УДК 517.977.56

Квазиособые управления в задачах оптимального управления, описываемые гиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями

К. Б. Мансимов
Бакинский государственный университет
AZ, 1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Бахтияра Вагабзаде, 68
kamilbmansimov@gmail.com

В. Г. Рзаева
Сумгаитский государственный университет
AZ 5008, Азербайджан, г. Сумгаит, квартал 43, ул. Баку, 1

Среди задач оптимального управления системами с распределенными параметрами особое место занимают задачи оптимального управления, описываемые гиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями. В предлагаемой работе рассматривается задача оптимального управления, описываемая гиперболическим интегро-дифференциальным уравнением типа Вольтерра с краевыми условиями Гурса и терминального типа функционалом качества. При предположении выпуклости области управлений с помощью одного варианта метода приращений доказан аналог линеаризованного условия максимума и общее необходимое условие оптимальности второго порядка. Отдельно изучен случай квазиособых управлений.

Ключевые слова: *гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра; необходимое условие оптимальности; аналог линеаризованного условия максимума; квазиособое управление.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-1-13-20

Введение

К настоящему времени достаточно полно исследованы вопросы, связанные выводом необходимых условий оптимальности первого порядка (аналог принципа максимума Понтрягина, линеаризованный принцип максимума) в различных задачах оптимального управления описываемые гиперболическими уравнениями с краевыми условиями Гурса (см. напр.: [1–9]).

В работах [10–12] и др. исследованы случай вырождения принципа максимума Понтрягина (особый случай) в системах Гурса–Дарбу. Насколько известно установление необходимых условий оптимальности первого порядков и исследование особого случая в задачах оптимального управления гиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями с краевыми условиями Гурса находится в начальной стадии.

Исходя из этого предлагаемая работа посвящена выводу необходимых условий оптимальности первого и второго порядков в задаче оптимального управления системами гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с краевыми условиями Гурса и терминального типа критериям качества

1. Постановка задачи

Предположим, что управляемый процесс в заданной области, $D=[t_0,t_1]\times[x_0,\mathrm{x}_1]$ описывается системой гиперболических интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$z_{tx}(t,x)= f(t,x,z(t,x),u(t,x))+ \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} K(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))ds\,d\tau \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$z(t_0,x)=a(x), \quad x\in[x_0,x_1],$$
$$z(t,x)=b(t), \quad t\in[t_0,t_1], \qquad (2)$$
$$a(x_0)=b(t_0).$$

Здесь $f(t,x,z,u)$, $K(t,x,\tau,s,z,u)$ – заданные n-мерные вектор-функции непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u) до второго порядка включительно, $a(x)$, $b(t)$ – заданные абсолютно непрерывные n-мерные вектор-функции, $u(t,x)$ – r-мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих воздействий, удовлетворяющий ограничению типа включения:

$$u(t,x)\in U, \quad (t,x)\in D, \qquad (3)$$

где U – заданное непустое, выпуклое и ограниченное множество.

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении $u(t,x)$ краевая задача (1)–(2) имеет единственное абсолютно непрерывное решение $z(t,x)$. Каждую такую пару $(u(t,x),z(t,x))$ назовем допустимым процессом.

Рассмотрим задачу о минимизации терминального типа функционала

$$S(u)=\varphi(z(t_1,x_1)), \qquad (4)$$

где $\varphi(z)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Допустимый процесс $(u(t,x),z(t,x))$, являющийся решением поставленной экстремальной задачи, назовем оптимальным процессом.

Предполагается, что в рассматриваемой задаче оптимальное управление существует.

