взять $S = 1$). Также SC-группами являются конечные группы с единственной нециклической максимальной подгруппой.

Замечание 2. Так как любая истинная подгруппа SC-группы G, содержащая ее сепарирующую подгруппу, также, очевидно, является сепарирующей, то во всякой конечной SC-группе есть сепарирующая максимальная подгруппа.

Определение 3. Пусть G – конечная SC-группа, S – ее сепарирующая максимальная подгруппа. Тогда G назовем группой одного из следующих типов:

Типа 1: если $S \ntriangleleft G$;

Типа 2: если $S \triangleleft G$. Тогда $|G/S| = p$ – простое число. Пусть P – силовская p-подгруппа группы G.

Тип 2 разобьем на два подтипа:

Тип 2*a*: G – типа 2, $P \ntriangleleft G$;

Тип 2*b*: G – типа 2, $P \triangleleft G$.

Замечание 3. В силу замечания 2 и определения 3 каждая конечная SC-группа G является группой хотя бы одного из типов 1, $2a$ или $2b$. Но так как в G может быть несколько сепарирующих подгрупп, то G одновременно может быть группой нескольких из этих типов.

Лемма 1. Всякая SC-группа G типа 1 является конечной C_N-группой.

Доказательство. В силу определения 3 группа G конечная и в ней существует такая сепарирующая подгруппа S, что $S \lessdot G$ (1) и $S \ntriangleleft G$ (2). Отсюда следует, что $S = N(S)$ и потому, учитывая (2), имеем: $|cl\, S| \geq 3$. Поэтому $cl\, S \supset \{S^{x_1}, S^{x_2}, S^{x_3}\}$ (3), где все S^{x_i} различны ($i = \overline{1,3}$). Нетрудно видеть, что все S^{x_i} являются также сепарирующими подгруппами группы G, а в силу (1) $S^{x_i} \lessdot G$.

Поэтому любые две из подгрупп (3) не содержатся в третьей из этих подгрупп, а тогда, так как она – сепарирующая подгруппа, из SC-условия следует, что $(S^{x_i} \cap S^{x_j}) \cong Z_{n_j}$ (4), $i, j = \overline{1,3}$, $i \neq j$.

Пусть A и B – истинные нециклические подгруппы группы G и $A \not\gtrless B$ (5). Если они содержатся в разных подгруппах из (3) или обе не содержатся в одной из них, то в силу (4) или SC-условия $(A \cap B) \cong Z_t$ (6).

Пусть $A \subset S^{x_i}$ (7), $B \subset S^{x_i}$ и $(A \cap B) = C$ – нециклическая группа.

Тогда в силу (4) при $i \neq j$ $A \not\subset S^{x_i}$ (8) и $B \not\subset S^{x_j}$ (9) (поскольку A и B нециклические), и, так как S^{x_j} – сепарирующая подгруппа группы G, то выполняется (6), то есть подгруппа C циклическая, вопреки предположению. Наконец, если выполняется (7), а $B \not\subset S^{x_j}$ при любых $j = \overline{1,3}$, то в силу (4) и нецикличности A при $i \neq j$ выполняются (8) и (9), а тогда, как показано выше, выполняется (6). Значит, C – циклическая группа, и ввиду произвольности выбора A и B (с условием (5)) G является C_N-группой. □

Замечание 4. Если G – SC-группа, S – ее сепарирующая подгруппа, H – нециклическая подгруппа группы G и $H \not\subset S$, то в силу определения 1 любые две подгруппы группы G, содержащие H, инцидентны. Поэтому, если $|G| < \infty$ и $H \triangleleft G$, то $G/H \cong Z_{p^n}$ – примарная циклическая группа.

Лемма 2. Пусть G – конечная группа, $N \triangleleft G$, $|g_1 N| = k$ (1), $\pi(k) = \pi$ (2). Тогда существует такой -элемент $g \in \langle g_1 \rangle = B$ (3), что $gN = g_1 N$ (4), $\pi(|g|) = \pi$ (5).

Доказательство. Рассмотрим $< g_1 N >= H/N$ (6). В силу (1) и (6) $k\ |g_1|$ и $|H/N| = k$ (7). Из (1) – (3) нетрудно видеть, что найдутся такие элементы $g \in B$ (8) и $b \in B$ (9), что $g_1 = gb$ (10), выполняется (5) и $(|b|, k) = 1$ (11). В силу (3), (6) и (9) $b \in H$, а тогда из (7) следует, что $b^k \in N$ (12). Но в силу (11) $< b^k >=< b >$, а тогда из (12) следует, что $b \in N$. Отсюда и из (10) следует справедливость (4). □

Следствие. Если G/N – циклическая π-группа, то $G = N < g >$, где $\pi(g) = \pi(G/N)$.

Лемма 3. Пусть G – SC-группа, S – ее сепарирующая подгруппа. Если $H < G$ и $H \not\subset S$, то H является SC-группой с сепарирующей подгруппой $H \cap S$. Если $N \triangleleft G$ (1) и $N < S$ (2), то G/N – SC-группа с сепарирующей подгруппой S/N.

Доказательство. Справедливость утверждения леммы для H очевидна. Пусть выполняются (1) и (2). Если $R_i/N < G/N$, $R_i/N \not\subset S/N$ $i = 1{,}2$ и $R_1/N \not\gtrless R_2/N$, то $R_i < G$, $R_i \not\subset S$ $(i = 1{,}2)$ и $R_1 \not\gtrless R_2$. Так как G есть SC-группа, то тогда $(R_1 \cap R_2)$ – циклическая группа, и потому $R_1/N \cap R_2/N = (R_1 \cap R_2)/N$ циклическая.

Отсюда следует справедливость последнего утверждения леммы. □

Определение 4. Пусть G – конечная SC-группа, S – ее сепарирующая подгруппа,

$S \lhd G$. Подгруппу $F < G$ назовем *остовом* G, если выполняются следующие условия:
1. $F \le S$; 2. $F \lhd G$; 3. F – нециклическая;
4. F – минимальная подгруппа группы S, удовлетворяющая условиям 1–3.

Замечание 5. Из определения 4 видно, что никакой остов F нельзя представить в виде $F = F_1 \times F_2$, где $F_i \lhd G$, $i = 1,2$ и хотя бы одна F_i нециклическая.

Замечание 6. Если в конечной *SC*-группе G есть нециклическая сепарирующая подгруппа $S \lhd G$, то существует остов F группы G, такой что $F \le S$ (это следует из определения 4).

Лемма 4. Пусть *SC*-группа G типа 2 имеет инвариантную сепарирующую нециклическую максимальную подгруппу S. Для любой $F \le S$ (1) такой, что F нециклическая и $F \lhd G$ (2) найдется такая $A < G$, что
$G = FA$ (3), $\pi(G/F) = \pi(A)$ (4),
$|\pi(A)| \le 2$ (5), $A = < g >$ (6),
$S = F < g^p >$ (7). В частности, выполняются все утверждения леммы, если F – остов G.

Доказательство. В силу определения S выполняется $|G/S| = p$ (8) и потому существует $g_1 \in (G \backslash S)$ (9), такой, что $|g_1| = p^k$ (10). В силу (2) $H = F \cdot < g_1 > \le G$ (11) и H нециклическая (ибо F нециклическая). Пусть существует $x \in G$, что $H^x \ne H$ (12). Так как $|H^x| = |H|$, то ввиду (12) $H^x \not\lesseqgtr H$ (13). В силу (9) и (11) $H \not\subset S$, а тогда из $S \lhd G$ следует, что $H^x \not\subset S$. Отсюда, учитывая (13), из *SC*-условия получаем, что $(H \cap H^x) = T$ – циклическая группа. Но из (2) и (11) следует, что $F \le T$, а по условию леммы F нециклическая. Полученное противоречие доказывает, что (12) невозможно, и потому $H \lhd G$. Так как H нециклическая, то в силу замечания 4 G/H – примарная циклическая группа. Так как в силу (10) и (11) H/F – p-группа, то $|\pi(G/F)| \le 2$ (14).

