

УДК 534.014

Мультиинертный осциллятор

И. П. Попов

Курганский государственный университет
Россия, 640002, г. Курган, ул. Томина, 106-52
ip.popow@yandex.ru; 8-951-273-80-87

Рассматривается колебательная система с однородными элементами, а именно, с n массивными грузами (мультиинертный осциллятор). Показана возможность возникновения в такой системе свободных гармонических колебаний. В отличие от классического маятника, колебания которого обусловлены взаимным преобразованием кинетической энергии груза в потенциальную энергию пружины, в мультиинертном осцилляторе колебания обусловлены взаимным преобразованием только кинетических энергий грузов.

Ключевые слова: осциллятор; инертный; гармонический; реактивность; пространственный сдвиг; фазовый сдвиг; кинетическая энергия.

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-1-60-64

Свободные гармонические колебания классического маятника обусловлены взаимным преобразованием кинетической энергии груза в потенциальную энергию пружины [1, 2].

Разработаны осцилляторы с другим характером энергообмена, например, преобразованием кинетической энергии груза в энергию магнитного поля соленоида [3] или энергию электрического поля конденсатора [4]. Все эти колебательные системы и подобные им [5, 6] явились предпосылкой создания биинертного осциллятора [7], в котором ускорение одного груза происходит за счет торможения другого, т.е. происходит обмен только кинетическими энергиями.

Целью работы является моделирование мультиинертного осциллятора.

Синтез колебательной системы

Пусть в плоскости Z имеются не две, а n координатных осей $0x_1, 0x_2, \dots, 0x_n$, образующих центрально симметричную звезду с центром в точке 0 .

Угол между осями составляет π/n . Из начала координат 0 отложен вектор \mathbf{R} . Направление вектора произвольное. $\mathbf{R} \subset Z$.

Теорема 1

1. Отрезки, соединяющие координаты x_1, x_2, \dots, x_n вектора \mathbf{R} в системе координат $0x_1, 0x_2, \dots, 0x_n$ образуют правильный n -угольник.

2. Размер n -угольника не зависит от ориентации вектора \mathbf{R} .

3. Середина вектора \mathbf{R} совмещена с центром n -угольника.

Доказательство. Вектор \mathbf{R} имеет координаты:

$$x_1 = R \cos \varphi, \tag{1}$$

$$x_2 = R \cos \left(\frac{\pi}{n} - \varphi \right),$$

$$x_3 = R \cos \left(\frac{2\pi}{n} - \varphi \right),$$

$$x_i = R \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right],$$

.....

$$x_n = R \cos \left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi \right]. \tag{2}$$

В соответствии с теоремой косинусов

$$(x_i x_{i+1}) = R^2 \left\{ \cos^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] + \cos^2 \left(\frac{i\pi}{n} - \varphi \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \cos \left(\frac{i\pi}{n} - \varphi \right) \cos \frac{\pi}{n} \Big\} = \\
 & = R^2 \left\{ \cos^2 \left(\frac{i\pi}{n} - \varphi - \frac{\pi}{n} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right)^2 - \right. \\
 & -2 \left[\cos \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sin \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{i\pi}{n} \cos \varphi - \cos \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right) \right] \times \\
 & \quad \times \left(\cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi + \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \right) \cos \frac{\pi}{n} \Big\} = \\
 & = R^2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi + \right. \\
 & + \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi + \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi + \\
 & \quad \left. + \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi + \right. \\
 & + 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi + \\
 & + 2 \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} - \\
 & - 2 \cos \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{\pi}{n} \sin \varphi + \\
 & + 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \sin \frac{\pi}{n} \cos \varphi - \\
 & - 2 \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} - \\
 & - 2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \cos \frac{i\pi}{n} \sin \varphi + \\
 & + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi + \\
 & \quad \left. + 2 \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi - \right. \\
 & - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi - \\
 & - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi - \\
 & - 2 \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{i\pi}{n} \cos^2 \varphi \cos \frac{i\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} + \\
 & + 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \sin \varphi \cos \varphi \cos \frac{\pi}{n} - \\
 & \left. - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \sin \varphi - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi - \\
 & - 2 \sin \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \cos \varphi \sin \varphi \cos \frac{\pi}{n} + \\
 & \left. + 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{i\pi}{n} \sin^2 \varphi \sin \frac{i\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) = \\
 & = R^2 \left[\cos^2 \varphi \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sin^2 \varphi \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \cos^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) \right] = \\
 & = R^2 \left[\cos^2 \varphi \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sin^2 \varphi \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) \right] = \\
 & = R^2 \left[\cos^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} \left(\sin^2 \frac{i\pi}{n} + \cos^2 \frac{i\pi}{n} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} \left(\cos^2 \frac{i\pi}{n} + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right) \right] = \\
 & = R^2 \left(\cos^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} + \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) = \\
 & = R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}.
 \end{aligned}$$