2. Необходимые условия оптимальности

Пусть $(u(t,x),z(t,x))$ фиксированный допустимый процесс. Через

$$\left(\begin{aligned}&\bar{u}(t,x)=\\ &=u(t,x)+\Delta u(t,x),\ \bar{z}(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x)\end{aligned}\right)$$

обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение функционала качества:

$$\begin{aligned}\Delta S(u)&=S(\bar{u})-S(u)=\\ &=\varphi(\bar{z}(t_1,x_1))-\varphi(z(t_1,x_1))\end{aligned}. \qquad (5)$$

С другой стороны, ясно, что приращения $\Delta z(t,x)$ состояния является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}\Delta z_{tx}(t,x)&= f(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x))-\\ &- f(t,x,z(t,x),u(t,x))+\\ &+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\begin{pmatrix}K(t,x,\tau,s,\bar{z}(\tau,s),\bar{u}(\tau,s))-\\ -K(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))\end{pmatrix}ds\,d\tau,\end{aligned} \qquad (6)$$

$$\Delta z(t_0,x)=0, \quad x\in[x_0,x_1],$$
$$\Delta z(t,x_0)=0, \quad t\in[t_0,t_1]. \qquad (7)$$

Пусть $\psi(t,x)$ пока произвольная n-мерная вектор-функция которую назовем сопряженной функцией в рассматриваемой задаче.

Из (6) получаем справедливость тождества

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt=\\ &=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)[f(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x))-\\ &- f(t,x,z(t,x),u(t,x))]dx\,dt\\ &+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\left[\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}(K(t,x,\tau,s,\bar{z}(\tau,s),\bar{u}(\tau,s))-\right.\\ &-K(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)))ds\,d\tau]dx\,dt.\end{aligned} \qquad (8)$$

Здесь и в дальнейшем (′) – операция скалярного произведения векторов, а для матриц – операция транспонирования.

Используя формулу Фубини (двумерный аналог формулы Дирихле см. напр. [13]) тождество (8) записывается в виде

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt=\\ &=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\psi'(t,x)[f(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x))-\\ &+ f(t,x,z(t,x),u(t,x))]dx\,dt\\ &+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1}\int_{x}^{x_1}\psi'(\tau,s)(K(\tau,s,t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x))-\right.\\ &-K(\tau,s,t,x,z(t,x),u(t,x)))ds\,d\tau]dx\,dt.\end{aligned} \qquad (9)$$

В дальнейшем будет использованы обозначения типа

$$\mathrm{f}_z[t,x] \equiv f_z(t,x,z(t,x),u(t,x)),$$

$$K_z[t,x,\tau,s] = \mathrm{K}_z(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))$$

$$H(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)) =$$
$$= \psi'(t,x)\, f(t,x,z,u) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi'(\tau,s)\mathrm{K}(\tau,s,t,x,z(t,x),u(t,x))ds\,d\tau,$$

$$H_z[t,x] \equiv H_z(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)),$$

$$H_u[t,x] \equiv H_u(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)),$$

$$H_{zz}[t,x] \equiv H_{zz}(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)),$$

$$H_{uu}[t,x] \equiv H_{uu}(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)),$$

$$H_{uz}[t,x] \equiv H_{uz}(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)).$$

Учитывая введенные обозначения из тождества (9) получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} [H(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t,x),\psi(t,x)) - \tag{10}$$
$$- H(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x))]dx\,dt.$$

Далее, учитывая краевые условия (2) и применяя формулу Грина для прямоугольных областей, получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi'(t,x)\Delta z_{tx}(t,x)dx\,dt =$$
$$= -\int_{x_0}^{x_1} \psi_x'(t_1,x)\Delta z(t_1,x)dx -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \psi_t'(t,x_1)\Delta z(t,x_1)dt + \tag{11}$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi_{tx}'(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt +$$
$$+ \psi'(t_1,x_1)\Delta z(t_1,x_1).$$

Учитывая тождества (10), (11) формула приращения (5) записывается в виде:

$$\Delta S(u) = \varphi(\bar z(t_1,x_1)) -$$
$$- \varphi(z(t_1,x_1)) + \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi_{tx}'(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt +$$
$$+ \psi'(t_1,x_1)\Delta z(t_1,x_1) - \tag{12}$$
$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} [H(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t,x),\psi(t,x)) -$$
$$- H(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x))]dx\,dt -$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} \psi_x'(t_1,x)\Delta z(t_1,x)dx - \int_{t_0}^{t_1} \psi_t'(t,x_1)\Delta z(t,x_1)dt.$$

