УДК 531.381

Перманентные вращения гиростата в комбинированном силовом поле

Н. Н. Макеев

Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Рассматриваются перманентные движения относительно неподвижного полюса гиростата, несущего поверхностные электрические заряды в однородном стационарном магнитном поле. Установлены свойства этих движений, условия их существования и характеристики осей перманентных вращений. Определено множество скоростей перманентных вращений и зависимость структуры этого множества от геометрических параметров движения. Рассмотрены частные случаи движений, критические случаи и случай кинетической симметрии гиростата.

Ключевые слова: гирилат; перманентное движение; ось перманентного вращения; комбинированное силовое поле.

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-1-40-46

1. Основные предпосылки

Объектом рассмотрения является гирилат, движущийся относительно неподвижного полюса O в однородном постоянном магнитном поле (МП) с вектором напряженности $\mathbf{H}$. Гирилат несет систему твердых симметричных роторов, вращающихся с постоянными заданными скоростями, и постоянных магнитов (ферромагнетиков) с результирующим собственным магнитным моментом $\mathbf{I}$ [1].

Силовые линии МП – параллельные прямые с направляющим ортом $\mathbf{s}$, неизменно ориентированном в заданном направлении относительно инерциального пространства.

Внешняя поверхность носителя (абсолютно твердого тела) содержит статически распределенные электрические заряды, плотность распределения которых является произвольной заданной функцией (класса C°) точек наэлектризованной поверхности.

Распределение электрических зарядов является неизменным (без перетекания в областях распределения), а все заряды – одноименными (изоэлектростатическая базовая модель) [2].

При движении гирилата в МП ввиду переноса электрических зарядов вместе с носителем относительно инерциального пространства индуцируется поле сил Лоренца, которое в совокупности с МП образует комбинированное силовое поле (КСП). Задача о перманентном вращении гирилата в КСП рассматривалась ранее в работе [3].

Далее предполагается, что:

- гирилат в общем случае кинетически асимметричен, а его результирующий гирилатический момент постоянен;
- центр инерции гирилата совпадает с центром системы электрических зарядов, а его главные оси инерции – с главными осями электрического эллипсоида (термин [2]).

2. Предварительные положения

Введем координатные правые ортобазисы с общим началом в полюсе O : неподвижный $Z(Oz_j)$, одна из осей которого имеет направляющий орт $\mathbf{s}$, и базис $X(Ox_j)$, неизменно связанный с носителем, оси которого направлены по главным в полюсе O осям тензора инерции гирилата.

Обозначим: A_j – собственные значения оператора инерции гирилата – элементы

матрицы $\mathbf{A} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$; $\boldsymbol{\omega}(\omega_j)$ – абсолютная угловая скорость носителя; $\mathbf{k}(k_j)$ – постоянный гиригостатический момент относительно базиса X ; $\mathbf{r}(r_j)$ – радиус-вектор текущей точки области V ; $\mathbf{s} = \mathbf{s}(s_j)$, $\mathbf{I} = \mathbf{I}(I_j)$ ($j = 1, 2, 3$). Все координатные элементы здесь и всюду далее заданы в координатных осях базиса X .

Электростатические параметры носителя гиригата определяются величиной поверхностной плотности σ статического распределения электрических зарядов по области V его внешней поверхности, величиной суммарного поверхностного электрического заряда Q , а также тензором электрического заряда с матрицей $\mathbf{D} = \text{diag}(D_1, D_2, D_3)$ (в главных осях электрического заряда).

Введем электростатические параметры

$$Q = \int_V \sigma(x_1, x_2, x_3) dV,$$

$$D_j = \int_V \sigma x_j^2 dV \quad (j = 1, 2, 3).$$

Величины D_j являются аналогами соответствующих планарных моментов инерции [4, с. 267] материальной поверхности с плотностью распределения массы σ по области V . Совокупность всех величин D_j при наличии одноименных электрических зарядов полностью определяет *электрический эллипсоид*, заданный в главных координатных осях. При данных предпосылках эллипсоид инерции гиригата и его аналог – электрический эллипсоид – представляются соосными однозначно определенными гомотетическими фигурами.