Положим $H = H_1$ (15). Пусть $G \ne H_1$. Так как $G \ne H_1 \cup S$ (ибо группа не может быть объединением двух своих истинных подгрупп), то существует $g_2 \in \left(G \backslash (H_1 \cup S)\right)$ (16). Тогда $H_2 = F < g_2 > \not\subset S$ (17) и так как $(H_1 \cap H_2) \ge F$ и F нециклическая, то $(H_1 \cap H_2)$ – нециклическая группа. Отсюда и из (13), (15), (17) и *SC*-условия следует, что $H_1 \gtreqless H_2$, и, поскольку в силу (16) и (17) $H_2 \not\subset H_1$, то $H_1 < H_2$. Пусть уже построена цепочка подгрупп $H_1 < H_2 < \ldots < H_k$ (18) таких, что $H_i = F \cdot < g_i >$ (19) и $g_i \in \left(G \backslash (H_{i-1} \cup S)\right)$ (20), $i = \overline{1,k}$. Если $H_k \ne G$, то, как и выше, показывается, что существует $g_{k+1} \in G$, удовлетворяющий условию (20) при $i = k+1$ и подгруппа H_{k+1} вида (19) при этом же i, причем $H_k < H_{k+1}$, то есть цепочка (18) продолжается подгруппой H_{k+1}. Так как $|G| < \infty$, то через конечное число шагов получим, что эта цепочка оборвется, и потому при некотором $m \in N$ $H_m = G$, то есть $G = F \cdot < g_m >$ (21). Введем обозначение: $\pi(G/F) = \pi$ (22). Тогда ввиду (22) и (21) $\pi(|g_m F|) = \pi$ (23) и в силу следствия леммы 2 существует $g \in G$, что $\pi(|g|) = \pi$ (24) и $G = F \cdot < g >$ (25). Если $A = < g >$ (26), то в силу (24) $\pi(A) = \pi$ (27). Теперь из (25) и (26) следует (3) и (6), из (22) и (27) получаем справедливость (4), а из (4) и (14) – справедливость (5). Теперь из (1), (3), (6) и (8) получаем, что $g^p \in S$, а тогда справедливо (7). □

Следствие 1. Пусть *SC*-группа G типа 2 имеет остов F, $G = F \leftthreetimes A$ (1), $(|F|, |A|) = 1$ (2), $A = P \times Q$ (3), $P \cong Z_{p^n}$ (4), $Q \cong Z_{q^m}$ (5), S – сепарирующая максимальная подгруппа группы G, $P \not\subset S$ (6), $S \lhd G$ (7). Тогда для любой A_1, такой что $P < A_1 \le A$ (8) подгруппа $G_1 = F \leftthreetimes A_1$ (9) является *SC*-группой типа 2 с сепарирующей подгруппой $S_1 = F \leftthreetimes A_2$ (10), где $A_2 < A_1$, $|A_1/A_2| = p$ (11) и F является остовом и подгруппы G_1, группы G_1 и G – обе либо типа $2a$, либо типа $2b$.

Доказательство. Из условий следствия 1 видно, что $G' \subset F$ (12) и $|G/S| = p$ (13). Так как в силу (9), (6) и (8) $G_1 \not\subset S$ (14), то в силу леммы 3 G_1 является *SC*-группой с сепарирующей подгруппой $S_1 = (S \cap G_1) \lhd G_1$ (15). В силу (13), (14) и (15) ${}^{G}/_{S} = {}^{G_1 S}/_{S} \cong {}^{G_1}/_{G_1 \cap S} = {}^{G_1}/_{S_1}$ и в силу (13) $|G_1/S_1| = p$ (16). В силу определения остова F группы G имеем: $F \le S$, и потому из (9), (2) и (16) следует справедливость (10) и из (3), (10) и (16) следует справедливость (11). Подгруппа F нециклическая по определению остова. Из (15) и (16) следует, что G_1 – *SC*-группа типа 2. Покажем, что F – остов G_1. Так как $F \le S_1$ и F нециклическая, то существует $F_1 \le F$ (17), что F_1 – остов G_1 и потому $F_1 \lhd G_1$. В силу (3) – (5) и (8) $|\pi(A_1)| = 2$ (18). Если $F_1 < F$ (19), то из (19), (9) и (2) получаем, что $|\pi(G_1/F_1)| \ge 3$, что противоречит одному из утверждений леммы 4 (для группы G_1 с остовом F_1).

Значит, (19) неверно, и в силу (17) $F_1 = F$, то есть F – остов и G_1. Если $P \lhd G_1$, то, так как ввиду (12) $G_1 \lhd G$, то $P \lhd G_1$. Значит, G_1 и G обе либо типа $2a$, либо типа $2b$. □

Следствие 2. Пусть G – конечная *SC*-группа, удовлетворяющая условиям следствия 1 леммы 4, причем возможно и $A = P$. Если $F \cong E_{r^t}$ (20) и в F есть собственная A-допустимая подгруппа R_1, то $t = 2$ (21) и $F = R_1 \times R_2$ (22), где $R_i \lhd G$ (23), $i = 1{,}2$.

Доказательство. Из (20), (1) и (2) следует, что в силу теоремы Машке F представима в виде (22), где R_2 также A-допустима и потому выполняется (23). В силу замечания 5 R_i $(i = 1{,}2)$ – циклические группы, а тогда из (20) следует, что $|R_i| = r$, $(i = 1{,}2)$, и ввиду (22) и (20) выполняется (21). □

Следствие 3. Пусть G – *SC*-группа типа 2, S – ее сепарирующая подгруппа. Если в G существует нециклическая силовская q-подгруппа Q и $Q \lhd G$ (1), то $G = Q \rtimes T$ (2), где $q \nmid |T|$ (3), $T \cong Z_k$ (4), $|\pi(k)| \leq 2$ (5). Если $Q \not\subset S$ (6), то $T \cong Z_{p^n}$ (7) (p – простое число).

Доказательство. Так как ввиду определения 3 $|G| < \infty$, то из условий следствия 3 и теоремы Шура следует справедливость (2) и (3). Если $Q \leq S$, то ввиду (1) и нецикличности Q из леммы 4 при $F = Q$ получаем справедливость (4) и (5). Если же выполняется (6), то из (2) и замечания 4 следует справедливость (7). □

Следствие 4. Пусть G и F удовлетворяют условиям леммы 4. Если $G' = F$ (1), то F – остов группы G.

Доказательство. Пусть F не является остовом группы G. Тогда из условий следствия 4 и определения остова следует, что существует $F_1 < F$ (2), что F_1 – остов G. В силу леммы 4 G/F_1 абелева, а тогда $G' \leq F_1$. Отсюда и из (2) следует, что $G' < F$, в противоречие с (1). Значит, F – остов группы G. □

Лемма 5. Для конечных p-групп условия *SC*, C_N и *CIM* равносильны.

Доказательство. Равносильность условий *SC* и C_N для таких групп следует из теоремы 2 из [1]. Так как всякая C_N-группа является *SC*-группой, то для доказательства леммы достаточно показать, что всякая конечная примарная *SC*-группа P является *CIM*-группой. Пусть S – сепарирующая подгруппа группы P и $S \lessdot P$ (1). Так как P – конечная p-группа, то $S \lhd P$ (2). Пусть $M_i \lessdot P$ (3), $i = 1{,}2$.