По аналогии с формулой Тейлора с остаточным членом в виде Пеано из (12) получаем, что

$$\Delta S(u) = \varphi_z'(z(t_1,x_1))\Delta z(t_1,x_1) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)\varphi_{zz}'(z(t_1,x_1))\Delta z(t_1,x_1) +$$
$$+ \psi'(t_1,x_1)\Delta z(t_1,x_1) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \psi_{tx}'(t,x)\Delta z(t,x)dx\,dt -$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} \psi_x'(t_1,x)\Delta z(t_1,x)dx -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \psi_t'(t,x_1)\Delta z(t,x_1)dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_z'[t,x]\Delta z(t,x)dx\,dt -$$
$$- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t,x)H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)dx\,dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta u'(t,x)H_{uz}[t,x]\Delta z(t,x)dx\,dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_u'[t,x]\Delta u(t,x)dx\,dt -$$
$$- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta u'(t,x)H_{uu}[t,x]\Delta u(t,x)dx\,dt +$$
$$- o_1\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right) -$$
$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} o_2\left([\|\Delta z(t,x)\| + \|\Delta u(t,x)\|]^2\right)dx\,dt. \tag{13}$$

Здесь, и в дальнейшем $\|\alpha\|$ является нормой вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)'$ определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$, а $o(\alpha^2)$ есть величина более высокого порядка α^2, то есть $o(\alpha^2)/\alpha^2 \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Если предполагать, что $\psi(t,x)$ является решением линейного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа

$$\psi_{tx}(t,x) = H_z[t,x] \tag{14}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} \psi_x(t_1,x) = 0, \\ \psi_t(t,x_1) = 0, \\ \psi(t_1,x_1) = -\varphi_z(z(t_1,x_1)), \end{gathered} \tag{15}$$

то формула приращения (13) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = &-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_u'[t,x]\Delta u(t,x)\,dx\,dt - \\ &-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta z'(t,x) H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)\,dx\,dt - \\ &-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta u'(t,x) H_{uu}[t,x]\Delta u(t,x)\,dx\,dt - \\ &-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta u'(t,x) H_{uz}[t,x]\Delta z(t,x)\,dx\,dt + \\ &+ o_1\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right) - \\ &-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} o_2\left(\left[\|\Delta z(t,x)\| + \|\Delta u(t,x)\|\right]^2\right)dx\,dt. \end{aligned} \tag{16}$$

Далее из (6) переходя к эквивалентному интегральному уравнению получим, что

$$\begin{aligned} \Delta z(t,x) = &\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \left(f(\tau,s,\bar{z}(\tau,s),\bar{u}(\tau,s)) - \right. \\ &\left. - f(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))\right)ds\,d\tau + \\ &+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}\left(\mathrm{K}(\alpha,\beta,\tau,s,\bar{z}(\tau,s),\bar{u}(\tau,s)) - \right.\right. \\ &\left.\left. - \mathrm{K}(\alpha,\beta,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s))\right)d\alpha\,d\beta\right]ds\,d\tau. \end{aligned} \tag{17}$$

Из (17) переходя к норме и используя условию Липшица получим, что

$$\|\Delta z(t,x)\| \le L_1 \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\|\Delta z(\tau,s)\| + \|\Delta u(\tau,s)\|\right]ds\,d\tau$$

где $L_1 = const > 0$ некоторое постоянное.

Применяя к последнему неравенству обобщенную лемму Вендроффа (см. напр. [7, 8]) приходим к оценке

$$\|\Delta z(t,x)\| \le L_2 \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \|\Delta u(t,x)\|\,dx\,dt, \tag{18}$$

где $L_2 = const > 0$ некоторое постоянное.