Результирующий механический момент относительно полюса O сил внешнего МП [1, с. 259, 310]:

$$\mathbf{L}^M = \mathbf{I} \times \mathbf{H} \quad (\mathbf{H} = m\mathbf{s})$$

в проекциях на оси базиса X определяется соотношениями

$$L_1^M = m(I_2 s_3 - I_3 s_2) \quad (1, 2, 3). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{I}$ – результирующий собственный магнитный момент, $m \neq 0$ – постоянный характерный магнитный параметр [1].

Главный момент сил Лоренца $L^\wedge$ [2] относительно полюса O в проекциях на оси базиса X устанавливается равенствами

$$L_1^\wedge = l(D_3 \omega_2 s_3 - D_2 \omega_3 s_2) \quad (1, 2, 3), \quad (2)$$

где l – постоянный коэффициент [2].

При заданных предпосылках движение гиригата под действием результирующих силовых моментов (1), (2) определяется системой уравнений

$$A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 + k_3 \omega_2 - k_2 \omega_3 =$$

$$= l(D_3 \omega_2 s_3 - D_2 \omega_3 s_2) + m(I_2 s_3 - I_3 s_2) \quad (3)$$

$$(1, 2, 3),$$

к которой следует присоединить систему кинематических уравнений Пуассона, образуя объединяющую *объединенную систему*.

Для перманентного движения, в котором всегда

$$\mathbf{s} = \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}, \quad (\boldsymbol{\omega}; \mathbf{e}) = \text{const}, \quad (4)$$

объединенная система уравнений (3) согласно условиям (4) приводится к виду

$$(B_3 - B_2) \omega^2 e_2 e_3 + \omega(k_3 e_2 - k_2 e_3) =$$

$$= m(I_2 e_3 - I_3 e_2) \quad (1, 2, 3). \quad (5)$$

Здесь обозначено

$$B_j = A_j - l \omega^{-1} D_j \quad (1, 2, 3), \quad (6)$$

$\mathbf{e}$ – орт *оси перманентного вращения* (ОПВ).

В равенствах (4)–(6) и всюду далее принимается $\omega \neq 0$ (если иное не оговорено).

Сопоставим перманентное движение реального гиригата, подчиняющееся определяющей объединенной системе уравнений (3), его перманентному вращению, характеризуемому уравнениями (5). Тогда главные приведенные моменты инерции гиригата B_j , определяемые равенствами (6), являющиеся элементами матрицы гипотетического тензора инерции $\mathbf{B} = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$, играют роль *эффективных моментов инерции* некоторого гипотетического *приведенного гиригата*.

Обозначим:

$$P_1(\mathbf{e}) = \mathbf{B} \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{I}) = \sum_{j=1}^3 (B_{j+1} - B_{j+2}) I_j e_{j+1} e_{j+2},$$

$$P_2(\mathbf{e}) = \mathbf{B} \mathbf{e} (\mathbf{e} \times \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^3 (B_{j+1} - B_{j+2}) k_j e_{j+1} e_{j+2},$$

$$P_3(\mathbf{e}) = \mathbf{e} (\mathbf{I} \times \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^3 Q_j e_j, \quad (7)$$

$$Q_j = I_{j+1} k_{j+2} - I_{j+2} k_{j+1} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Здесь и всюду далее значения индекса j не должны превышать числа $r = 3$, что в ином случае достигается вычитанием этого числа.

2. Геометрия осей перманентных вращений

Введем поверхность четвертого порядка:

$$F(\mathbf{e}) \equiv m[P_1(\mathbf{e})]^2 - P_2(\mathbf{e})P_3(\mathbf{e}) = 0, \quad (8)$$

заданную в пространстве координат e_j ($j = 1, 2, 3$) (e -пространстве). Конус ОПВ определяется сферической кривой S , полученной в результате пересечения единичной сферы, находящейся в e -пространстве:

$$|\mathbf{e}|^2 = 1,$$

с характерной поверхностью (8) [5].