Тогда $M_i \lhd P$ (4). Если $M_i \neq S$ при $i = 1{,}2$, то в силу *SC*-условия $(M_1 \cap M_2)$ – циклическая группа. При $M_1 \neq S$ для $P_1 = M_1 \cap S$ (5) из (2) и (4) получаем, что $P_1 \lhd P$ (6). Если P_1 нециклическая, то из (6) ввиду того, что в силу (5) $P_1 \leq S$ из леммы 4 следует, что P/P_1 – циклическая группа, а так как она примарная, то P_1 содержится в единственной максимальной подгруппе группы P, вопреки (5), (1) и (3). Значит, P_1 – циклическая группа.

Из доказанного следует, что P является *CIM*-группой. □

Хорошо известно следующее утверждение (см., например, [4], 18.5):

Лемма 6. Если P – абелева p-группа, A – p'-подгруппа из $Aut\,P$ и A централизует $\Omega_1(P)$, то $A = 1$.

Следствие 1. Если $G = R \rtimes B$ (1), $R \cong Z_{r^n}$ (2), $r \nmid |B|$ (3) и $C(B) \cap R \neq 1$ (4), то $B \subset C(R)$ (5).

Следствие 2. Если при условиях следствия 1 $B' = 1$ (6) и $B \ntriangleleft G$ (7), то $B = N(B)$ (8) и $\forall\, R_1 : 1 < R_1 < R$ (9) подгруппа $H = R_1 \rtimes B$ (10) нециклическая и $H \ntriangleleft G$ (11).

Доказательство. В силу (7) и (1) $B \not\subset C(R)$, а тогда из следствия 1 получаем, что $C(B) \cap R = 1$ (12). Ввиду (1) $N(B) = R_0 \times B$ (13), где $R_0 < R$, а тогда $R_0 \subset (C(B) \cap R)$, то есть в силу (12) $R_0 = 1$ и из (13) следует справедливость (8), а тогда ввиду (10) H нециклическая.

Пусть $H \lhd G$ (14). Тогда из (10), (3) и (8) в силу обобщенной леммы Фраттини имеем: $G = H \cdot N(B) = R_1 \cdot N(B) = R_1 \rtimes B$, что ввиду (9) противоречит (1). Значит, (14) неверно и выполняется (11). □

Следствие 3. Пусть $G = R \rtimes A$ (1), $R \cong Z_{r^t}$ (2), $|A| = k$ (3), $r \nmid k$ (4), $A' = 1$ (5), $A \ntriangleleft G$ (6), $Z = Z(G)$ (7). Если $A_i < G$ (8), $|A_i| = k$ (9) $(i = 1{,}2)$ и $A_1 \neq A_2$ (10), то $A_1 \cap A_2 = Z$ (11).

Доказательство. Так как G в силу условий следствия 3 разрешима, а в силу (1), (3), (4) и (9) A, A_1, A_2 – холловы подгруппы порядка k группы G, то по теореме Холла они сопряжены и в силу (5) подгруппы A_i $(i = 1{,}2)$ абелевы. Ввиду (1), (3), (4) и (9) $G = R \rtimes A_1$ (12). Рассмотрим подгруппу следующего вида $L = \langle A_1, A_2 \rangle$ (13). В силу (12) $L = R_0 \rtimes A_1$ (14), причем учитывая (10) и (13) $1 < R_0 < R$ (15). Подгруппа $T = A_1 \cap A_2$ (16) в силу (13) и абелевости A_i содержится в $Z(L)$, а тогда ввиду (14) $R_0 \subset C(T)$ и ввиду (15) $R \cap C(T) \neq 1$. Отсюда, применяя к группе $R \leftthreetimes T$ следствие 1 леммы 6, получаем, что $T < C(R)$ (17). Теперь из (12), (16), (17) и абелевости A_1 получаем, что $T \leq Z$ (18). Но из (6), (1) – (4) ввиду следствия 1 леммы 6 имеем, что $Z \cap R = 1$, а тогда ввиду (1) – (4) и (6) $Z < A$ (19). Но A_i сопряжена с A, и из (19) получаем, что $Z < A_i$ $(i = 1{,}2)$, а тогда из (16) следует, что $Z \leq T$ (20). Из (18) и (20) получаем справедливость (11). □

Лемма 7. Пусть G – конечная SC-группа, S – ее сепарирующая подгруппа, $H < B < G$ (1), $B \not\subset S$ (2), $H \not\subset (B \cap S)$ (3). Если существует такая $V < G$, что $V \not\subset B$ (4), $T = VH < G$ (5) и $T \not\supset B$ (6), то H – циклическая группа.

Доказательство. Пусть H нециклическая. Ввиду (3) и (1) $H \not\subset S$, и потому в силу (5) $T \not\subset S$ (7). Ввиду (5) и (4) $B \not\supset T$ и, учитывая (6), имеем: $B \ngtrless T$. Теперь отсюда и из (2) и (7) в силу SC-условия получаем, что $T \cap B = R$ – циклическая группа. Но ввиду (1) и (5) $R \geq H$, а H нециклическая. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы. □

Следствие. Пусть SC-группа имеет вид $G = A \leftthreetimes D$ (1), где $(|A|, |D|) = 1$ (2), $A \cong Z_k$ (3), $|\pi(G)| \geq 3$ (4) и S – сепарирующая подгруппа группы G. Если $B = (A_1 \leftthreetimes D_1) < G$ (5), где $A_1 \leq A$ (6), $A_1 \cong Z_{q^m}$ (7), $D_1 \leq D$ (8), $D_1 \cong Z_{r^t}$ (9), $D_1 \not\subset S$ (10) и B нециклическая, то $|A_1| = q \neq 2$ (11).

Доказательство. Так как B нециклическая и ввиду условий следствия $(|A_1|, |D_1|) = 1$ (12), то отсюда и из (7) следует, что $q \neq 2$ (13) – ибо $Aut\, Z_{2^m}$ является 2-группой. Пусть $|A_1| \neq q$ (14). Тогда существует A_0 такая, что $1 < A_0 < A_1$ (15) и $|A_0| = q$ (16). Рассмотрим $H = A_0 \leftthreetimes D_1$ (17). Так как B нециклическая, то в силу (17) и следствия 2 леммы 6 подгруппа H нециклическая.

Из (16), (9) и (17) следует, что $|\pi(H)| = 2$. Отсюда и из (4) следует, что существует $V < G$, что $V \cong Z_{p^n}$ (18), $(p, qr) = 1$ (19), то есть $V \cap H = 1$. Ввиду (5), (7), (9) и (13) $V \not\subset B$ (20). В силу (5) и (10) $B \not\subset S$ (21). Из (18), (1) и (2) следует, что либо $V < A$, либо можно считать, что $V < D$ (22). В первом случае ввиду (3) $V \lhd G$ и $T = VH < G$ (23) – ввиду (17) – (19), (7) и (15). В случае (22) $VD_1 \leq D$ и в силу (17), (6), (15) и $A_0 \lhd G$ тоже выполняется (23).

В силу (10) и (17) $H \not\subset S$, и, так как $H < B$, из доказанного следует, что для H выполняются все условия леммы 7, а так как в силу (15) и (17) $A_1 \not\subset H$, то ввиду (17) – (19) и (23) $B \not\subset T$. Теперь из леммы 7 получаем, что H – циклическая группа, в противоречие с доказанным выше. Значит, (14) неверно и $|A_1| = q$. Отсюда и из (13) следует справедливость (11). □

Лемма 8. Пусть G – конечная SC-группа, S – ее сепарирующая подгруппа, $P < G$, $|P| = p^n$ (1) и $P \not\subset S$ (2). Если существует V: $1 < V < G$ (3), такая, что $p \nmid |V|$ (4) и для некоторой нециклической истинной подгруппы P_1 группы P $L = VP_1 < G$ (5), то $P_1 \subset S$ (6). Если (5) выполняется для любой $P_1 \lessdot P$ (в частности, если $V \lhd G$), то в P не более одной нециклической максимальной подгруппы и P изоморфна одной из следующих групп: Z_{p^n}, Q_8, M_{p^n} $(p^n \neq 8)$ или группе типа $p \times p^{n-1}$ $(n \geq 2)$.

