

УДК 519.7

Вывод тяжелой материальной точки на базовую траекторию при наличии геометрических ограничений на дополнительные управления

С. В. Лутманов, О. А. Хотько

Пермский национальный исследовательский государственный университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
mpu@psu.ru; 8(342)239-63-09

Решается задача коррекции управляемого полета точки, движущейся в однородном поле тяжести и испытывающей сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Коррекция осуществляется путем введения дополнительного управления, на которое наложены геометрические ограничения в форме выпуклого компактного множества. В предположении, что область достижимости вспомогательного линейного динамического объекта содержит начало координат, была решена задача на быстродействие по выводу корректируемого движения на базовую траекторию.

Ключевые слова: базовое движение; возмущенное движение; линеаризованная система уравнений; программное управление; оптимальное управление; критерий качества; быстродействие.

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-2-19-24

Введение

Данная статья продолжает цикл исследований, представленный в работах [3–6]. Решается задача коррекции управляемого полета точки, движущейся в однородном поле тяжести и испытывающей сопротивление среды, пропорциональное квадрату скорости. Начальные условия полета точки заданы приблизительно. Их точные значения становятся известными только в момент старта. В связи с этим базовый закон управления точкой, реализующий базовый закон движения точки (т.е. отвечающий вероятным начальным условиям) требует коррекции.

Коррекция осуществляется путем введения дополнительного управления, которое входит в дифференциальные уравнения движения точки аддитивно базовому управлению. Закон изменения дополнительного управления определяется из условия обра-

щения в ноль фазового вектора некоторого управляемого линейного объекта, динамика которого описывается дифференциальными уравнениями движения точки, линеаризованными в окрестности пары "базовое управление, базовое движение". При наличии геометрических ограничений на дополнительное управление задача обнуления фазового вектора линейного объекта в заданный момент времени может оказаться неразрешимой. Для этого случая в работе [6] она была заменена задачей минимизации нормы фазового вектора линейного объекта и успешно решена.

В данной статье предполагается, что начало координат принадлежит области достижимости линейного динамического объекта для заданного момента времени.

С одной стороны это предположение позволяет с любой степенью точности приблизить норму фазового вектора линейного объекта к нулю.

С другой стороны факт принадлежности начала координат области достижимости делает невозможным применение процедуры построения оптимального управления из работы [6]. В настоящей статье приводится алгоритм управления линейным объектом, разрешающий это противоречие, а также ставится и решается задача быстрогодействия по приведению фазового вектора линейного объекта в начало координат.

1. Уравнения движения управляемой точки и линейный динамический объект

В работе [4] были выведены дифференциальные уравнения управляемого полета тяжелой материальной точки в однородном поле тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости (рис. 1).

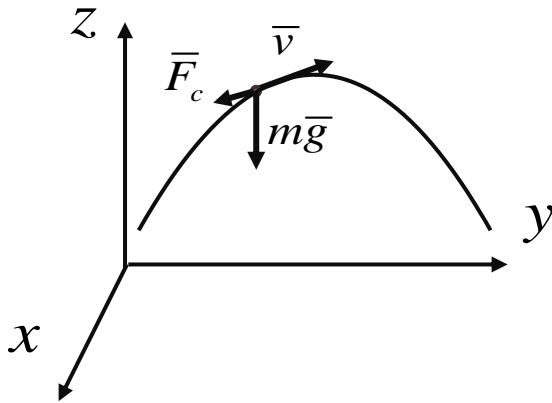


Рис. 1

Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_1, \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_2, \\ \ddot{z} &= -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - g + \frac{1}{m} v_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где z – вертикальная, x, y – горизонтальные координаты точки, m – ее масса, g – ускорение силы тяжести, $k = const$ – коэффициент

пропорциональности, а $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in R^3$ – вектор управляющих параметров.

Выпишем дифференциальные уравнения линейного управляемого динамического объекта

$$\dot{q} = A(t)q + B(t)u. \quad (2)$$

Здесь

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{z}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{z}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{z}} \end{pmatrix},$$

$\begin{matrix} x = \hat{x}(t), \\ y = \hat{y}(t), \\ z = \hat{z}(t) \end{matrix}$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} \in R^6,$$

$$F_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, v_1) = -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$F_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, v_2) = -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$F_3(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, v_3) = -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in P =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \mid |u_i| \leq a_i, i = 1, 2, 3 \right\} \subset R^3 -$$

дополнительное управление точкой,

$$x = \hat{x}(t), y = \hat{y}(t), z = \hat{z}(t), \quad t \in [t_0, T] -$$

базовый закон движения точки.