Для каждой точки кривой S введем нетривиальную векторную базовую триаду [6]:

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e} \times \mathbf{V}\mathbf{e}, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{e} \times \mathbf{k}, \quad \mathbf{n}_3 = m(\mathbf{e} \times \mathbf{I}), \quad (9)$$

где векторы $\mathbf{n}_j$ – отличные от нуля и неколлинеарные. Тогда для любой точки этой кривой существует ось с направляющим ортом $\mathbf{e}$, совпадающая с ОПВ, при скорости

$$\omega = m \frac{P_1(\mathbf{e})}{P_2(\mathbf{e})} = \frac{P_3(\mathbf{e})}{P_1(\mathbf{e})}. \quad (10)$$

При этом ненулевые векторы $\mathbf{I}$, $\mathbf{k}$ не должны быть коллинеарными.

Для определенности далее положим

$$B_1 < B_2 < B_3, \quad (I_j, k_j, Q_1, Q_3) > 0, \quad (11)$$

$$Q_2 < 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Путем элементарного анализа динамики перманентного движения, совершаемого гиростатом, с учетом соотношений (10), (11) приходим к следующим утверждениям.

Конусом ОПВ (конусом Штауде [7, с. 144]) является линейчатая поверхность – конус второго порядка $P_1(\mathbf{e}) = 0$ в координатном e -пространстве. Здесь $P_1 > 0$ и $P_1 < 0$ для внутренних и внешних точек этого конуса, соответственно.

Геометрическим множеством ОПВ гиростата, движущегося по инерции, является конус второго порядка с уравнением $P_2 = 0$. В этом случае так же, как и в предыдущем, $P_2 > 0$ и $P_2 < 0$ для внутренних и внешних точек конуса, соответственно. Это движение является модельным аналогом движения гиростата в однородном поле силы тяжести [8].

Пусть приведенный гиростат обладает центральной кинетико-электростатической симметрией с центром в полюсе O . Тогда

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{E}, \quad (12)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица. В этом случае согласно равенствам (10), (12) для любых векторов $\mathbf{I}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}$ имеем $P_1 = P_2 = |\mathbf{n}_1| = 0$ и равенства (10) не имеют места.

Таким образом, условие (12) определяет особый случай перманентного движения гиростата, при котором конус ОПВ в e -пространстве вырождается в плоскость с уравнением $P_3(\mathbf{e}) = 0$. Если $\mathbf{N}(N_1, N_2, N_3)$ – нормальный вектор этой плоскости, то $P_3 > 0$ и $P_3 < 0$ для ее точек, расположенных на стороне, обращенной в сторону вектора $\mathbf{N}$ и в противоположную сторону, соответственно.

Введем в e -пространстве прямые L_1, L_2, L_3 , проходящие через полюс O следующим образом: прямая L_1 задается направляющими косинусами

$$e_j = (B_{j+2} - B_{j+1}) N_{j+1} N_{j+2} K^{-1} \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$K^2 = \sum_{j=1}^3 (B_{j+1} - B_{j+2})^2 N_{j+1}^2 N_{j+2}^2, \quad (13)$$

прямая L_2 проходит через точку (I_1, I_2, I_3) , а прямая L_3 – через точку (k_1, k_2, k_3) .

Конусы ОПВ P_1, P_2 содержат четыре общие образующие, прямую L_1 с параметрами (13) и оси координатного базиса X . При этом плоскость P_3 пересекает конус P_1 по прямой L_2 , а конус P_2 – по прямой L_3 и оба конуса одновременно – по прямой L_1 .

Линии пересечения поверхностей P_j ($j = 1, 2, 3$) (7), (8) с единичной сферой являются характерными кривыми, определяющими возможные движения ОПВ в e -пространстве. Устанавливаются следующие свойства.

Характерная поверхность F с уравнением (8) проходит через прямые L_1, L_2 и оси Ox_j . Эта же поверхность касается конуса ОПВ P_2 вдоль осей Ox_j , являющихся линиями пересечения конусов P_1, P_2 . В силу этого вдоль данных осей поверхность F переходит с одной стороны конуса P_1 на другую его сторону. При этом поверхность F касается плоскости P_3 вдоль прямой L_2 .

Точки прямой L_1 обладают характерным свойством, при котором нормаль к поверхности F не является определенной. В силу этого точки данной прямой в определенном смысле являются *сингулярными*.

Уравнение (8) устанавливает области расположения поверхности F (8) в e -

пространстве: по одну сторону плоскости P_3 эта поверхность находится целиком внутри конуса P_2 , а по другую сторону данной плоскости эта поверхность расположена целиком вне конуса P_2 . Переход с одной стороны плоскости P_3 на другую реализуется вдоль прямой L_1 .