Из этого следует, что все стороны n -угольника одинаковы по длине. При этом их длина не является функцией φ , т.е. не зависит от ориентации вектора \mathbf{R} . Далее середина вектора \mathbf{R} обозначается r . В соответствии с теоремой косинусов

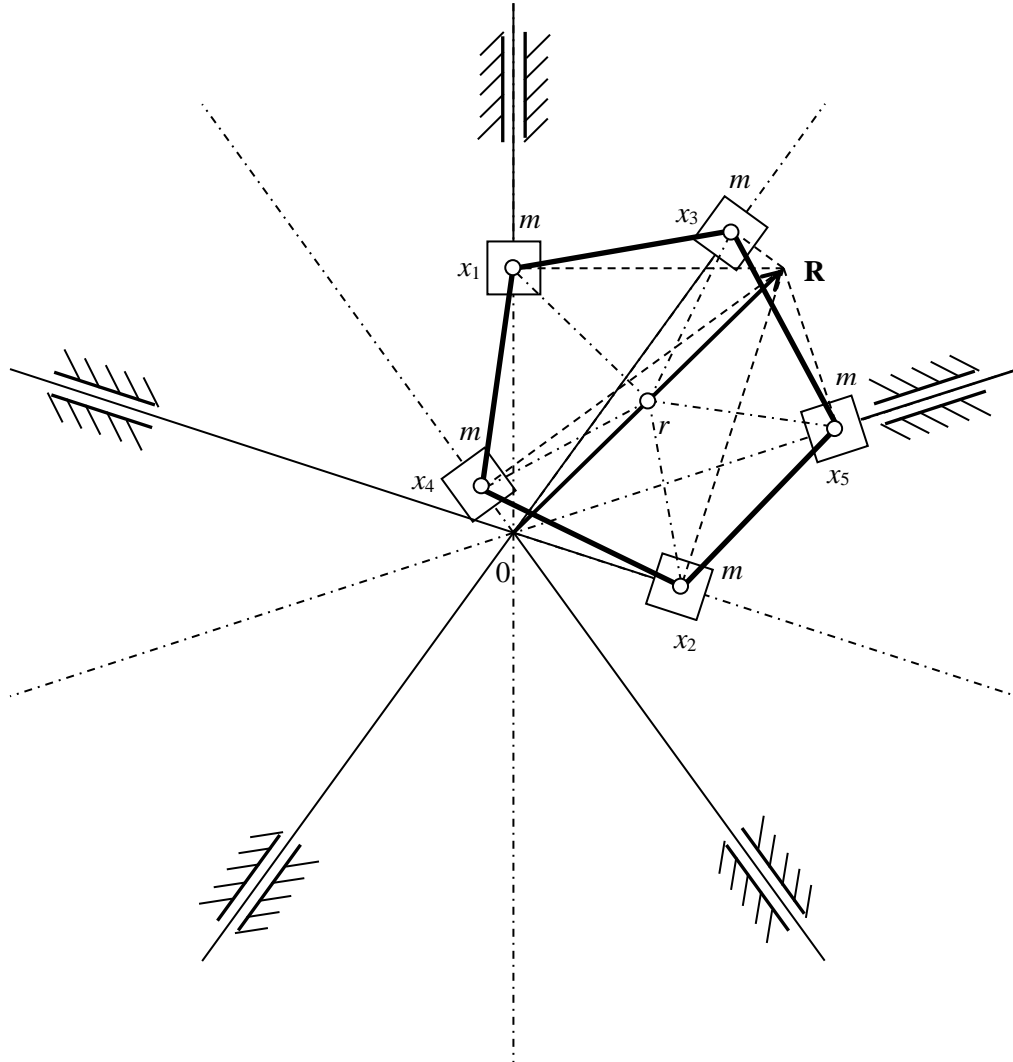
$$\begin{aligned}
 (x_i r)^2 &= R^2 \left\{ \cos^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] + \frac{1}{4} - \right. \\
 & \left. - 2 \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \frac{1}{2} \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \right\} = \frac{R^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Из этого следует, что все отрезки, связывающие точку r с вершинами n -угольника, имеют одинаковую длину. Это означает, что n -угольник является правильным и точка r совпадает с его центром. Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет определить конфигурацию мультиинертного осциллятора, упрощенная схема которого показана на рисунке.

