УДК 517.956

Интегральные представления многообразия решений для переопределенных систем с одной сингулярной и одной слабой сингулярной линией

Б. М. Шоймкулов
Таджикский национальный университет
Таджикистан, 734025, г. Душанбе, ул. Рудаки, 17
boitura@mail.ru; +992 919-43-11-84

Исследована переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной и одной слабой сингулярной линией. Найдено условие совместности для переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной и одной слабой сингулярной линией. При выполнении условии совместности, вводя новую функцию, приходим к переопределенной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной и одной слабой сингулярной линией более простого вида. Интегральное представление многообразия решений переопределенной системы в частных производных второго порядка с одной сингулярной и одной слабой сингулярной линией найдено в явном виде через три произвольных постоянных, для которой можно поставить задачи с начальными данными (задачи типа Коши).

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения в частных производных; системы дифференциальных уравнений; частные производные; переопределенная; сингулярные; слабые сингулярные; линия.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-1-21-25

Через D обозначим треугольную область, ограниченную отрезками

$$\Gamma_1=\{0<x<a_0, y=0\},$$
$$\Gamma_2=\{0<x<a_0, y=x\}, \Gamma_3=\{x=a_0, 0<y<a_0\}.$$

В области D рассмотрим переопределенную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\dfrac{a_1(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{b_1(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\\ +\dfrac{c_1(x,y)}{(x-y)^2}v+\dfrac{f_1(x,y)}{(x-y)^2},\\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\dfrac{a_2(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{b_2(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\\ +\dfrac{c_2(x,y)}{(x-y)^2}v+\dfrac{f_2(x,y)}{(x-y)^2},\\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\dfrac{a_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{b_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\\ +\dfrac{c_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}v+\dfrac{f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}},\end{cases} \tag{1}$$

где $\gamma=const<0$, $a_j(x,y), c_j(x,y)\, f_j(x,y) (1\le j\le 3)$ – заданные функции класса $C^1(D)\cap C(\overline{D})$, $v(x,y)\in C^2(D)$ – неизвестная функция.

Пусть в системе (1) коэффициенты $a_j(x,y), c_j(x,y) (1\le j\le 3)$ и правые части $f_j(x,y) (1\le j\le 3)$ удовлетворяют условиям совместности:

$$\begin{aligned}&a_3(x,y), b_3(x,y), c_3(x,y), f_3(x,y)\in C_x^1(\overline{D}),\\ &a_2(x,y), b_2(x,y), c_2(x,y), f_2(x,y)\in C^1(\overline{D}),\\ &a_1(x,y), b_1(x,y), c_1(x,y), f_1(x,y)\in C_y^1(\overline{D}),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{a_2(x,y)}{x-y}]+\frac{a_2(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^2}+\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^2}= =\frac{\partial}{\partial y}[\frac{a_1(x,y)}{x-y}]+\frac{a_3(x,y)b_1(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{b_2(x,y)}{x-y}]+\frac{a_2(x,y)b_1(x,y)}{(x-y)^2}+ +\frac{b_2(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^2}=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{b_1(x,y)}{x-y}]+ +\frac{a_1(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^2}+\frac{b_1(x,y)b_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}+\frac{c_1(x,y)}{(x-y)^2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^2}]+\frac{a_2(x,y)c_1(x,y)}{(x-y)^3}+$$
$$+\frac{b_2(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^3}=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{c_1(x,y)}{(x-y)^2}]+ \tag{5}$$
$$+\frac{a_1(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^3}+\frac{b_1(x,y)c_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,y)}{(x-y)^2}]+\frac{a_2(x,y)f_1(x,y)}{(x-y)^3}+$$
$$+\frac{b_2(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^3}=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_1(x,y)}{(x-y)^2}]+ \tag{6}$$
$$+\frac{a_1(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^3}+\frac{b_1(x,y)f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{a_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}]+\frac{a_1(x,y)a_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}+$$
$$+\frac{a_2(x,y)b_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}+\frac{c_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{a_2(x,y)}{x-y}]+\frac{a_2(x,y)a_2(x,y)}{(x-y)^2}+ \tag{7}$$
$$+\frac{a_3(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{b_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}]+\frac{a_3(x,y)b_1(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{b_2(x,y)}{x-y}]+\frac{a_2(x,y)b_2(x,y)}{(x-y)^2}+ \tag{8}$$
$$+\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{c_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}]+\frac{a_3(x,y)c_1(x,y)}{(x-y)^{\gamma+2}}+$$
$$+\frac{b_3(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^{\gamma+2}}=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{c_2(x,y)}{(x-y)^2}]+ \tag{9}$$
$$+\frac{a_2(x,y)c_2(x,y)}{(x-y)^3}+\frac{b_2(x,y)c_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}]+\frac{a_3(x,y)f_1(x,y)}{(x-y)^{\gamma+2}}+$$
$$+\frac{b_3(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^{\gamma+2}}=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_2(x,y)}{(x-y)^2}]+ \tag{10}$$
$$+\frac{a_2(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^3}+\frac{b_2(x,y)f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+2}}.$$