Доказательство. Пусть $P_1 \not\subset S$ (7). Тогда ввиду (5) $L \not\subset S$, а из $P_1 < P$ (8), (4) и (5) следует, что $L \ngtrless P$. Поэтому в силу SC-условия $B = L \cap P$ – циклическая группа. Но из (5) и (8) следует, что $P_1 \leq B$, а P_1 нециклическая. Полученное противоречие доказывает, что (7) неверно, и потому выполняется (6).

Если в P есть две нециклические максимальные подгруппы P_1 и P_2 и $VP_i < G$ $(i = 1{,}2)$, то по доказанному выше $P_i \subset S$, а тогда $P = P_1 P_2 \subset S$, вопреки (2). Значит, в P не более одной такой подгруппы, и потому, как известно (см., например, [4], 17.23 и 17.24), P – одна из групп, перечисленных в лемме 7. □

Лемма 9. Пусть конечная группа G представима в виде $G = P \times T$ (1), где P – ее силовская p-подгруппа. Такая G является SC-группой с сепарирующей подгруппой $S \lessdot G$ (2) и $P \not\subset S$ (3) тогда и только тогда, когда $G = Q \times B$ (4), где $Q \cong Z_{q^m}$ (5), $q \nmid |B|$ (6), а B – конечная C_N-группа (если P циклическая, то $Q = P$, а $B = T$).

Необходимость. Пусть группа G, удовлетворяющая условиям леммы, является SC-группой и выполняются (2) и (3). Тогда из (1) – (3) следует, что $S = P_1 \times T$ (7), где $P_1 \lessdot P$ (8).

Для P возможны два случая:
1. $P \cong Z_{p^n}$.

Пусть $T_i < T$ $(i = 1{,}2)$ и $T_1 \gtreqless T_2$ (9). Рассмотрим $H_i = P \times T_i$ (10), $(i = 1{,}2)$. Из (3) и (10) следует, что $H_i \not\subset S$ (11), а из (9) и (10) $H_1 \gtreqless H_2$ (12). Поэтому в силу SC-условия и (10) $H_1 \cap H_2 = P \times (T_1 \cap T_2)$ (13) – циклическая группа, а тогда $T_1 \cap T_2 \cong Z_k$ (14). Значит, T является *C*$_N$-группой. Для случая 1 необходимость доказана.
2. P – нециклическая группа.

Тогда, так как в силу (1) $P \lhd G$ и выполняется (3), из замечания 4 следует, что $G/P \cong Z_{q^m}$, и потому ввиду (1) $T \cong Z_{q^m}$ (15). Значит, G имеет вид (4) (при $Q = T$ и $B = P$). Из (3) и (1) в силу второго утверждения леммы 8 (где $V = T$) следует, что P – одна из групп, перечисленных в конце этой леммы. Все такие группы, как следует из леммы 7 из [3], являются *C*$_N$-группами, и потому P – *C*$_N$-группа. Значит, $B = P$ есть *C*$_N$-группа и выполняются (5) и (6). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для G выполняются (4) – (6) и B – *C*$_N$-группа. Чтобы нам можно было использовать предыдущие обозначения, положим $Q = P$ и $B = T$. Тогда G – группа вида (1), $P \cong Z_{p^n}$ (16), $p \nmid |T|$ (17) и T – *C*$_N$-группа. Возьмем S вида (7) с условием (8). Тогда выполняются (3) и (2).

Пусть $H_i < G$ $(i = 1{,}2)$ и выполняются (11) и (12). Тогда из (11), (12), (7), (8), (11) и (16) следует, что $H_i > P$, а потому из (1) следует, что H_i имеют вид (10), где $1 < T_i < T$ (18), а из (10) и (12) следует справедливость (9). Так как T – *C*$_N$-группа, то из (9) и (18) следует, что выполняется (14). Из (10) и (17) следует справедливость (13), а тогда из (13), (14), (17) и (16) получаем, что $H_1 \cap H_2$ – циклическая группа. Значит, G является *SC*-группой с сепарирующей подгруппой S. □

Лемма 10. Конечная непримарная нильпотентная группа G тогда и только тогда является *SC*-группой, когда $G = Q \times B$ (1), где $Q \cong Z_{q^m}$ (2), $q \nmid |B|$ (3), а B – конечная нильпотентная *CIM*-группа (такие группы описаны в теореме 1 из [3]).

Доказательство. Так как в силу теоремы 3 из [1] для конечных нильпотентных групп *CIM*-условие и *C*$_N$-условие равносильны, то достаточность утверждения леммы 10 следует из леммы 9.

Докажем необходимость.

Пусть G – конечная нильпотентная SC-группа и S – ее сепарирующая максимальная подгруппа. Тогда существует силовская p-подгруппа P группы G, такая что $P \not\subset S$. Так как G нильпотентна, то $G = P \times T$. Значит, для G выполняются условия леммы 9. В силу этой леммы справедливы (1) – (3), а B – нильпотентная *C*$_N$-группа. Как отмечено выше, тогда B является *CIM*-группой. □

Лемма 11. Пусть A – холлова π-подгруппа конечной разрешимой группы G, $T_1 \le T_2 < G$ (1), $\pi(T_2) \cap \pi = \emptyset$ (2). Если в G существуют подгруппы $H_1 = T_1 \rightthreetimes A^x$ (3), $H_2 = T_2 \rightthreetimes A^y$ (4), где $x, y \in G$, $H_1 \gtreqless H_2$ (5) и $T_1 \lhd H_2$ (6), то $H_1 \cap H_2 = T_1 \rightthreetimes (A^{x_1} \cap A^{y_1})$ (7), $H_1 = T_1 \rightthreetimes A^{x_1}$ (8), $H_2 = T_2 \rightthreetimes A^{y_1}$ (9), $(x_1, y_1 \in G)$.

Доказательство. Из (1) – (4) и (6) следует, что $B = (H_1 \cap H_2) = T_1 \rightthreetimes A_0$ (10), гд A_0 – холлова π-подгруппа группы B. Так как G разрешима, то в силу (10) и теоремы Холла $A_0 \subset (A^{x_1} \cap A^{y_1}) = F$ (11), где A^{x_1} – холлова π-подгруппа группы H_1, а A^{y_1} – холлова π-подгруппа группы H_2. Тогда из (3) и (4) следует справедливость (8) и (9), а из (11), так как F – π-подгруппа группы B, а A_0 – ее холлова π-подгруппа, получаем, что $A_0 = F$ (12) и из (10) – (12) следует справедливость (7). □

Следствие. Если в лемме 11 A – силовская p-подгруппа группы G, то утверждения (7) – (9) этой леммы справедливы для любых конечных групп.

Лемма 12. Пусть G – *SC*-группа типа 2, S – ее сепарирующая подгруппа, $S \lessdot G$ (1), $S \lhd G$ (2), A – абелева π-подгруппа группы G, $A \not\subset S$ (3). Если существует $T \lhd G$ (4), такая, что $T \cong Z_{r^n}$ (5), $r \notin \pi$ (6), $H = T \rightthreetimes A < G$ (7), то при $A^x \ne A^y$ (8) выполняется $(A^x \cap A^y) \subset C(T)$ (9).

Доказательство. В силу (2) и (3) $\forall\, x \in G$ $A^x \not\subset S$ (10). Из (4) и (7) следует, что $H^x = T \rightthreetimes A^x < G$ (11). Ввиду (10) и (11) $H^x \not\subset S$ (12). Пусть выполняется (8).