Пусть $\varepsilon \in [0,1]$ произвольное число, а $v(t,x) \in U$, $(t,x) \in D$ произвольное допустимое управление. Поскольку по предположению множество U выпуклое, то специальное приращение допустимого управления $u(t,x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u(t,x;\varepsilon) = \varepsilon\left(v(t,x) - u(t,x)\right). \tag{19}$$

Через $\Delta z(t,x;\varepsilon)$ обозначим специальное приращение вектора состояния $z(t,x)$ описывающее приращению (19) управления $u(t,x)$.

Принимая во внимание оценку (18) получаем, что

$$\|\Delta z(t,x;\varepsilon)\| \le L_3\,\varepsilon, \quad (t,x) \in D, \tag{20}$$

где $L_3 = const > 0$ некоторое постоянное.

Из формулы приращения (16) с учетом (19), (20) приходим к разложению

$$\begin{aligned} &\Delta S_\varepsilon(u(t,x)) = S(u(t,x) + \Delta u(t,x;\varepsilon)) - \\ &- S(u(t,x)) = \\ &= -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_u'[t,x]\left(v(t,x) - u(t,x)\right)dx\,dt + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{21}$$

Из разложения (21) следует

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} H_u'[t,x]\left(v(t,x) - u(t,x)\right)dx\,dt \le 0 \tag{22}$$

выполнялось для всех $v(t,x) \in U$, $(t,x) \in D$.

Неравенство (22) есть аналог линеаризованного интегрального условия максимума. Из него следует

Следствие. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ необходимо, чтобы соотношения

$$\max_{w \in U} H_u'[\theta,\xi]w = H_u'[\theta,\xi]u(\theta,\xi) \tag{23}$$

выполнялись для всех $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$.

Здесь $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ произвольная правильная точка (точка Лебега) [7, 8] управления $u(t,x)$.

Для доказательства следствия достаточно воспользоваться аналогом леммы из [14, с. 3].

Результат теоремы представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка, что не исключает вырождения необходимых условий оптимальности (22), (23).

В этом случае возникает необходимость получения новых условий оптимальности. Формула приращения второго порядка (16) позволяет также получить новые необходимые условия оптимальности при вырождении условия оптимальности (23).

Определение. Допустимое управление $u(t,x)$ назовем квазиособой в задаче (1)–(4) если для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ и $w\in U$

$$H_u'[\theta,\xi](w-u(\theta,\xi))=0. \tag{24}$$

Ясно, что в квазиособом случае необходимое условие оптимальности (23) теряет свое содержательное значение.

Из (6) получаем, что $\Delta z(t,x)$ является решением следующей линеаризованной задачи:

$$\Delta z_{tx}(t,x)=f_z[t,x]\Delta z(t,x)+f_u[t,x]\Delta u(t,x)+ \\ +\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}K_z[t,x,\tau,s]\Delta z(\tau,s)ds\,d\tau+ \\ +\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}K_u[t,x,\tau,s]\Delta u(\tau,s)ds\,d\tau+ \qquad (24) \\ o_3(\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta u(t,x)\|)+ \\ +\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}o_4(t,x,\|\Delta z(\tau,s)\|+\|\Delta u(\tau,s)\|)ds\,d\tau,$$

$$\begin{aligned}\Delta z(t_0,x)&=0,\\ \Delta z(t,x_0)&=0.\end{aligned} \tag{25}$$

Интерпретируя уравнение (24) как линейное неоднородное интегро-дифференциальное уравнение гиперболического типа относительно $\Delta z(t,x)$, его решение с краевыми условиями (25) по аналогии с [15] и др. можно представить в виде:

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{t}R(t,x,\tau,s)\,f_u[\tau,s]\Delta u(\tau,s)dsd\tau+ \\ +\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\left[\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)K_u(\alpha,\beta,\tau,s)d\alpha d\beta\right]\times \\ \times\Delta u(\tau,s)dsd\tau+ \\ +\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{t}R(t,x,\tau,s)o_3(\|\Delta z(\tau,s)\|)dsd\tau+ \\ +\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)K_u(\alpha,\beta,\tau,s)\times\right. \\ \left.\times o_4(t,x,\|\Delta z(\tau,s)\|+\|\Delta u(\tau,s)\|)d\alpha d\beta\right]ds\,d\tau, \tag{26}$$

где по определению

$$\eta_1(x:\Delta u)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{t}R(t,x,\tau,s)o_3(\|\Delta z(\tau,s)\|)dsd\tau+ \\ +\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)K_u(\alpha,\beta,\tau,s)\times\right. \\ \left.\times o_4(t,x,\|\Delta z(\tau,s)\|+\|\Delta u(\tau,s)\|)d\alpha d\beta\right]ds\,d\tau,$$

$R(t,x,\tau,s)$ $(n\times n)$-матричная функция, являющаяся решением задачи

$$R_{\tau s}(t,x,\tau,s)=R(t,x,\tau,s)\,f_z[\tau,s]+ \\ +\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)K_z[\alpha,\beta,\tau,s]d\alpha\,d\beta,$$

$$R(t,x,\tau,x)=0,\quad \mathrm{R}(t,x,t,s)=0,$$

$$\mathrm{R}(t,x,t,x)=E$$

(E – $(n\times n)$-единичная матрица).

Полагая

$$M(t,x,\tau,s)=R(t,x,\tau,s)\,f_u[\tau,s]+ \\ +\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)K_u[\alpha,\beta,\tau,s]d\alpha\,d\beta,$$

представление (26) записываем в виде:

$$\Delta z(t,x)= \\ =\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\mathrm{M}(t,x,\tau,s)\Delta u(\tau,s)ds\,d\tau+\eta_1(t,x;\Delta u). \tag{27}$$

Из (27) ясно, что

$$\Delta z(t_1,x_1)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{M}(t_1,x_1,\tau,s)\Delta u(\tau,s)ds\,d\tau+ \qquad (28)$$
$$+\eta_1(t_1,x_1;\Delta u).$$

Используя (28) получаем, что

$$\Delta z'(t_1,x_1)\varphi_{zz}(z(t_1,x_1))\Delta z(t_1,x_1)=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(\tau,s)M'(t_1,x_1,\tau,s)\varphi_{zz}(z(t_1,x_1))\times$$
$$\times M(t_1,x_1,\alpha,\beta)\Delta u(\alpha,\beta)ds\,d\tau d\alpha\,d\beta+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(\tau,s)M'(t_1,x_1,\tau,s)\varphi_{zz}(z(t_1,x_1))\times$$
$$\times\eta_1(t_1,x_1;\Delta u)ds\,d\tau+$$
$$+\eta_1'(t_1,x_1;\Delta u)\varphi_{zz}(z(t_1,x_1))\Delta z(t_1,x_1)$$
$$+\Big[\int_{\max(\alpha,\tau)}^{t_1}\int_{\max(\beta,s)}^{x_1}M'(t,x,\tau,s)H_{zz}[t,x]\times$$
$$\times M(t,x,\alpha,\beta)dx\,dt\Big]ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\eta_1'(t,x;\Delta u)H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)dx\,dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta u(\tau,s)M(t,x,\tau,s)ds\,d\tau\right)'\times$$
$$\times H_{zz}[t,x]\eta_1(t,x;\Delta u)dx\,dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)dx\,dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(\tau,s)\Delta u(\alpha,\beta)\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{uz}[t,x]\Delta z(t,x)dx\,dt=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\tau}^{t_1}\int_{s}^{x_1}\Delta u'(\tau,s)H_{zz}[\tau,s]\mathrm{M}(\tau,s,t,x)ds\,d\tau\right]\times$$
$$\times\Delta u(t,x)dx\,dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}u'(t,x)H_{uz}[t,x]\eta_1(t,x;\Delta u)dx\,dt\,.$$