Тогда, вводя новую функцию $v(x,y)=(x-y)^{-1}u$ и используя равенства

$$g_1(x,y)=b_1(x,y),\ \ g_2(x,y)=b_2(x,y),$$

$g_3(x,y)=b_3(x,y)-2(x-y)^{\gamma-1}$ из системы (1) получим систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{g_1(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_1(x,y)}{x-y},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{g_2(x,y)}{x-y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_2(x,y)}{x-y},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{g_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{f_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}.\end{cases} \tag{11}$$

Пусть функции $g_j(x,y), f_j(x,y) (1\le j\le 3)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{g_2(x,y)}{x-y}]+\frac{g_2(x,y)g_2(x,y)}{(x-y)^2}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{g_1(x,y)}{x-y}]+\frac{g_1(x,y)g_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_2(x,y)}{x-y}]+\frac{g_2(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^2}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_1(x,y)}{x-y}]+\frac{g_1(x,y)f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{g_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}]=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{g_2(x,y)}{x-y}], \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}]+\frac{g_3(x,y)f_2(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_2(x,y)}{x-y}]+\frac{g_2(x,y)f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma+1}}. \tag{15}$$

Если использовать функцию $W(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$, тогда из двух последних уравнений системы (11) получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial x}=\dfrac{g_2(x,y)}{x-y}W+\dfrac{f_2(x,y)}{x-y},\\ \dfrac{\partial W}{\partial y}=\dfrac{g_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}W+\dfrac{f_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}.\end{cases} \tag{16}$$

Интегрирования начнем со второго уравнения системы (16). В этом случае соответствующее однородное уравнение второй уравнении системы (16) запишем в виде

$$\frac{\partial \ln W}{\partial y}=\frac{g_3(x,y)}{(x-y)^\gamma}.$$

После интегрирования

$$\ln W(x,y)=\int_0^y\frac{g_3(x,\tau)}{(x-\tau)^\gamma}d\tau+\psi(x),$$

отсюда получим

$$W(x,y)=\exp(\omega_1(x,y))\psi(x), \tag{17}$$

где $\omega_1(x,y)=\int_0^y\dfrac{g_3(x,\tau)}{(x-\tau_1)^\gamma}d\tau$, $\psi(x)$ – произвольно дифференцируемая функция.