Возможны два случая.
1. $H^x \ne H^y$.
Так как $|H^x| = |H^y|$, то ввиду условия 1 $H^x \gtreqless H^y$ (13). Так как ввиду (2) наряду с (12) $H^y \not\subset S$, то отсюда, из (12), (13) и *SC*-условия следует, что $V = H^x \cap H^y$ (14) – циклическая группа. Наряду с (11) $H^y = T \rightthreetimes A^y$, и, учитывая (11) и (14), имеем: $V \supset T \rightthreetimes (A^x \cap A^y)$, и из цикличности V следует справедливость (9).
2. $H^x = H^y$.

Тогда $H^x = T \leftthreetimes A^x = T \leftthreetimes A^y$. В силу (5) и (6) A^x и A^y – холловы π-подгруппы группы H^x. Отсюда и из (8) в силу следствия 3 леммы 6 получаем, что $A^x \cap A^y = Z(H^x)$, а тогда ввиду (11) справедливо (9). □

Хорошо известны следующие утверждения о некоторых классах конечных p-групп (см., например, [4], 17.11–17.22, 18.8, 18.11, 18.13, 18.17, 18.18, 18.21).

Лемма 13. Конечная p-группа, имеющая циклическую максимальную подгруппу, изоморфна одной из следующих групп:
1. Z_{p^n}; **2.** $Z_{p^{n-1}} \times Z_p$ (n≥2);
3. M_{p^n} (n≥3); **4.** D_{2^n} (n≥3);
5. Q_{2^n} (n≥3); **6.** SD_{2^n}(n≥4).
Из класса M этих групп подкласс L групп, не имеющих нециклических характеристических максимальных подгрупп, составляют следующие группы: ***a)*** Q_{2^n}; ***b)*** D_{2^n}; **c)** Z_{p^n}; ***d)*** E_{p^2}, а подкласс A класса M, состоящий из всех таких p-групп P, для которых $Aut\,P$ не является p-группой, составляют следующие группы:

I. E_{p^2}; **II.** $Z_{p^{n-1}} \times Z_p$, n≥3, $p \neq 2$;
III. Z_{p^n}, $p \neq 2$; **IV.** M_{p^n}, $p \neq 2$; **V.** Q_8.

Пересечение последних двух классов: $(L \cap A) = \{E_{p^2}, Q_8, Z_{p^n}\ \ p \neq 2\}$.

Лемма 14. Пусть $Q \cong Q_8$ (1), $Q_i < Q$ (2), $|Q_i| = 4$ (3), $i = \overline{1,3}$. Если $\varphi \in Aut\,Q$ (4) и $\varphi(Q_1) = Q_1$ (5), то $\varphi^4 = 1$ (6).

Доказательство. Так как $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ – все подгруппы порядка 4 группы Q, то $\varphi(Q_i) = Q_j$ (7) (возможно и $i = j$), $i, j = \overline{1,3}$. Если $\varphi(Q_i) = Q_i$ (8) для любого $i = \overline{1,3}$, то, так как $Q_i \cong Z_4$ и потому $|Aut\,Q_i| = 2$ (9), из (8) и (9) следует, что $\varphi^2 = 1$, а тогда справедливо (6). Если же (8) выполняется не для всех i, то в силу условия (5) имеем: $\varphi(Q_3) = Q_2$, а $\varphi(Q_2) = Q_3$, а тогда, учитывая (5), имеем: $\varphi^2(Q_i) = Q_i$ для всех $i = \overline{1,3}$. Учитывая (9), как и выше, получаем, что выполняется (6) и в этом случае. □

Следствие. Пусть $G = Q \leftthreetimes B$ (1), $Q \cong Q_8$ (2), $2 \nmid |B|$ (3) и существует $Q_1 < Q$ (4), такая, что $|Q_1| = 4$ (5) и $Q_1 \lhd G$ (6). Тогда $G = Q \times B$ (7).

Доказательство. Ввиду (1) – (3) любой элемент $b \in (B \backslash 1)$ индуцирует в Q $2'$-автоморфизм φ, а в силу (6) $\varphi(Q_1) = Q_1$. Но отсюда и из (2), (4) и (5) и леммы 14 следует, что $|\varphi| \mid 4$, и потому φ – тождественный автоморфизм, а тогда из (1) следует (7). □

Некоторые подклассы класса *CS*-групп типа 2

Теорема 1. Непримарная группа G является SC-группой типа $2b$ тогда и только тогда, когда она – группа одного из следующих типов (ниже всюду $Q \cong Z_{q^m}$ (1), $Z = Z(G)$ и $p \neq q$):
1. $G = Q \times T$, $q \nmid |T|$, T – конечная C_N-группа;
2. $G = (P_1 \leftthreetimes Q) \times P_2$, $P_1 \not\subset Z$ (2) и выполняется одно из условий:
2.1. $P_1 \cong E_{p^2}$, $|P_2| = p$ и для любой Q_1, такой, что $1 < Q_1 \leq Q$ (3) в P_1 нет собственных Q_1-допустимых подгрупп;
2.2. $|P_1| = p$, $P_2 \cong Z_{p^{n-1}}$, p≠2.

Необходимость. Пусть G – непримарная SC-группа типа $2b$. Тогда в силу определения 3 G – конечная группа и для ее сепарирующей подгруппы S выполняются $S \lhd G$ (4), $|G/S| = p$ (5), а для силовской p-подгруппы P группы G выполняется $P \lhd G$ (6). Поэтому $(|P|, |G/P|) = 1$ (7), а ввиду (5) $P \not\subset S$ (8). Из (7), ввиду теоремы Шура, имеем: $G = P \leftthreetimes D$ (9), где $|D| = k$ (10), $p \nmid k$ (11). Если $D \lhd G$, то $G = P \times D$, и в силу леммы 9 G – группа типа 1 теоремы 1.

Пусть $D \ntriangleleft G$ (12). Из (4), (5), (10) – (12) тогда следует, что $D < S$, и потому ввиду (9) $S = S_1 \leftthreetimes D$ (13), где $S_1 = (P \cap S) \neq 1$ (14), а в силу (4) и (6) $S_1 \lhd G$ (15). Ввиду (5) $G = PS$ и, учитывая (14), $|P / S_1| = p$ (16). В силу (9) – (11) D является холловой подгруппой группы G, и потому, в силу (13), и холловой подруппой порядка k группы S. В силу теоремы Шура для S (вида (13)) все холловы подгруппы порядка k группы S сопряжены в S. Отсюда и из (13) и (4) следует, что по обобщенной теореме Фраттини $G = S \cdot N(D) = S_1 \cdot N(D)$ (17).

Введем обозначение: $N(D) = T$ (18). Из (9), (18) и (6) имеем: $T = P_2 \times D$ (19), где $P_2 = (P \cap T)$ (20) и ввиду (12), (9), (19) и (18) $1 < P_2 < P$ (21). В силу (17), (18), (5) и (14) $T \not\subset S$ (22), и потому ввиду (13) и (19) $P_2 \not\subset S$ (23). Если P – циклическая группа, то ввиду (16) S_1 – единственная максимальная подгруппа группы P, а тогда ввиду (18), (21) и (13) $P_2 \leq S_1 < S$, в противоречие с (23).

Значит, подгруппа P – нециклическая. Тогда из (6), (9) и замечания 4 следует $D = Q \cong Z_{q^m}$ (24) и выполняется (1). В силу (19)–(21) $P \ngeq T$.

Отсюда ввиду (8), (22) и (20) из SC-условия следует, что $P_2 = P \cap T$ – циклическая группа, то есть $P_2 \cong Z_{p^t}$ (25). Отметим, что если $P_2 \subset Z(P)$ (26), то из (9) и (19) следует, что $P_2 \subset Z$ (27).

Ввиду (9)–(12) G ненильпотентна. При Q_1 удовлетворяющем условию (3) в силу леммы 8 для любой истинной нециклической Q_1-допустимой подгруппы $P_0 < P$ выполняется $P_0 < S$ (28) (ибо $P_0 Q_1 < G$, и потому применима лемма 8). В частности, для всякой истинной характеристической нециклической подгруппы P_0 группы P выполняется (28).