В пределе при $k \rightarrow 0$ поверхность F непрерывно переходит в конус Штауде, а конус P_2 и плоскость P_3 исчезают. В случае, при котором $\mathbf{I} \rightarrow 0$ (или $|\mathbf{k}| \rightarrow +\infty$), конус P_1 (или P_2) и плоскость P_3 остаются неизменными. Если $\mathbf{I} \rightarrow 0$, то конус P_1 и плоскость P_3 в пределе исчезают, а поверхность F переходит в пределе непрерывно в конус P_2 .

Пусть 1–2, 3–4, 5–6 – парные точки пересечения кривой S с координатными плоскостями базиса X . Тогда ОПВ, проходящим через эти точки, при $k_1 k_2 k_3 \neq 0$ соответствуют скорости с величинами

$$(\omega_{1-2}, \omega_{3-4}, \omega_{5-6}) = m(\rho_2, \rho_3, \rho_1), \quad (14)$$

где обозначено $\rho_j = I_j k_j^{-1}$ ($j=1, 2, 3$).

Для некоторых точек сферической кривой S соотношения (10) не применимы, поскольку перманентные вращения, соответствующие этим точкам, являются неопределенными. Такими критическими точками являются парные точки p_1, p_2, p_3 , образованные пересечением единичной сферы с прямыми L_1, L_2 и осью Ox_j (здесь значение j фиксировано), соответственно.

Рассмотрим свойства некоторых частных случаев перманентного вращения гиростата и их геометрические особенности.

3. Критические случаи перманентного вращения

Предположим, что гиростат совершает перманентные вращения вокруг осей, соответствующих критическим точкам.

Для парной точки p_3 согласно равенствам (9) имеем $\mathbf{n}_1 = 0$. Пусть для определенности $\mathbf{e}$ – орт оси Ox_1 . Тогда $\mathbf{B}\mathbf{e} = B_1\mathbf{e}$ и в силу системы динамических уравнений (5) имеем

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{B}\mathbf{e})\omega^2 + (\mathbf{e} \times \mathbf{k})\omega + m(\mathbf{e} \times \mathbf{I}) = 0,$$

откуда

$$(m\mathbf{I} + \omega\mathbf{k})\mathbf{e} = 0. \quad (\text{A})$$

Так как $\mathbf{k} \times \mathbf{I} \neq 0$ (в силу неколлинеарности векторов-сомножителей), то необходимо $Q_1 = 0$, где Q_j определяются равенствами

(7). В этом случае для ОПВ Ox_1 имеем

$$\omega = \omega_{1-2} = \omega_{3-4},$$

где скорости $\omega_{1-2}, \omega_{3-4}$ определяются равенствами (14).

В случае, при котором $Q_1 \neq 0$ (ось Ox_1 не находится в плоскости P_3), равенство (A) не имеет места и ось Ox_1 не является ОПВ.

Без затруднений устанавливается справедливость следующего утверждения: если ни одна из главных осей инерции гиростата Ox_j ($j = 1, 2, 3$) не расположена в плоскости P_3 (т.е., если $Q_j \neq 0, j = 1, 2, 3$), то эти оси заведомо не являются ОПВ. Вместе с тем, если в плоскости P_3 находится одна из главных осей инерции Ox_j , то остальные главные оси инерции гиростата не являются ОПВ.

Обозначим

$$R = \prod_{j=1}^3 (B_j - B_{j+2}) Q_j$$

и для дальнейшего положим, что все величины B_j – различные, причем $Q_1 Q_2 Q_3 \neq 0$. Тогда $R \neq 0$ и для ОПВ, соответствующим парным точкам 1–2, векторы $\mathbf{n}_j$, определяемые равенствами (9), коллинеарны. В этом случае скорость ω для ОПВ определяется уравнением

$$R\omega^2 + KP_1(\mathbf{k})\omega - KmP_2(\mathbf{I}) = 0. \quad (15)$$

Если магнитный центр (МЦ) гиростата расположен на конусе P_2 , то $P_2(\mathbf{I}) = 0$ и парные точки 1–2 совпадают с точками 3–4, плоскость P_3 касается конуса P_1 по прямой L_2 и пересекает конус P_2 вдоль прямых L_2, L_3 . При этом согласно уравнению (15) скорость перманентного вращения вокруг ОПВ, соответствующих совпадающим между собой точкам 1–2, 3–4, определяется равенствами

$$\omega_* = 0, \quad \omega_{**} = -R^{-1}KP_1(\mathbf{k}). \quad (16)$$

Таким образом, для ОПВ, соответствующей МЦ гиростата, помимо положения статического равновесия имеет место и его перманентное вращение со скоростью $\omega_{**} \neq 0$.