2. Наведение фазового вектора линейного динамического объекта на начало координат

Символом $\Pi[t_0, T]$ обозначим множество всех допустимых программных управлений, удовлетворяющих условию

$$u(t) \in P, t \in [t_0, T].$$

Символом

$$q(\cdot) = q(\cdot, t_0, q_0, u^0(\cdot))$$

обозначим движение линейного динамического объекта (2), выходящего из начального положения (t_0, q_0) и порожденного программным управлением $u(\cdot) \in \Pi[t_0, T]$. Поставим задачу о наведении фазового вектора линейного динамического объекта на начало координат в момент времени $t_1 \in [t_0, T]$.

Задача 1. Определить программное управление

$$u^0(\cdot) \in \Pi[t_0, t_1]$$

такое, что

$$\|q(t_1, t_0, q_0, u^0(\cdot))\| = \min_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, t_1]} \|q(t_1, t_0, q_0, u(\cdot))\|.$$

Определение 1. Множество

$$\begin{aligned} G(t_0, q_0, t_1) &= \\ &= \{q = q(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)) \mid u(\cdot) \in \Pi[t_0, t_1]\} \subset R^6 \end{aligned}$$

называется областью достижимости управляемого линейного динамического объекта в момент времени t_1 для начального положения $\{t_0, q_0\}$.

Точка $0 \in R^6$ (начало координат) может не принадлежать, а может и принадлежать области достижимости.

В первом случае

$$\varepsilon^0(t_0, q_0, t_1) = \min_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, t_1]} \|q(t_1, t_0, q_0, u(\cdot))\| > 0.$$

При этом [1–2]

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t_0, q_0, t_1) &= \max_{\|l\|=1} \left[\langle q_0, Q[t_1, t_0]^{Tp} l \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u \in P} \langle u, (Q[t_1, \tau] B)^{Tp} l \rangle d\tau \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $Q[t, \tau]$, $t, \tau \in [t_0, t_1]$ – фундаментальная матрица Коши для однородного уравнения

$$\dot{q} = A(t)q.$$

Решение задачи 1 основывается на двух утверждениях [1–2].

Лемма 1. Пусть $\varepsilon^0(t_0, q_0, t_1) > 0$. Тогда максимум в равенстве (3) достигается на единственном векторе l^0 .

Теорема 1. Пусть $\varepsilon^0(t_0, q_0, t_1) > 0$. Тогда программное управление $u^e(\cdot)$, решающее задачу 1, удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \langle u^e(t), Q[t_1, t]^{Tp} l^0 \rangle &= \min_{u \in P} \langle u, Q[t_1, t]^{Tp} l^0 \rangle, \\ t &\in [t_0, t_1]. \end{aligned}$$

В статье [6] приведен подробный алгоритм, реализующий решение задачи 1.

Во втором случае

$$\varepsilon^0(t_0, q_0, t_1) = \min_{u(\cdot) \in \Pi[t_0, t_1]} \|q(t_1, t_0, q_0, u(\cdot))\| = 0.$$

Тогда условия леммы 1 и теоремы 1 не выполнены и указанный выше алгоритм решения задачи 1 не работает.

Программное управление, разрешающее задачу 1, в этом случае ищется в виде

$$u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_*], \\ u^e(t), & t \in [t_*, t_1]. \end{cases}$$

Здесь момент времени t_* определяется из условия $\varepsilon^0(t_*, q(t_*, t_0, q_0, 0), t_1) > 0$, а программное управление $u^e(t), t \in [t_*, t_1]$ строится в соответствии с алгоритмом, указанным в первом случае, для начального положения $(t_*, q(t_*, t_0, q_0, 0))$.

Условия леммы 1 и теоремы 1 выполнены и такой способ определения разрешающего программного управления корректен.