Введя обозначения

$$\eta_2(\Delta u)=o_1\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}o_2\left(\|\Delta z(t,x)\|+\|\Delta u(t,x)\|\right)^2dx\,dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(\tau,s)M'(t_1,x_1,\tau,s)\varphi_{zz}(z(t_1,x_1))\times$$
$$\times\eta_1(t_1,x_1;\Delta u)ds\,d\tau+$$
$$+\eta_1'(t_1,x_1;\Delta u)\varphi_{zz}(z(t_1,x_1))\Delta z(t_1,x_1)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\eta_1'(t,x;\Delta u)H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)dx\,dt-$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Delta u(\tau,s)M(t,x,\tau,s)ds\,d\tau\right)'\times$$
$$\times H_{zz}[t,x]\eta_1(t,x;\Delta u)dx\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}u'(t,x)H_{uz}[t,x]\eta_1(t,x;\Delta u)dx\,dt\,,$$

$$B(\tau,s,\alpha,\beta)=$$
$$\int_{\max(\alpha,\tau)}^{t_1}\int_{\max(\beta,s)}^{x_1}M'(t,x,\tau,s)H_{zz}[t,x]M(t,x,\alpha,\beta)dx\,dt-$$
$$-M'(t_1,x_1,\tau,s)\varphi_{zz}(z(t_1,x_1))M(t_1,x_1,\alpha,\beta),$$

формула приращения (16) записывается в виде:

$$\Delta S(u)=-\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}H_u'[t,x]\Delta u(t,x)dx\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_D\int_D\Delta u'(\tau,s)B(\tau,s,\alpha,\beta)\times$$
$$\times\Delta u(\alpha,\beta)ds\,d\tau\,d\alpha\,d\beta- \qquad (29)$$
$$-\int_D\left[\int_{\tau}^{t_1}\int_{s}^{x_1}\Delta u'(\tau,s)H_{uz}[\tau,s]M(\tau,s,t,x)ds\,d\tau\right]\times$$
$$\times\Delta u(t,x)dx\,dt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\Delta u'(t,x)H_{uu}[t,x]\Delta u(t,x)dx\,dt+\eta_2(\Delta u).$$

Если $u(t,x)$ квазиособое управление, то из формулы приращения (29) приходим к разложению

$$\Delta S_\varepsilon(u) = S(u(t,x) + \Delta u(t,x;\varepsilon)) - S(u(t,x)) =$$
$$= -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \Big[\int_D \int_D (v(\tau,s) - u(\tau,s))' B(\tau,s,\alpha,\beta) \times (v(\alpha,\beta) - u(\alpha,\beta)) d\alpha\, d\beta ds\, d\tau -$$
$$- 2\iint_D \Big[\int_\tau^{t_1}\int_s^{x_1} (v(\tau,s) - u(\tau,s))' H_{uz}[\tau,s] \times M(\tau,s,t,x) ds\, d\tau \Big] \times (v(t,x) - u(t,x)) dx\, dt -$$
$$- \iint_D (v(t,x) - u(t,x))' H_{uu}[t,x] \times (v(t,x) - u(t,x)) dx\, dt \Big] + o(\varepsilon^2). \quad (30)$$

Из разложения (30) следует

Теорема 2. Для оптимальности квазиособого управления $u(t,x)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство

$$\int_D \int_D (v(\tau,s) - u(\tau,s))' B(\tau,s,\alpha,\beta) \times (v(\alpha,\beta) - u(\alpha,\beta)) ds\, d\tau\, d\alpha\, d\beta +$$
$$+ 2\int_D \Big[\int_\tau^{t_1}\int_s^{x_1} (v(\tau,s) - u(\tau,s))' H_{uz}[\tau,s] \times M(\tau,s,t,x) ds\, d\tau \Big] \times \quad (31)$$
$$\times (v(t,x) - u(t,x)) dx\, dt + \int_D (v(t,x) - u(t,x))' H_{uu}[t,x] \times (v(t,x) - u(t,x)) dx\, dt \le 0$$

было справедливо для всех $v(t,x) \in U$, $(t,x) \in D$.