В силу (8) и леммы 3 P является SC-группой с сепарирующей подгруппой S_1 (вида (14)), и потому ввиду леммы 5 P есть CIM-группа. Из описания таких примарных CIM-групп в теореме 1 из [3] следует, что нециклическая группа P есть группа одного из следующих типов:

I. $|P| = p^n, n = 2{,}3$;

II. $|P/M| = p$, $M \cong Z_{p^{n-1}}, n \geq 2$;

III. $|P/\Phi(P)| = p^2$, Φ – максимальная циклическая подгруппа группы P.

Рассмотрим каждый из них.

1. $|P| = p^n, n = 2{,}3$.

Так как P нециклическая, то при $n = 2$ она – группа типа II, а при $n = 3$. $l = (exp\ P) \leq\ p^2$. При $l = p^2$ P – группа типа II. Если же $l = p$ и P неабелева, то P – группа типа III (группы типов II и III рассмотрим ниже). Остается случай $P \cong E_{p^3}$ (29). Тогда для определенной выше подгруппы S_1 имеем: $S_1 \cong E_{p^2}$ (30). Из (8) и доказанного выше о P_0 следует, что для любой Q_1 из (3) в P нет отличных от S_1 Q_1-допустимых подгрупп порядка p^2. Поэтому, так как P абелева, то, как отмечено выше, выполняется (27) и $|P_2| = p$. Отсюда и из (30) и (23) $P = S_1 \times P_2$, и ввиду (24), (9) и (27) $G = (S_1 \leftthreetimes Q) \times P_2$ (31).

Если в S_1 существует собственная Q_1-допустимая подгруппа P_4, то $|P_4| = p$ и $P_0 = P_2 \times P_4$
Q_1-допустима. В силу доказанного выше справедливо (28), а тогда $P_2 < S$, в противоречие с (14). Значит, таких P_4 нет. Отсюда и из (1) и (31) следует, что G – группа типа 2 теоремы 1 с условием 2.1 (где $S_1 = P_1 \not\subset Z$, ибо иначе $P \subset Z$, вопреки (12) и (9)).

2. $|P/M| = p$, $M \cong Z_{p^{n-1}}$.

Если $Aut\, P$ является p-группой, то из (9) и (24) следует, что G нильпотентная, в противоречие с отмеченным выше. Значит, $Aut\, P$ не является p-группой, а тогда из леммы 13 следует, что P – одна из следующих групп:

1. E_{p^2}; **2.** $Z_{p^{n-1}} \times Z_p, n \geq 2, p \neq 2$;
3. $M_{p^n}, , p \neq 2$; **4.** Q_8.

В последнем случае ввиду (16) $|S_1| = 4$, и из (9), (15) и следствия леммы 14 получаем, что $G = P \times Q$ (32) и G нильпотентна, что не имеет места. Значит, случай 4 невозможен.

Если P – типа 1 и $p \neq 2$, то, учитывая (26) и (27), получаем, что P – одна из групп типа 2.2. Пусть $P \cong E_4$. Тогда из (15), (14), (9) и (2) ввиду теоремы Машке получаем: $P = S_1 \times P_1$, $|S_1| = |P_1| = 2$, $S_1 \lhd G$, $P_1 \lhd G$. Но отсюда следует, что $P < Z$ и выполняется (32), что, как отмечено выше, невозможно.

Значит, остается рассмотреть случай, когда P – группа типа 2 или 3. При $n > 2$ в каждой из групп этих типов есть единственная нециклическая максимальная подгруппа. Так как она характеристическая в P, то в силу доказанного выше (см. (28)) содержится в S, и потому в силу (14) и (16) совпадает с S_1. Вне S_1 в любой группе P типа 2 или 3 есть только ее циклические максимальные подгруппы (порядок p^{n-1}) и потому в силу (23) $P_2 \cong Z_{p^{n-1}}$ (33) и $P_2 \lessdot P$ (34). Поэтому $P_2 \lhd P$ и в силу (19), (24) и (9) $P_2 \lhd G$ (35), а тогда $C(P_2) \lhd G$ (36). Если $P_2 \not\subset Z$, то, так как в силу (9) $D \subset C(P_2)$, отсюда и из (34), (24) и (9) $C(P_2) = P_2 \times Q$, и ввиду (36) $Q \lhd G$ и G нильпотентна, что не имеет места. Значит, $P_2 \subset Z$ (37). Тогда в силу (34) P абелева. Так как P – типа 2 или 3, то $H = \Omega_1(P) \cong E_{p^2}$ (38). Если $P_3 = H \cap P_2$ (39), то из (35) и $H \lhd G$ следует, что $P_3 \lhd G$, и потому P_3 Q-допустима. Теперь, если к группе $H \leftthreetimes Q$ применить теорему Машке, то получим: $H = P_3 \times P_1$ (40), где $|P_1| = p$ (41) и P_1 Q-допустима. Тогда из (2) и абелевости P следует, что $P_1 \lhd G$ (42). Из (40) и (39) следует, что $(P_1 \cap P_2) = 1$, а тогда, ввиду (34) и (41), $P = P_1 \times P_2$. Теперь отсюда и из (9), (42) и (37) получаем: $G = (P_1 \times P_2) \leftthreetimes Q = (P_1 \leftthreetimes Q) \times P_2$ (43). Так как G ненильпотентна, то выполняется (2) и ввиду (41) $p \neq 2$. Мы получили, что G – группа типа 2 с условием 2.2. теоремы 1. Рассмотрение случая 2 окончено.

3. P – группа типа III.

В силу (15) и (16) $S_1 \supset \Phi(P)$. Введем обозначения: $H/\Phi(P) = \overline{H}$ (для любой H с условием $\Phi(P) \leq H \leq G$). Так как ввиду (15) $\overline{S}_1 \lhd \overline{G}$ и из определения группы типа III $\overline{P} \cong$

E_{p^2}, то, применяя к $\bar{G}$ теорему Машке, получим: $\bar{P} = \bar{S}_1 \times \bar{M}$ (44) и $\bar{M} \lhd \bar{G}$. Так как $M > \Phi(P)$, то, в силу определения группы типа III, M – нециклическая группа, причем $M \not\subset S$ (ибо иначе ввиду (44) $P \subset S$, вопреки (8)). Так как $MQ < G$, то существование такой группы M противоречит первому утверждению леммы 8. Значит, случай 3 невозможен. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть G – группа одного из типов теоремы 1. Во всех этих типах $|G| < \infty$.

1. Группа типа 1 в силу леммы 9 является SC-группой, где $S = T \times Q_1$, $Q_1 \lessdot Q$, и потому $Q \not\subset S$. Значит, G – SC-группа типа $2b$ (ибо $Q \lhd G$).

2. G – группа типа 2.

Тогда $G = (P_1 \leftthreetimes Q) \times P_2$ (48) и $P = P_1 \times P_2$ – силовская p-подгруппа. Возьмем $S = (P_1 \leftthreetimes Q) \times P_3$ (49), где $P_3 \lessdot P_2$ и покажем, что G – SC-группа с сепарирующей подгруппой S (для каждого из типов 2.1 и 2.2). Достаточно проверить выполнение SC-условия для любой пары нециклических неинцидентных подгрупп $H_i < G$, где $H_i \not\subset S$ (50), $(i = 1,2)$.