В силу непрерывной зависимости величины $\varepsilon^0(t_*, q(t_*, t_0, q_0, 0), t_1)$ от момента времени t_* его всегда можно подобрать так, чтобы имело место двойное неравенство

$$0 < \varepsilon^0(t_*, q(t_*, t_0, q_0, 0), t_1) \leq \delta, \quad (4)$$

где δ – параметр точности. Заметим, что если условие (4) не выполняется для всех $t_* \in (t_0, t_1]$, то

$$\begin{aligned} 0 = \varepsilon^0(t_1, q(t_1, t_0, q_0, 0), t_1) &\Rightarrow \\ q(t_1, t_0, q_0, 0) &= 0, \end{aligned}$$

и программное управление $u^0(t) = 0, t \in [t_0, t_1]$ решает задачу 1.

Для случая $\varepsilon^0(t_0, q_0, t_1) = 0$ поставим и решим задачу быстродействия по приведению фазового вектора линейного объекта в начало координат.

Задача 2. Определить наименьший момент времени $t^* \in [t_0, t_1]$ и программное управление $u^*(\cdot) \in \Pi[t_0, t^*]$, удовлетворяющие условию $q(t^*, t_0, q_0, u^*(\cdot)) = 0$.

Решение задачи 2 начинается с определения момента времени $t^* \in [t_0, t_1]$ как наименьшего корня уравнения

$$\max_{\|l\|=1} \left\langle q_0, Q[t^*, t_0]^{Tp} l \right\rangle + \int_{t_0}^{t^*} \min_{u \in P} \left\langle u, (Q[t^*, \tau] B)^{Tp} l \right\rangle d\tau = 0.$$

Далее строится монотонно возрастающая последовательность

$$\tau_1, \dots, \tau_k, \dots \rightarrow t^* - 0 \quad \tau_k \in [t_0, t^*],$$

сходящаяся слева к моменту времени t^* . Номер k выбирается из условия

$$0 < \varepsilon^0(t_0, q_0, \tau_k) \leq \delta.$$

Для момента времени τ_k выполнены условия леммы 1 и теоремы 1, поэтому для него корректно применить алгоритм построения разрешающей программной стратегии $u^e(t), t \in [t_0, \tau_k]$ для начальных условий $\{t_0, q_0\}$.

Управление $u^e(t), t \in [t_0, \tau_k]$ принимается за решение задачи 2.

3. Численный эксперимент

Изложенная выше теория иллюстрируется на следующих числовых данных:

$$\begin{aligned} k &= 0.45, m = 100 \text{ кг}, g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}, \varepsilon = 30 \text{ м}, \\ t_0 &= 0, T = 10 \text{ сек}, \varphi(x, y) = 50 \cdot \sin(0.00005 \cdot x \cdot y) \text{ м} \\ x_0 &= -40 \text{ м}, y_0 = 20 \text{ м}, z_0 = 40 \text{ м}, \\ x_T &= 3000 \text{ м}, y_T = 100 \text{ м}, z_T = \varphi(x_T, y_T) = 32.51 \text{ м} \\ \dot{x}_0 &= 310 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \dot{y}_0 = -10 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \dot{z}_0 = -12.75 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \\ t_1 &= 5 \text{ сек}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} q_{10} &= -40 \text{ м}, q_{20} = 20 \text{ м}, q_{30} = -11.4762 \text{ м} \\ q_{40} &= 10 \text{ м/сек}, q_{50} = 20 \text{ м/сек}, \\ q_{60} &= -20,5954 \text{ м/сек}. \end{aligned}$$

Принятые числовые данные совпадают с соответствующими данными из работы [6]. Из той же работы берутся базовое программное управление точкой и ее базовый закон движения.

В данной статье принимается

$$\delta_1 = 0.1 \text{ м}, \delta_2 = 0.3 \text{ м}$$

$$a_1 = 2500 \text{ н}, a_2 = 2500 \text{ н}, a_3 = 2050 \text{ н}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$0 \in G(t_0, q_0, t_1) \Leftrightarrow \varepsilon^0(t_0, q_0, t_1) = 0.$$

При решении задачи 1 было установлено

$$t_* = 0.75 \text{ сек},$$

$$0 < \varepsilon^0(t_*, q(t_*, t_0, q_0, 0), t_1) = 0.0326 < 0.1 = \delta_1$$

и построено программное управление

$$u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_*], \\ u^e(t), & t \in [t_*, t_1], \end{cases}$$

минимизирующее норму фазового вектора линейного динамического объекта в момент времени t_1 .