Дифференцируя равенство (17), после, подставляя во второе уравнение системы (16), для нахождения произвольной функции $\psi(x)$ имеем:

$$\psi'(x) = \frac{f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma}}\exp(-\omega_1(x,y)).$$

Интегрируем:

$$\psi(x) = \int_0^y \frac{f_3(x,\tau)}{(x-\tau)^{\gamma}}\exp(-\omega_1(x,\tau))d\tau + \psi_1(x). \quad (18)$$

Значения $\psi(x)$ подставляем в (17) и получаем

$$W(x,y) = \exp(\omega_1(x,y))[\psi_1(x) + \\ + \int_0^y \frac{f_3(x,\tau)}{(x-\tau)^{\gamma}}\exp(-\omega_1(x,\tau))d\tau]. \quad (19)$$

От функции $W(x,y)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла первому уравнению системы (16), для этого дифференцируем (19) и, подставляя в первое уравнение системы (16), в результате имеем

$$\psi_1'(x) = (\frac{g_2(x,y)}{x-y} - \frac{\partial\omega_1(x,y)}{\partial x})[\psi_1(x) + \\ + \int_0^y \frac{f_3(x,\tau)}{(x-\tau)^{\gamma}}\exp(-\omega_1(x,\tau))d\tau] + \\ + \frac{f_2(x,y)}{x-y}\exp(-\omega_1(x,y))\} - \\ - \int_0^y \frac{\partial}{\partial x}[\frac{f_3(x,\tau)}{(x-\tau)^{\gamma}}\exp(-\omega_1(x,\tau))]d\tau.$$

Отсюда получаем условие совместности вида

$$\frac{\partial}{\partial y}\{(\frac{g_2(x,y)}{x-y} - \frac{\partial\omega_1(x,y)}{\partial x})[\psi_1(x) + \\ + \int_0^y \frac{f_3(x,\tau)}{(x-\tau)^{\gamma}}\exp(-\omega_1(x,\tau))d\tau] + \\ + \frac{f_2(x,y)}{x-y}\exp(-\omega_1(x,y))\} = \\ = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{f_3(x,y)}{(x-y)^{\gamma}}\exp(-\omega_1(x,y))]. \quad (20)$$

Учитывая условия совместности (20), получаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\psi_1(x)}{dx} = \frac{g_2(x,0)}{x}\psi_1(x) + \frac{f_2(x,0)}{x},$$

его решение находим в виде

$$\psi_1(x) = x^{g_2(0,0)}\exp(\omega_2(x,0))[c_1 + \\ + \int_0^x \frac{f_2(t,0)}{t^{1+g_2(0,0)}}\exp(-\omega_2(t,0))dt].$$

Подставляя значение $\psi_1(x)$ в (19), общее решение системы (16) представим в виде

$$W(x,y) = \exp(\omega_1(x,y))[\frac{x^{g_2(0,0)}}{\exp(-\omega_2(x,0))} \\ (c_1 + \int_0^x \frac{f_2(t,0)\exp(-\omega_2(t,0))}{t^{1+g_2(0,0)}}dt) + \\ + \int_0^y \frac{f_3(x,\tau)}{(x-\tau)^{\gamma}}\exp(-\omega_1(x,\tau))d\tau], \quad (21)$$

где $\omega_2(x,0) = \int_0^x \frac{g_2(t,0)-g_2(0,0)}{t}dt$, c_1 – произвольная постоянная.

Интегрируя равенство $W(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$ по переменному y, приходим к

$$u(x,y) = \int_0^y W(x,\tau)d\tau + \psi_2(x). \quad (22)$$

Дифференцируя дважды

$$\frac{d\psi_2(x)}{dx^2} = \frac{g_1(x,y)}{x-y}W(x,y) + \\ + \frac{f_1(x,y)}{x-y} - \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial x^2}[W(x,\tau)]d\tau$$

и учитывая (21), находим условие совместности системы (16) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[W(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{g_1(x,y)}{x-y}W(x,y) + \\ + \frac{f_1(x,y)}{x-y}]. \quad (23)$$

При выполнении условия (23), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} = \frac{g_1(x,0)}{x^{1-g_2(0,0)}}\exp(\omega_2(x,0))(c_1 + \\ + \int_0^x \frac{f_2(t,0)}{t^{1+g_2(0,0)}}\exp(-\omega_2(t,0))dt) + \frac{f_1(x,0)}{x}.$$