Пусть H_i непримарна. Тогда из определения групп типов 2.1 и 2.2 следует, что $H_i \supset P_1$ (51), ибо в P_1 ввиду определения групп этих типов нет собственных Q_1-допустимых подгрупп для любой Q_1 с условием: $1 < Q_1 \leq Q$. Для групп типа 2.1 это означает, что $H_i \supset P$ (52) (ибо в них $P_1 \lessdot P$ и $P_1 \subset S$, а для H_i выполняются (51) и (50)). В группе G типа 2.2, как нетрудно видеть, вне S из p-подгрупп находятся только такие подгруппы: $P_4 \cong Z_{p^{n-1}} \lessdot P$ (53) ($P_4 > \Phi(P)$ (54)) – это следует из того, что P – группа типа $p^{n-1} \times p$. Поэтому $H_i \supset P_4$ (55). Но так как в такой группе G $P_2 \lessdot P$, (P_2 из (40)), то отсюда следует, что $P_2 \supset \Phi(P)$, и так как ввиду (48) $P = P_1 \times P_2$, то получаем, что $P_1 \not\subset \Phi(P)$, а тогда, ввиду (54) и $|P_1| = p$, $(P_1 \cap P_4) = 1$ и из (51) и (59) следует, что $H_i \supset (P_1 \times P_4) = P$, то есть тоже выполняется (52).

Итак, для всех непримарных H_i с условием (50) выполняется (52). Так как в силу определения группы типа 2 $G/P \cong Z_{q^m}$, то любые две такие подгруппы H_1 и H_2 инцидентны.

Отметим, что в силу (52) $H_i > P_0$ для любой $P_0 \leq P$.

Все примарные нециклические подгруппы группы G содержатся в P, а такие P в группах типа 2.1 и 2.2, как показано в теореме 1 из [1] в силу теоремы 1 из [3] являются C_N-группами.

Этим доказано, что G – SC-группа с сепарирующей подгруппой S вида (49).

В силу (48) – (50), $P = (P_1 \times P_2) \lhd G$ и $P \not\subset S$. Значит, G – SC-группа типа $2b$. □

Следствие 1. В группе типа 2.2 любые две нециклические подгруппы, не содержащиеся в S, инцидентны (это видно из доказательства достаточности, так как единственная максимальная нециклическая подгруппа группы P типа $p \times p^{n-1}$ содержится в S).

Следствие 2. Конечная разрешимая группа G тогда и только тогда является SC-группой типа $2b$, когда она – либо группа типа 1 теоремы 1, где T – конечная разрешимая C_N-группа, либо группа типа 2 этой теоремы.

Отметим, что конечные разрешимые C_N-группы описаны в [1].

В силу следствия 2 теоремы 1 для получения описания конечных разрешимых SC-групп теперь достаточно получить описание таких групп типа $2a$.

Теорема 2. Пусть G – конечная неабелева непримарная группа, все силовские подгруппы которой циклические. Такая группа G является SC-группой типа $2a$ тогда и только тогда, когда она – группа одного из следующих типов (ниже всюду P, Q, R, соответственно, циклические силовские p-, q- и r-подгруппы группы G, $Z = Z(G)$, а в типах 1–3 ни одно из полупрямых произведений не является прямым).

1. $G = R \leftthreetimes (Q \times P)$, $|R| = r \neq 2$.

2. $G = (Q \times R) \leftthreetimes P$, $|Q| = q$, $|R| = r$, $2 \nmid qr$ и $\forall\, x, y \in G$, таких, что $P^x \neq P^y$, выполняется $(P^x \cap P^y) = Z$;

3. $G = Q \leftthreetimes P$, $q \neq 2$.

Необходимость. Пусть G, удовлетворяющая условиям теоремы, является SC-группой типа $2a$. Тогда, в силу определения 3, ее сепарирующая подгруппа S удовлетворяет условиям $S \lhd G$ (1) и $|G/S| = p$ (2), а $P \ntriangleleft G$ (3). В силу (2) и (3) $\forall\, x \in G$ $P^x \not\subset S$ (4). Так как все силовские подгруппы группы G циклические, то, как хорошо известно, $G = A \leftthreetimes D$ (5), где $A \cong Z_k$ (6), $D \cong Z_l$ (7) и $(|A|, |D|) = 1$ (8). Так как G неабелева, то $D \ntriangleleft G$ (9). Не нарушая общности, можем считать, что все инвариантные силовские подгруппы группы G содержатся в A, и потому если T – силовская t-подгруппа группы G и $T \subset D$ (10), то $T \ntriangleleft G$ (11).

Из (3) и (5)–(8) следует, что $P \not\subset A$, а тогда, ввиду (8), $|P|\,\big|\,|D|$. Поэтому в качестве P можно взять силовскую p-подгруппу группы D, то есть $P \leq D$ (12). Из (2) и (8) следует, что $S \supset A$, а тогда из (5) и (2) следует, что $S = A \leftthreetimes D_1$ (13), где $|D/D_1| = p$ (14).

Предположим, что $P \subset C(A)$ (15).
Так как ввиду (5) $C(A) = (A \times D_2) \lhd G$ (16), где $D_2 \subset D$, то в силу (8) и (16) $D_2 \lhd G$, а тогда, так как в силу (15) $P \subset D_2$, то ввиду (7) $P \lhd G$, вопреки (3). Значит, $P \not\subset C(A)$ (17).

Пусть R – силовская подгруппа группы A, такая, что $P \not\subset C(R)$ (18) – в силу (17) хотя бы одна такая R существует. Тогда подгруппа $H = R \leftthreetimes P$ (19) нециклическая и, в силу следствия 1 леммы 6, имеем: $C(P) \cap R = 1$ (20).

Для дальнейшего понимания отметим, что если $D = P$ (21), то в силу (13) и (14) $S = A \leftthreetimes P_1$ (22) и $|P/P_1| = p$ (23).

В силу условий теоремы G непримарна, и потому для $|\pi(G)|$ возможны лишь два случая: $|\pi(G)| \geq 3$ или $|\pi(G)| = 2$. Рассмотрим каждый из них.

1. $|\pi(G)| \geq 3$.

Тогда из (19), (18), (4) и следствия леммы 7 получаем, что $|R| = r \neq 2$ (24).

Предположим, что $|\pi(G)| > 3$ (25). Тогда существуют силовская q-подгруппа Q и силовская t-подгруппа T группы G, каждая из которых содержится либо в A, либо в D, такие, что $(pr, qt) = 1$ (26). В силу (5) – (8) и (26) каждая из подгрупп Q и T перестановочна и с R, и с P, и потому ввиду (19) и с H. Учитывая условие 1, имеем: $HQ < G$, $HT < G$ и $HQ \not\gtrless HT$. Так как в силу (4) и (19) $HQ \not\subset S$ и $HT \not\subset S$, то из полученного выше и SC-условия следует, что $HQ \cap HT = H$ – циклическая группа, в противоречие с доказанным выше. Значит, (25) невозможно, а тогда из условия 1 следует, что $|\pi(G)| = 3$ (27).

Поэтому либо A, либо D – примарная группа. Рассмотрим каждый из этих случав.

1.1. D – примарная группа.
Тогда ввиду (12) выполняются (21) – (23) и в силу (27), (3) и (5) $G = A \leftthreetimes P$ (28), $A = Q \times R$ (29), то есть $G = (Q \times R) \leftthreetimes P$ (30).

Возможны два подслучая.

1.1.1 Или $Q \subset Z$, или $R \subset Z$.

Пусть $Q \subset Z$. Тогда выполняется (18) (ибо иначе в силу (30) G – абелева, вопреки условию). Поэтому по доказанному в начале пункта 1 справедливо (2) и учитывая (24) и (30), G – одна из групп типа 1 теоремы 2 (ибо $G = (R \leftthreetimes P) \times Q$ – одна из таких групп. Аналогично при $R \subset Z$ выполняется $Q \not\subset C(P)$ (31), откуда следует $|Q| = q \neq 2$ (32) и G – группа типа 1, где подгруппы Q и R поменялись местами (можно поменять их обозначения).

1.1.2 $Q \not\subset Z$, $R \not\subset Z$.