Коррекция движения управляемой точки достигалась путем добавления управления $u^0(\cdot)$ к базовому управлению на промежутке времени $[t_0, t_1]$

Ниже приведены графики (см. рис. 2–4) изменения геометрических координат управляемой точки, иллюстрирующие ее выход на базовую траекторию в момент времени $t_1 = 5 \text{ сек}$ и дальнейшее ее движение вдоль этой траектории вплоть до достижения цели. Отклонение от цели составило $\mu_1 = 1.6994 \text{ м}$.

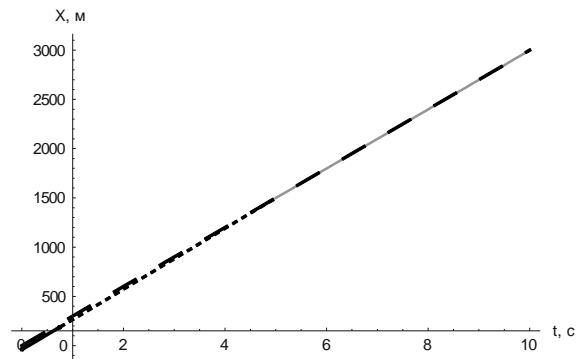


Рис. 2

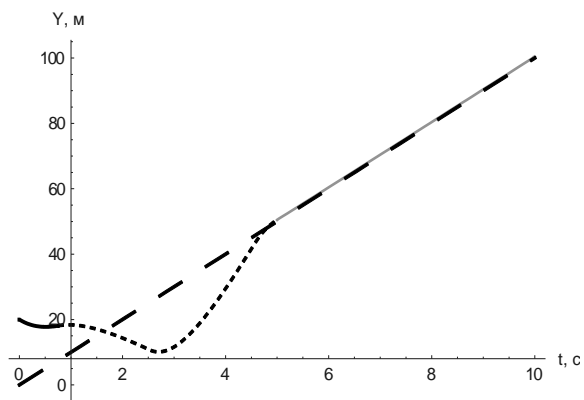


Рис. 3

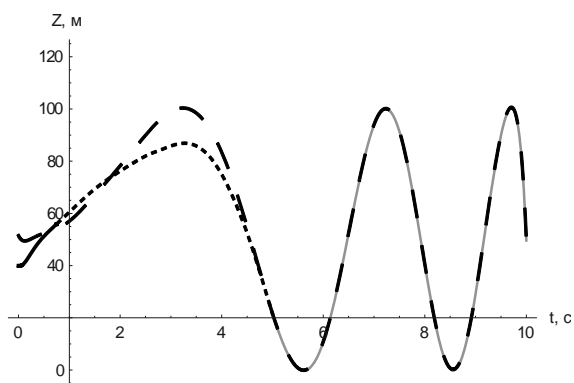


Рис. 4

- Откорректированное движение точки
- Движение вдоль базовой траектории после отключения ДПУ в откорректированной системе
- Базовый закон движения с базовым ПУ
- Неоткорректированное движение

При решении задачи 2 было найдено наименьшее время $\tau_k = 4.3$ сек. выхода фазового вектора линейного объекта в $\mathcal{E}^0(t_0, q_0, \tau_k)$ – окрестность начала координат. При этом имело место двойное неравенство.

$$0 < \varepsilon^0(t_0, q_0, \tau_k) = 0.2009 < 0.3 = \delta_2$$

Построено программное управление

$$u^e(t), t \in [t_0, \tau_k],$$

решающее задачу 2 для найденного момента времени $\tau_k = 4.3$ сек.

Коррекция движения управляемой точки достигалась путем добавления управления $u^e(\cdot)$ к базовому управлению на промежутке времени $[t_0, \tau_k]$

Ниже приведены графики (см. рис. 5–7) изменения геометрических координат управ-

ляемой точки, иллюстрирующие ее выход на базовую траекторию в момент времени $\tau_k = 4.3$ сек и дальнейшее ее движение вдоль этой траектории вплоть до достижения цели.

Отклонение от цели составило $\mu_2 = 2.0214$ м.