4. Случай кинетической симметрии гиростата

Пусть выполняются условия

$$B_1 \neq B_2 = B_3, \quad I_j k_j \neq 0 \quad (j=1, 2, 3), \quad (17)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{I} \neq 0.$$

В силу условий (17) гиростат обладает осевой магнитно-кинетической симметрией и векторы $\mathbf{k}, \mathbf{I}$ не являются коллинеарными.

В этом случае характерная поверхность (8) распадается на плоскость

$$e_1 = 0 \quad (18)$$

и поверхность третьего порядка

$$(B_2 - B_1)n_{31}^2 e_1 - n_{21}P_3(\mathbf{e}) = 0, \quad (19)$$

где n_{31}, n_{21} – величины проекций векторов $\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2$ на ось Ox_1 , соответственно.

Введем в координатном e -пространстве плоскость

$$n_{21} = 0 \quad (20)$$

и положим $Q_1 \neq 0$. Зададим две группы координат

$$(0, -Q_3\lambda_1, Q_2\lambda_1), \quad (0, k_2\lambda_2, k_3\lambda_2), \quad (21)$$

где обозначено

$$\lambda_1 = \mu^{-1}, \quad \lambda_2 = \nu^{-1} \quad (\mu, \nu) \neq 0, \\ \mu = \pm \sqrt{Q_2^2 + Q_3^2}, \quad \nu = \pm \sqrt{k_2^2 + k_3^2},$$

и на единичной сфере построим парные точки p_1, p_4 , определяемые координатами групп (21), соответственно. Парные прямые Op_4 далее обозначим L_4 .

Непосредственной проверкой устанавливается, что поверхность (19) проходит через прямые L_1, L_2, L_4 и оси Ox_j . Прямые L_1 и L_4 являются линиями пересечения плоскости (18) с плоскостями P_3 и (20) соответственно. При этом сферическая кривая S проходит через парные точки p_1, p_2, p_4 и ось Ox_1 .

Плоскость P_3 касается поверхности (19) вдоль прямой L_2 , так что кривая S касается в парных точках p_2 линии пересечения плоскости P_3 с единичной сферой. Плоскость (20) касается поверхности (19) по оси Ox_1 , в силу чего кривая S касается линии пересечения плоскости (20) с единичной сферой. Здесь критическими точками кривой S являются парные точки p_1, p_2, p_4 , а также парная точка пересечения оси Ox_1 с единичной сферой.

Каждой критической точке кривой S при $n_{12}n_{21} \neq 0$, где $n_{12} = (B_2 - B_1)n_{31}e_1$, соответствует ось с направляющим ортом $\mathbf{e}$, являющаяся ОПВ с величиной скорости

$$\omega = -m \frac{n_{31}}{n_{21}} = -\frac{P_3(\mathbf{e})}{n_{12}}.$$

Перманентные вращения относительно осей, проходящих через парные точки p_4 и точки пересечения оси Ox_1 с единичной сфе-

рой, не имеют места. Осям, проходящим через парные точки p_2 , соответствует статическое равновесие гиростата, а осям, проходящим через парные точки p_1 , при $k_1 \neq 0$ отвечает перманентное вращение со скоростью

$$\omega = -m\rho_1,$$

где величина ρ_1 соответствует обозначениям равенств (14).

В случае, при котором $Q_1 = 0$, плоскости P_3 и (20) в e -пространстве совпадают.