Следовательно, произвольную функцию представим в виде

$$\psi_2(x) = c_1\int_0^x \frac{(x-t)(g_1(t,0)\exp(\omega_2(t,0)) - g_1(0,0))}{t^{1-g_2(0,0)}}dt + \\ + \int_0^x \frac{(x-t)^2 g_1(t,0) f_2(t,0)}{2t^2}\exp(\omega_2(x,0) - \omega_2(t,0))dt + \\ + \int_0^x \frac{(x-t)(f_1(t,0) - f_1(0,0))}{t}dt + \frac{c_1 g_1(0,0)}{g_2(0,0)+1}x^{g_2(0,0)+1} + \\ + f_1(0,0)(x\ln x - x) + c_2 x + c_3.$$

Подставляя значение $\psi_2(x)$ в (22), учитывая (21), имеем

$$u(x,y)=\int_0^y \frac{f_3(x,\tau_1)\exp(-\omega_1(x,\tau_1))}{(x-\tau_1)^\gamma}W_1^\gamma(x,\tau_1)d\tau_1+$$
$$+c_1[x^{g_2(0,0)}\int_0^y \exp(\omega_1(x,\tau)+\omega_2(x,0))d\tau+$$
$$+\int_0^x \frac{(x-t)(g_1(t,0)\exp(\omega_2(t,0))-g_1(0,0))}{t^{1-g_2(0,0)}}dt]+$$
$$+\int_0^x K(x,y,t)f_2(t,0)dt+ \tag{24}$$
$$+\int_0^x \frac{(x-t)(f_1(t,0)-f_1(0,0))}{t}dt+$$
$$+\frac{c_1g_1(0,0)}{g_2(0,0)+1}x^{g_2(0,0)+1}+$$
$$+f_1(0,0))(x\ln x-x)+c_2x+c_3,$$

где
$$W_1^\gamma(x,\tau_1)=\int_{\tau_1}^y \exp(\omega_1(x,\tau_1))d\tau_1,$$
$$K(x,y,t)=[\frac{1}{t^{1+g_2(0,0)}}\int_0^y \exp(\omega_1(x,\tau))d\tau+$$
$$+\frac{(x-t)^2g_1(t,0)}{2t^2}]\exp(\omega_2(x,0)-\omega_2(t,0)),$$
c_1,c_2,c_3 *– произвольные постоянные.*

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть в системе (1) (или (16))* $\gamma<1$, *функции* $g_j(x,y), f_j(x,y)(1\le j\le 3)$ *– удовлетворяют условиям (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (20), (23) в области* D. *Кроме того, функции* $g_1(x,0)$ *и* $f_1(x,0)$ *в окрестности точек* $x=0$ *удовлетворяют условиям*
$$|g_1(x,0)\exp(\omega_2(x,0))-g_1(0,0)|\le H_1y^{\gamma_1},$$
$$H_1=const>0,\ \gamma_1>-g_2(0,0),$$
$$|f_1(x,0)-f_1(0,0)|\le H_2y^{\gamma_2}, H_2=const>0, \gamma_2>0.$$
Тогда любое решение системы (16) из класса $C^2(D)$ *представимо в виде (24).*

Замечание 1. Решение вида (24) в окрестности $y=x$, при выполнении всех условий теоремы 1 непрерывно.