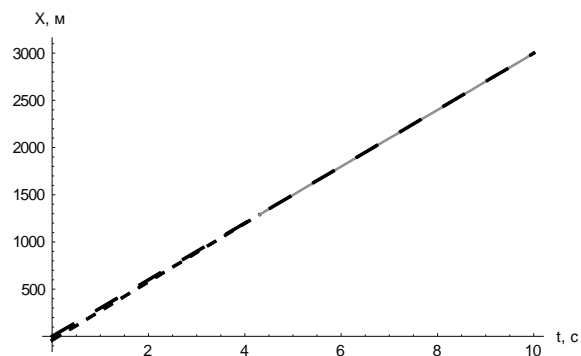


Рис. 5

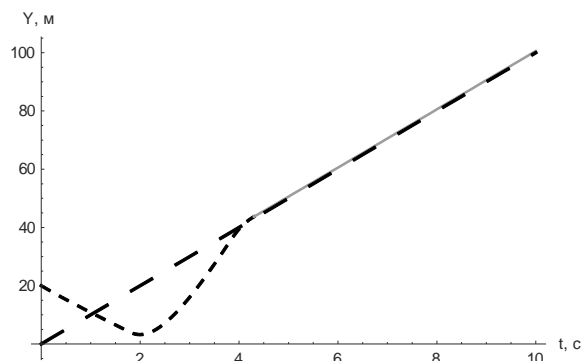


Рис. 6

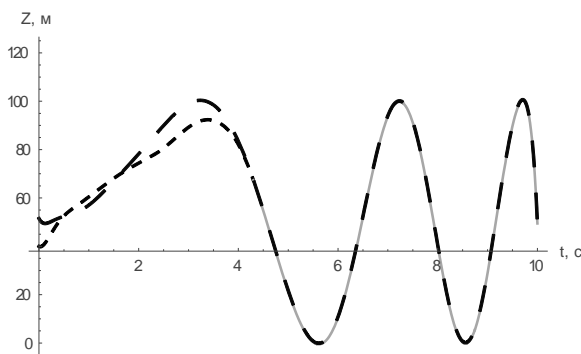


Рис. 7

- Откорректированное движение точки
- Движение вдоль базовой траектории после отключения ДПУ в откорректированной системе
- Базовый закон движения с базовым ПУ

Заключение

В работе решена задача коррекции полета тяжелой материальной точки при наличии геометрических ограничений на дополнительные управления для случая, когда область достижимости линейного динамического объекта содержит начало координат.

Предложено два варианта решения задачи. В первом варианте дополнительное управление включается в тот момент времени, для которого начало координат выходит из области достижимости, оставаясь при этом в ее малой окрестности. Во втором решается задача быстрого действия по выводу фазового вектора линейного объекта в малую окрестность начала координат.

Оба варианта решения задачи доведены до конкретных алгоритмов, и их эффективность проиллюстрирована на числовом примере.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Лутманов С.В. Вариационное исчисление и теория оптимального управления в приме-

рах и упражнениях: учеб. пособие. Пермь, 2010. 200 с.

3. Лутманов С.В. Об одной методике исследования управляемой динамической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(36). С. 13–20.
4. Лутманов С.В., Хотько О.А. Об одной задаче управления тяжелой точкой, движущейся в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3(42). С. 69–75.
5. Лутманов С.В., Хотько О.А. Оптимальная коррекция полета тяжелой материальной точки в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2018. Вып. 50. С. 33–45.
6. Лутманов С.В., Хотько О.А. Коррекция полета тяжелой материальной точки в среде с сопротивлением при наличии геометрических ограничений на дополнительные управления // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3(46). С. 56–64.

Conclusion of a heavy material point to the base trajectory subject to geometric constraints on additional controls

S. V. Lutmanov, O. A. Chotko

Perm State University; 15, Bukireva st. Perm, 614990, Russia
mpu@psu.ru; 8(342) 2396309

The article solves the problem of correcting controlled flight of a point moving in a uniform gravity field and experiencing resistance proportional to the square of the speed. Correction is carried out by introducing additional control, which imposes geometric restrictions in the form of a convex compact set. Under the assumption that the reachable region of the auxiliary linear dynamic object contains the origin, the fast-action problem was solved by deriving the corrected motion to the base trajectory.

Keywords: *basic motion; perturbed motion; linearized system of equations; program control; optimal control; quality criterion; quick response.*