Тогда справедливы (18) и (31), подгруппы H (см. (19)) и $L = Q \leftthreetimes P$ (33) нециклические, и потому, как показано в начале пункта 1, выполняются (24) и (32), а тогда $2 \nmid qr$ (34).

Пусть $x, y \in G$ и $P^x \neq P^y$ (35). Введем обозначение $P_0 = P^x \cap P^y$ (36). Из (4), (19) и леммы 12 получаем, что $P_0 \subset C(R)$ (37). Точно так же, рассматривая вместо H подгруппу L вида (33), из леммы 12 и (32) получим, что $P_0 \subset C(Q)$ (38) при x и y с условием (35). Из (36)–(38) и (30) получим: $\forall\, x, y \in G$, таких, что выполняется (35), $P_0 \leq Z$ (39). Но в силу условия 1.1.2 и (30) $Z \subset P^x$, $\forall\, x \in G$, т. е. в силу (36) $Z \leq P_0$, а тогда отсюда и из (39) $P_0 = Z$ (40). Теперь из (30), (24), (32), (36), (35) и (40) получаем, что G – группа типа 2 теоремы 2.

Случай **1.1** рассмотрен.

1.2. $A = R$ – r-подгруппа.

Тогда из (27), (12) и (5) имеем: $D = P \times Q$ (41) и $G = R \leftthreetimes (P \times Q)$ (42). Отсюда в силу (3) получаем, что подгруппа $B = R \leftthreetimes P$ (43) – нециклическая. Теперь из (27), (4), (43) и (42) мы видим, что к G применимо следствие леммы 7 (при $A_1 = R$ и $D_1 = P$), и в силу этого следствия $|R| = r \neq 2$ (44). Из (32) и (44) следует, что G – группа типа 1 теоремы 2. Случай 1 рассмотрен.

1. $|\pi(G)| = 2$.

Тогда $G = Q \leftthreetimes P$ и, так как G – неабелева группа, то $q \neq 2$ выполняется (3) и G – группа типа 3 теоремы 2. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть G – группа одного из типов теоремы 2. Проверим, что она является неабелевой SC-группой типа $2a$.

Во всех этих группах, как отмечено в теореме, полупрямые произведения не могут быть прямыми и потому эти группы неабелевы.

Покажем, что каждая из них является SC-группой.

1. G – группа типа 1.

Так как G неабелева, то хотя бы одна из подгрупп Q или P неинвариантна в G. Пусть выполняется (3).

Положим $S = R \leftthreetimes (Q \times P_1)$ (45), где $P_1 < P$ (46). Тогда выполняются (1), (2) и (4).

Пусть $H < G$ (47) и $H \not\subset S$ (48). Тогда ввиду (45) – (48) $H \supset P^x$ (49) для некоторого $x \in G$. Нам достаточно рассматривать только нециклические H, а тогда из определения группы типа 1 следует, что $H \supset R$.

Отсюда и из (49) следует, что $H \supset B = R \leftthreetimes P^x$ (50). Но $G' = R$, а тогда из (50) следует, что $B \lhd G$ и потому $B = R \leftthreetimes P$. Но $G/B \cong Q$ – циклическая q-группа. Значит, если $H_1 \not\subset S$ (51), $H_2 \not\subset S$ (52) и H_i нециклические, то $H_i \supset B$ $(i = 1,2)$ и $H_1/B \gtreqless H_2/B$, а тогда $H_1 \gtreqless H_2$. Этим доказано, что G является SC-группой с сепарирующей подгруппой S (причем любые две ее нециклические подгруппы, не содержащиеся в S, инцидентны).

2. G – группа типа 2.

Положим $S = A \leftthreetimes P_1$ (53), где A – вида (29), а P_1 удовлетворяет (46). Пусть H нециклическая и выполняется (48). Так как по определению группа типа 2 теоремы 2 $G = A \leftthreetimes P = (Q \times R) \leftthreetimes P$ (54) и $p \nmid |A|$, то из (48) и (53) следует справедливость (49) и H непримарная, то есть $H \cap A \neq 1$ (55).

Поэтому ввиду (29) и (49) либо $H = Q \leftthreetimes P^x$ (56), либо $H_0 = R \leftthreetimes P^y$ (57) (H_0 удовлетворяет тем же условиям, что и H). Очевидно, что $H \cap H_0$ – циклическая группа.

Пусть H_1 и H_2 – две подгруппы вида (56), то есть $H_1 = Q \leftthreetimes P^{x_1}$ (58), $H_2 = Q \leftthreetimes P^{x_2}$ (59) и $H_1 \neq H_2$ (60).

Введем обозначение: $K = H_1 \cap H_2$ (61).

Тогда из (58)–(61) и леммы 11 имеем: $K = Q \leftthreetimes B$ (62), где $B = P^{x_3} \cap P^{x_4}$ (63) и $P^{x_3} \neq P^{x_4}$ (64). Из описания групп типа 2 следует, что $B = Z$, а тогда из (62) получаем, что K – циклическая группа.

Точно так же, как и выше, из описания группы типа 2 получаем, что и для H_1 и H_2 вида (57) $(H_1 \cap H_2)$ – циклическая группа.

Из доказанного следует, что G – SC-группа с сепарирующей подгруппой S вида (53).

3. G – группа типа 3.

Тогда $G = Q \leftthreetimes P$ (65), $Q \cong Z_{q^m}$. Положим $S = Q \leftthreetimes P_1$ (66), где P_1 вида (46).

Пусть H_1 и H_2 – две нециклические подгруппы группы G с условиями (51) и (52). Тогда в силу (65) $Q \cap H_i \neq 1$ и ввиду (66) и (46) $H_i \supset P^{x_i}$, $i = 1,2$. Поэтому $H_1 = Q_1 \leftthreetimes P^{x_1}$ (67), $H_2 = Q_2 \leftthreetimes P^{x_2}$ (68), где $1 < Q_i < Q, i = 1,2$. Так как Q – циклическая q-группа, то можно, не нарушая общности, считать, что $Q_1 \leq Q_2$. Тогда из (66), (67), учитывая обозначения (61) и (63) в силу леммы 11 имеем: $K = Q_1 \leftthreetimes B$ (69). Но из (64) и (63), применяя к G следствие 3 леммы 6, имеем: $B = Z$, а тогда из (55), (63) и $q \nmid |B|$ следует, что K – циклическая группа. Учитывая определение K (см. (61)), мы показали, G – SC-группа.

Так как во всех пунктах 1–3 выполняется (3) и в силу определения S (см. (45), (46), (56) и (53)) выполняются (1) и (2), то из доказанного выше следует, что каждая из групп типов 1–3 является SC-группой типа $2a$. □

Заключение

На базе полученных в работе результатов будет продолжено изучение конечных разрешимых SC-групп.

Список литературы

1. *Половицкий Я.Д., Коневских Т.М.* О группах с циклическими пересечениями неинцидентных (максимальных) подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3(46). С. 23–31.
2. *Черников С.Н.* Группы, имеющие сепарирующие подгруппы // Группы с заданными свойствами подгрупп. Киев, 1975. С. 6–14.
3. *Половицкий Я.Д.* Конечные разрешимые группы с циклическими пересечениями максимальных подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 2. С. 22–35.
4. *Белоногов В.А.* Задачник по теории групп. М.: Наука, 2000. 240 с

About finite groups with cyclic intersections of nonincident subgroups not contained in some subgroup

Ya. D. Polovitsky, T. M. Konevskikh
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
alg@psu.ru; 8(342) 239−63−21

We consider finite groups G in which a true subgroup S exists. This subgroup S has the following property: the intersection of any two non-incident subgroups of G that are not contained in S is a cyclic (SC-group). Several properties of such groups are obtained. Some subclasses of the class of finite SC-groups are described.

Keywords: *group; cyclic group; intersection; incident subgroup.*