Неравенство (31) есть общее интегральное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений. Из него, определяя произвольное допустимое управление $v(t,x)$ специальным образом, можно получить ряд более легко проверяемых необходимых условий оптимальности квазиособых управлений. Но они будут более слабыми.

Приведем одну из них.

Следствие 2. Для оптимальности квазиособого управления $u(t,x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$(w - u(\theta,\xi))' H_{uu}[\theta,\xi](w - u(\theta,\xi)) \le 0 \quad (32)$$

выполнялось для всех $w \in U$ и

$$(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1).$$

Заметим, что из результата **теоремы 2** можно получить также содержательные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений при вырождении условия оптимальности (32).

Список литературы

1. *Егоров А.И.* Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25, № 5. С. 613–623.
2. *Ахмедов К.Т., Ахиев С.С.* Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. 1972. Т. 28, № 5. С. 12–16.
3. *Ащепков Л.Т., Васильев О.В.* Об оптимальности особых управлений в системах Гурса–Дарбу // Журн. вычислительной математики и математической физики. 1975. № 5. С. 1157–1167.
4. *Бокмельдер Е.П., Дыхта В.А.* К теории принципа максимума для управляемых систем гиперболического типа // Теоретические и прикладные вопросы оптимального управления. Новосибирск: Наука, 1985. С. 41–58.
5. *Егоров А.И.* Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами // Математ. сб. 1966. Т. 69, № 3. С. 1371–1421.
6. *Короткий А.И., Цепелев И.А.* Динамическое решение обратной задачи определения параметров в системе Гурса–Дарбу // Тр. ИМ и М. УрО РАН. 1995. Т. 3. С. 88–103.
7. *Плотников В.И., Сумин В.И.* Проблема устойчивости нелинейных систем Гурса–Дарбу // Дифференциальные уравнения. 1972. № 5. С. 845–856.
8. *Плотников В.И., Сумин В.И.* Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемые системами Гурса–Дарбу // Журн. вычислительной математики и математической физики. 1972. № 1. С. 61–67.
9. *Срочко В.А.* Условие оптимальности типа принципа максимума в системах Гурса–Дарбу // Сиб. матем. журн. 1984. № 2. С. 56–65.
10. *Марданов М.Дж.* Необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с распределенными параметрами //

Известия АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1987. № 4. С. 181–187.
11. *Меликов Т.К.* Особые в классическом смысле управления в системах Гурса–Дарбу. Баку: Изд-во ЭЛМ, 2003. 96 с.
12. *Мансимов К.Б.* Об одной схеме исследования особого случая в системах Гурса–Дарбу // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1981. № 2. С. 100–104.
13. *Алексеев В.М., Фомин С.В., Тихомиров В.М.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
14. *Срочко В.А.* Вычислительные методы оптимального управления. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982. 110 с.
15. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1962.

Quasi-singular controls in the optimal control problems described of hyperbolic integro-differential equations

K. B. Mansimov
Baku State University; 68, Baxtiyar Vahabzade st. Baku, AZ 1141, Azerbaijan

V. G. Rzayeva
Sumgait State University; 1, Baku st., 43 bloc, Sumgait, AZ5008, Azerbaijan
kamilbmansimov@gmail.com

Among the problems of optimal control of systems with distributed parameters, a special place is occupied by problems of optimal control described by hyperbolic integro-differential equations. The paper considers the optimal control problem described by a hyperbolic Volterra type integro-differential equation with Goursat boundary conditions. And quality functionality of the terminal type. Under the assumption that the control region is convex, using one version of the increment method, an analog of the linearized maximum condition and the general necessary optimality condition of the second order are proved. The case of quasi-singular controls is separately studied.

Keywords: *Volterra type hyperbolic integro-differential equation; necessary optimality condition; analog of the linearized maximum condition; quasi-singular control.*