5. Динамика перманентных вращений

Обозначим: $\mathbf{G} = \omega \mathbf{B}\mathbf{e}$ – кинетический момент приведенного гиростата, рассматриваемого как твердое тело; $\mathbf{M}^m = m(\mathbf{I} \times \mathbf{e})$ – механический момент силы внешнего магнитного поля; $\mathbf{M}^D = (\mathbf{B}\mathbf{e} \times \mathbf{e})\omega^2$ – гироскопический момент, порожденный вращением приведенного гиростата, рассматриваемого как твердое тело; $\mathbf{M}^k = (\mathbf{k} \times \mathbf{e})\omega$ – гироскопический момент, генерируемый внутренними движениями приведенного гиростата, где $\mathbf{k}$ – гиростатический момент. Здесь все вектор-моменты отнесены к неподвижному полюсу O .

Далее рассматривается случай, при котором все векторы уравновешенной системы $\Lambda \equiv (\mathbf{M}^m, \mathbf{M}^D, \mathbf{M}^k)$ компланарны и расположены в плоскости, ортогональной параллельным силовым линиям внешнего МП.

Введем плоскость, проходящую через ОПВ и центр C параллельных сил МП (α -плоскость). Применяя базовые положения классической теории векторов [9], из предыдущего получаем следующее

Утверждение 1. Если МЦ гиростата не находится на ОПВ и гиростатический момент не расположен в α -плоскости, а также если данная ось может являться ОПВ, то значение угловой скорости перманентного вращения гиростата является *единственной*. $\square$

Обозначим $\mathbf{r}_C = m\mathbf{I}$, $\mathbf{n}_4 = \mathbf{r}_C \times \mathbf{k}$, где $\mathbf{r}_C$ можно трактовать как масштабированный радиус-вектор МЦ гиростата. Тогда базовый вектор $\mathbf{n}_3$ в равенстве (9) определяется как $\mathbf{n}_3 = (\mathbf{r}_C \times \mathbf{e})$.

В силу уравновешенности системы векторов Λ вектор $\mathbf{r}_C$ ортогонален вектору $\mathbf{M}^D + \mathbf{M}^k$. Отсюда при $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$, $\omega \neq 0$ следует

$$\omega (\mathbf{B}\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_3) - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_4) = 0. \quad (22)$$

Из уравнения (22) находим, что перманентное вращение гиростата необходимо существует, если выполняется условие

$$(\mathbf{B}\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_3) = -|\mathbf{s}(\mathbf{e})| \neq 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) показывает, что данная ось вращения не совпадает с образующей конуса P_1 . В этом случае из уравнения (22) непосредственно следует

$$\omega_p = \frac{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_4)}{(\mathbf{B}\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_3)}. \quad (24)$$

Вследствие уравновешенности системы векторов Λ имеем $(\mathbf{M}^m + \mathbf{M}^k)\mathbf{k} = 0$, откуда, аналогично предыдущему имеем

$$[\mathbf{B}\mathbf{e} \cdot (\omega \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3)] = 0 \quad (25)$$

и перманентное вращение приведенного гиростата возможно при выполнении условия

$$(\mathbf{B}\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_2) = P_2(\mathbf{e}) \neq 0.$$

Это означает, что данная ось вращения не совпадает с образующей конуса P_2 . Тогда для скорости перманентного вращения согласно равенству (25) находим

$$\omega_q = m \frac{(\mathbf{B}\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_3)}{(\mathbf{B}\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_2)}. \quad (26)$$

Соотношения (24), (26) определяют скорость перманентного вращения гиростата вокруг одной и той же ОПВ и в силу единственности значения ω получаем

$$\omega_p = \omega_q. \quad (27)$$

Из равенства (27) непосредственно следует уравнение (8), определяющее ориентацию ОПВ относительно носителя гиростата в осях базиса X .

Разделим многообразие возможных положений ОПВ гиростата, определяемое уравнением (8), так, чтобы из рассматриваемой ее части исключить положения, при которых ОПВ совпадает с общей образующей конусов P_1, P_2 , а также положения, для которых эта ось проходит через МЦ гиростата. Здесь возможны следующие варианты.

Пусть векторы $\mathbf{M}^m, \mathbf{M}^D, \mathbf{M}^k$ коллинеарны. Тогда необходимо выполняется условие компланарности

$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_4) = 0. \quad (28)$$

Условие (28) означает, что ОПВ расположена в плоскости P_3 .