Список литературы

1. *Wilczynski E.J.* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces / E.J. Wilczynski. Leipzig:B.G. Teubner, 1906. 324 p.
2. *Appel P.* Fonctons hypergeometriges of hyperspheriges Polynomes d’Hermite / P. Appel, M.J. Kampe de Feriet. Paris: Gauthier-Villars. 1926. 434 p.
3. *Архутик Г.М.* Регулярная особая точка линейных уравнений в полных дифференциалах высших порядков // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1979. № 3. С. 46–54.
4. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе: Дониш, 1986. 116 с.
5. *Begehr H.* Transformations, transmutations and kernel functions / H. Begehr, R.P. Gilbert. Vol. 2. Harlow: Longman, 1993. 268 p.
6. *Раджабов Н.* Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. Душанбе: Изд-во ТГУ. 1980. Ч. I, 126 с.; 1981. Ч. II, 170 с.; 1982. Ч. III. 170 с.
7. *Зайцев М.Л., Аккерман В.Б.* Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики // Вестник ВГУ. Серия: физика, математика. 2015. №. 2. 527 с.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
9. *Пиров Р.* Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости // Крайові задачі для диференціалних рівнянь. Чернівці: Прут, 2006. Вип. 14. С. 313–320.
10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
11. *Бровко Г.Л.* Необходимые и достаточные условия однородно-простой деформации // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. С. 701–710.
12. *Ленская С.Э.* О неоднородно-простых процессах // Вестник Московского университета. Сер. Математика, механика. 1988. № 1. С. 100–103.
13. *Пиров Р.* Об одной переопределенной системе уравнений в частных производных второго порядка. Душанбе, 1989. 15 с. Деп. в Тадж. НИИНТИ 19.06.89. № 22 (622).
14. *Шоймкулов Б.М., Рузметов Э.* К теории некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными точками на плоскости // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения: сб. науч. статей. Душанбе: ТГПУ. 1998. Вып. 6. С. 96–106.
15. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н.* Линейная переопределенная система второго порядка с одной сингулярной точкой // Вестник национального университета (серия

естеств. наук). № 3(26), Душанбе: ТГНУ, "Сино". 2005. С. 3–10.
16. *Шоймкулов Б.М., Раджабов Н., Комилов А.О.* Интегральные представления многообразия решений для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с тремя сверхсингулярными областями // Вестник Таджикского нац. ун-та. Серия естеств. наук. 2017. № 1/2. С. 3–7.
17. *Шоймкулов Б.М.* К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверх сингулярными линиями // Вестник Таджикского нац. ун-та. Серия естеств. наук. 2018. № 3. С. 32–43.
18. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сверхсингулярной и одной сингулярной плоскостью в трехмерном пространстве // Электронный инновационный вестник: междунар. период. журн.: науч. тр. Бугульма. 2019. № 6. С. 4–12.
19. *Шоймкулов Б.М.* Переопределенная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной сингулярной и двумя сверхсингулярными точками: матер. междунар. науч. конф. "Современные проблемы естественных и гуманитарных наук и их роль в укреплении научных связей между странами", посвященной 10-летию Филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе (10–11 октября). Душанбе. 2019. С. 79–82.
20. *Шоймкулов Б.М., Мирзоев А.Х.* Переопределенные системы дифференциальных уравнений с одной слабой сингулярной и двумя сверхсингулярными линиями: матер. междунар. конф. "Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа" (13–14 декабря). Душанбе. 2019. С. 243–247.

Integral representation of solution manifolds for over determined systems with one singular and one weak singular lines

B. M. Shoimkulov
Tajik State University; 17, Rudaki st., Dushanbe, 734025, Tajikistan
boitura@mail.ru; +992 919-43-11-84

In this paper, a over determined system of second-order partial differential equations with one singular and one weak singular line is investigated. A compatibility condition is found for over determined systems of second-order partial differential equations with one singular and one weak singular line. Under the condition of compatibility, introducing a new function, we come to a over determined system of partial differential equations of the second order with one singular and one weak singular line of a simpler form. The integral representation of the manifold of solutions of the redefined second-order partial differential system with one singular and one weak singular line is found explicitly through three arbitrary constants, for which initial data problems (Cauchy type problems) can be posed.

Keywords: *partial differential equations; systems of differential equations; partial derivatives; over determined; singular; weak singular; line.*