Для целей теоремы 1 вершины правильного многоугольника рассматривались в одной плоскости Z . Для инженерных целей траектории грузов не должны пересекаться, поэтому грузы и их направляющие расположены в параллельных плоскостях подобно цилиндрам, шатунам и кривошипам в кривошипно-шатунном механизме. Для обеспечения этого, например, стержень x_1x_3 закреплен "сверху" (ближе) груза, находящегося в координате x_1 , а стержень x_1x_4 – "снизу" (на рисунке не показано).

Для целей теоремы 1 вершины правильного многоугольника рассматривались в одной плоскости Z . Для инженерных целей траектории грузов не должны пересекаться, поэтому грузы и их направляющие расположены в параллельных плоскостях подобно цилиндрам, шатунам и кривошипам в кривошипно-шатунном механизме. Для обеспечения этого, например, стержень x_1x_3 закреплен "сверху" (ближе) груза, находящегося в координате x_1 , а стержень x_1x_4 – "снизу" (на рисунке не показано).



Мультиинертный осциллятор

Анализ колебательной системы

Внешние силы к системе не приложены. Скорости инертных тел массой m каждое определяются как производные их координат.

В соответствии с (1)–(2)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -R \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= R \sin \left(\frac{\pi}{n} - \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt}, \\ \frac{dx_3}{dt} &= R \sin \left(\frac{2\pi}{n} - \varphi \right) \frac{d\varphi}{dt}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = R \sin \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dx_n}{dt} = R \sin \left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi \right] \frac{d\varphi}{dt}.$$

Для того чтобы в системе происходили свободные гармонические колебания, необходимо, чтобы ее полная энергия оставалась постоянной. В данном случае полная энергия системы имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} mR^2 \left\{ \sin^2 \varphi + \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} - \varphi \right) + \dots \right\}$$

$$+ \dots + \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \varphi \right] + \dots + \sin^2 \left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \varphi \right] \left\{ \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\}. \quad (3)$$

Теорема 2. При $n \geq 2$ имеет место выражение

$$\sum_{i=1}^n \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}. \quad (4)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sin^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \\ & = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[\frac{(i-1)2\pi}{n} \pm 2\varphi \right] \right\} = \\ & = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \sum_{i=1}^n \cos \frac{(i-1)2\pi}{n} \mp \\ & \mp \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sum_{i=1}^n \sin \frac{(i-1)2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Если вдоль координатных осей $0x_1, 0x_2, \dots, 0x_n$ отложить единичные векторы, то их сумма вследствие центральной симметрии будет равна нулю. Следовательно, сумма проекций этих единичных векторов на любую из осей $0x_1, 0x_2, \dots, 0x_n$ также будет нулевой. По этой причине последние две суммы тождественно равны нулю. *Теорема доказана.*

Следствие. При $n = 2$ выражение (4) приобретает известный вид:

$$\sin^2 \varphi + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = \frac{2}{2} = 1.$$

Точно так же доказывается

Теорема 3. При $n \geq 2$ имеет место выражение

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \left[\frac{(i-1)\pi}{n} \pm \varphi \right] = \frac{n}{2}.$$

С учетом теоремы 2 (выражение (4)) полная (она же кинетическая) энергия (3) [8] равна

$$T = \frac{1}{4} nmR^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \text{const}.$$

Из последнего выражения следует

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \text{const}; \\ \varphi &= C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Начальные условия для фазы и угловой скорости:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_0, \\ \frac{d\varphi}{dt}(0) &= \omega_0. \end{aligned}$$

Отсюда $C_2 = \varphi_0,$
 $C_1 = \omega_0.$

Формулы для координат грузов (1)–(2) принимают вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \\ x_2 &= R \cos \left(\frac{\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0 \right), \\ x_3 &= R \cos \left(\frac{2\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0 \right), \\ & \dots \dots \dots \\ x_i &= R \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0 \right], \\ & \dots \dots \dots \\ x_n &= R \cos \left[\frac{(n-1)\pi}{n} - \omega_0 t - \varphi_0 \right]. \end{aligned}$$