Предполагаем далее, что ОПВ не проходит через МЦ гиростата. Тогда соотношение (22), рассматриваемое при условии (28), имеет вид

$$\omega(\mathbf{B}\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_3) = 0,$$

в силу чего для существования значения $\omega \neq 0$ перманентного вращения необходимо, чтобы выполнялось ограничение

$$(\mathbf{B}\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_3) = P_1(\mathbf{e}) = 0. \quad (29)$$

Условие (29) означает, что ОПВ совпадает с образующей конуса P_1 . Из равенства (25) аналогичным образом находим

$$(\mathbf{B}\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}_2) = P_2(\mathbf{e}) = 0. \quad (30)$$

Соотношение (30) означает, что ОПВ гиростата совпадает с образующей конуса P_2 . Таким образом, согласно полученным свойствам перманентного вращения имеет место следующее

Утверждение 2. Если МЦ гиростата не находится на ОПВ и гиростатический момент расположен в α -плоскости, то перманентное вращение гиростата необходимо существует лишь при условии, что ось, направленная параллельно силовым линиям внешнего МП, является общей образующей конусов P_1, P_2 . $\square$

Рассмотрим случай, при котором общая образующая конусов P_1, P_2 совпадает с координатной осью Ox_1 и направлена параллельно силовым линиям внешнего МП. Тогда кинетический момент приведенного гиростата, рассматриваемого как твердое тело, равен $\mathbf{G} = B_1 \omega \mathbf{e}$, так что $\mathbf{M}^D = 0$. Здесь перманентное вращение гиростата возможно, если момент $\mathbf{M}^m$ уравновешивается гироскопическим моментом $\mathbf{M}^k$ циклических внутренних движений гиростата. Если при этом $\mathbf{n}_4 \neq 0$ (т.е. если векторы $\mathbf{r}_C, \mathbf{k}$ не коллинеарны) и гиростатический момент не расположен в α -плоскости, то ось Ox_1 не является ОПВ, так как векторы $\mathbf{M}^m, \mathbf{M}^k$ не коллинеарны и их результирующий вектор отличен от нуля.

Таким образом, если плоскость P_3 не содержит некоторые оси базиса X , то главные оси инерции приведенного гиростата не могут являться ОПВ.

В случае, при котором ось Ox_1 параллельна силовым линиям внешнего МП, и если вектор $\mathbf{k}$ расположен в α -плоскости (т.е. если плоскость P_3 содержит ось Ox_1), векторы моментов $\mathbf{M}^m, \mathbf{M}^k$ коллинеарны и, следовательно,

существует единственное значение скорости $\omega \neq 0$, при котором результирующая этих векторов равна нулю.

При $\mathbf{n}_4 = 0$ указанные векторы всегда коллинеарны и в силу этого каждая координатная ось базиса X – главная ось инерции гиростата – может являться ОПВ.

Список литературы

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1966. 624 с.
2. Лунев В.В. Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в поле сил Лоренца // ДАН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 824–826.
3. Макеев Н.Н. Перманентные вращения гиростата в суперпозиции силовых полей // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы / Перм. ун-т. Пермь, 2008. Вып. 40. С. 77–97.
4. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
5. Макеев Н.Н. Перманентные вращения твердого тела в обобщенном силовом поле // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4(47). С. 49–55.
6. Норден А.П. Дифференциальная геометрия. М.: Просвещение, 1948. 216 с.
7. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.
8. Румянцев В.В. Об устойчивости движения гиростатов некоторого вида // Прикл. матем. и механика. 1961. Т. 25, вып. 4. С. 778–784.
9. Аппель П. Теоретическая механика: в 2 т. М.: Физматгиз. 1960. Т. 1. 516 с.

Permanent rotations of a gyrostat in a combined force field

N. N. Makeyev

Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences
24, Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

The paper deals with permanent motions relative to a stationary pole of the gyrostat, being a carrier of surface electric charges in a homogeneous stationary magnetic field. Properties of the motions, conditions of their existence, characteristics of axes of permanent rotations are obtained. The manifold of speeds of permanent rotations and the dependence of the structure of this manifold on geometrical parameters of motion are defined. Special cases of permanent rotation, critical cases and the case of kinetic symmetry of the gyrostat are discussed.

Keywords: *gyrostat; permanent motion; axe of permanent rotation; combined force field.*