Начальные условия для перемещения и линейной скорости:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}, \\ \frac{dx_1}{dt}(0) &= v_{10}. \end{aligned}$$

Отсюда $\cos \varphi_0 = \frac{x_{10}}{R},$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \arccos \frac{x_{10}}{R} = \arcsin \sqrt{1 - \frac{x_{10}^2}{R^2}}, \\ -R\omega_0 \sin(\omega_0 0 + \varphi_0) &= v_{10}, \end{aligned}$$

$$\omega_0 = - \frac{v_{10}}{\sqrt{R^2 - x_{10}^2}}. \quad (5)$$

Заключение

Инертные тела массой m каждое осуществляют гармонические колебания, обусловленные взаимным обменом кинетической энергией. Потенциальная энергия пружин для этого не требуется. Колебания тел являются свободными.

Особенностью мультиинертного осциллятора является то, что частота его свободных колебаний (5) не фиксирована и определяется преимущественно начальными условиями. Эта особенность может оказаться весьма полезной для технических приложений, например, для самонейтрализации механической реактивной (инерционной) мощности [9].

n -угольник x_1, x_2, \dots, x_n осуществляет сложное движение – орбитальное вращение вокруг центра координат 0 и спиновое вращение вокруг своей оси, проходящей через центр r . При этом каждый груз совершает *линейные гармонические колебания* вдоль своей направляющей. Его координата изменяется от $+R$ до $-R$. При расположении направляющих грузов не в виде звезды, а параллельно друг другу углы между соответствующими кривошипами составят $360/n$ градусов.

Мультиинертный осциллятор имеет перспективу промышленного применения. Некоторые вибромашины, в частности сортировальные, имеют более трех массивных подвижных рабочих органов [10]. Построение их по схеме мультиинертного осциллятора позволит существенно сократить потребление энергии, которая в этом случае *не будет* расходоваться на сообщение массивным рабочим органам колебательных движений (около 90 % полной мощности), а будет направлена только на компенсацию трения и на совершение полезной работы.

Список литературы

1. Попов И.П. Резонансы сил и скоростей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4(47). С. 62–66. DOI: 10.17072/1993-0550-2019-4-62-66.
2. Попов И.П. Применение символического (комплексного) метода для расчета сложных механических систем при гармонических воздействиях // Прикладная физика и математика. 2019. № 4. С. 14–24. DOI: 10.25791/pfim.04.2019.828.
3. Попов И.П., Саранулов Ф.Н., Саранулов С.Ф. Инертно-индуктивный осциллятор // Вестник Курганского государственного университета. Технические науки. Вып. 8. 2013. № 2(29). С. 80, 81.
4. Попов И.П. Инертно-емкостная колебательная система // Зауральский научный вестник. 2013. № 2(4). С. 65, 66.
5. Попов И.П. Упруго-индуктивный осциллятор // Российский научный журнал. 2013. № 1(32). С. 269, 270.
6. Попов И.П. Упруго-индуктивное устройство // Зауральский научный вестник. 2011. № 1. С. 181–183.
7. Попов И.П. Моделирование биинертного осциллятора // Приложение математики в экономических и технических исследованиях: сб. науч. тр. / под общ. ред. В.С. Мхитаряна. Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2017. С. 188–192.
8. Попов И.П. О мерах механического движения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 3(26). С. 13–15.
9. Попов И.П. Механические аналоги реактивной мощности // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 3(30). С. 37–39.
10. Попов И.П., Кубарева С.Ю. Автобалансировка вибрационных машин // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г.И. Носова. 2018. Т. 16, № 3. С. 140–144. URL: <https://doi.org/10.18503/1995-2732-2018-16-3-140-144>.

Multi-inert oscillator

I. P. Popov

Kurgan State University; apt. 52-106, Tomina st., Kurgan, 640002, Russia
ip.popov@yandex.ru; 8-951-273-80-87

The paper discusses an oscillatory system with homogeneous elements, namely, n massive loads (multi-inert oscillator). It shows the possibility for free harmonic oscillations to appear in such a system. Unlike the classical pendulum, whose oscillations are due to the mutual conversion of the kinetic energy of the load into the potential energy of the spring, in a multi-inert oscillator, oscillations are due to the mutual conversion of solely kinetic energies of the loads.

Keywords: oscillator; inert; harmonic; reactivity; spatial shift; phase shift; kinetic energy.