ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2020 Математика. Механика. Информатика Вып. 1(48)

МАТЕМАТИКА

УДК 513

Геометрии, развертывающиеся на трехмерное евклидово пространство

З. И. Андреева, Г. Г. Шеремет
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
sheremet@pspu.ru; 8-902-831-71-75

Рассмотрен общий подход к определению и изучению геометрий, развертывающихся на 3-мерное евклидово пространство E_3 с помощью операции "склеивания" пространства E_3 при помощи равномерно-разрывных групп его движений. В качестве примера приведено построение пространства E_3^1, получающегося в результате "склеивания" пространства E_3 при помощи группы $G_1 = \left\{T_{\bar{a}}\right\}$. Рассмотрены аффинные и некоторые метрические свойства этого пространства, изучена группа его движений.

Ключевые слова: *евклидово пространство; расстояние; движение; группа; структура группы; равномерно-разрывная группа; склеивание; плоскость; прямая; точка.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-1-5-12

1. Равномерно-разрывные подгруппы группы движений трехмерного евклидова пространства

Геометрии, развертывающиеся на любое метрическое пространство, можно определять и изучать, "склеивая" данное пространство при помощи равномерно-разрывной подгруппы группы движений этого пространства.

Определение 1 [2]**.** Подгруппа G группы движений евклидова пространства называется ***равномерно-разрывной***, если существует такое положительное действительное число d, что для любого $g \in G$ и любой недвойной точки X ($X \neq g(X)$) выполняется условие $\left|Xg\left(X\right)\right| \geq d$.

Орбита любой точки, любой прямой, любой плоскости под действием равномерно-разрывной группы является разрывным множеством (дискретным множеством). В орбите любой точки расстояние между точками ограничено снизу одним и тем же числом d, поэтому группу называют равномерной.

Теорема 1. Если движение g содержится в равномерно-разрывной группе G и $g(X) = X$ хотя бы для одной точки X, то g есть тождественное преобразование.

Доказательство. Предположим, что G – равномерно-разрывная группа, $g \in G,$ существует такая точка X, что $g(X) = X$, но g не является тождественным преобразованием. Пусть Y – любая точка, лежащая внутри сферы $\left|XY\right| < \dfrac{d}{2}.$ Тогда $\left|XY\right| = \left|g\left(X\right)g\left(Y\right)\right| = \left|Xg\left(Y\right)\right|.$

Следовательно, $\left|X\, g(Y)\right| < \dfrac{d}{2}.$ Отсюда по неравенству треугольника $\left|Yg\left(Y\right)\right| \leq \left|YX\right| + \left|Xg\left(Y\right)\right| < d.$ Следовательно, по определению 1, $g(Y) = Y$.

Итак, любая точка, лежащая внутри сферы $\left|XY\right| < \dfrac{d}{2}$, неподвижна. Внутри этой сферы найдутся четыре некомпланарные точки, но движение пространства, имеющее четыре некомпланарные неподвижные точки, является тождественным преобразованием.

Следствие. Равномерно-разрывная подгруппа группы движений евклидова пространства не может содержать центральные симметрии, повороты вокруг оси (в том числе осевые симметрии), симметрии относительно плоскости.

Очевидно, группа, содержащая только тривиальное движение, является равномерно-разрывной. Остальные равномерно-разрывные подгруппы группы движений евклидова трехмерного пространства будем называть *нетривиальными.*

Из статьи [1, теорема 7] следует

Теорема 2. Существует точно 9 нетривиальных типов равномерно-разрывных групп движений евклидова трехмерного пространства. Эти группы имеют следующую структуру:

1) $G_1 = \{T_{\bar{a}}\}$;

2) $G_2 = \{T_{\bar{a}}\} \otimes \{T_{\bar{b}}\}$, $\bar{b} \perp \bar{a}$;

3) $G_3 = \{T_{\bar{a}}\} \otimes \{T_{\bar{b}}\} \otimes \{T_{\bar{c}}\}$, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ попарно ортогональны;

4) $G_4 = \{T_{\bar{a}}\} \cdot \{R_l^{\alpha}\}$, где $\bar{a} \div l$, $\alpha = \dfrac{2\pi}{m}$;

5) $G_5 = \left(\{T_{\bar{a}}\} \quad \{T_{\bar{b}}\}\right) \cdot \{R_l^{\alpha}\}$, $\bar{a} \div l$, $\bar{b} \perp \bar{a}$, $\alpha = \dfrac{2\pi}{m}$;

6) $G_6 = (\{T_{\bar{a}}\} \otimes \{T_{\bar{b}}\} \otimes \{T_{\bar{c}}\}) \times \{R_l^{\alpha}\}$, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ попарно ортогональны, $\bar{a} \div l$, $\alpha = \dfrac{2\pi}{m}$;

7) $G_7 = \{S_{\Pi,\bar{a}}\}$, $\bar{a} \div \Pi$;

8) $G_8 = \{T_{\bar{b}}\} \cdot \{S_{\Pi,\bar{a}}\}$, $\bar{a} \div \Pi$, $\bar{b} \perp \bar{a}$;

9) $G_9 = \left(\{T_{\bar{c}}\} \quad \{T_{\bar{b}}\}\right) \cdot \{S_{\Pi,\bar{a}}\}$, $\bar{a} \div \Pi$, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ попарно ортогональны.

Следствие. Существует точно девять нетривиальных типов трехмерных пространств, развертывающихся на трехмерное евклидово пространство.

2. Общий подход к определению геометрий, развертывающихся на евклидово пространство

Пусть G_i – равномерно-разрывная подгруппа группы движений трехмерного евклидова пространства E_3 и пусть F – любая фигура в E_3.

Определение 2. Склеиванием орбиты $\{\boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{F})\}$ называется результат отождествления всех элементов орбиты $\{\boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{F})\}$.

С помощью этой операции определяются точки, прямые и плоскости нового пространства (которое будем называть *пространство, развертывающееся на* E_3 или *пространство, полученное склеиванием* E_3 *при помощи группы* G_i).

Определение 3. Точкой нового пространства (новой точкой) называется результат склеивания орбиты любой точки пространства E_3.

Определение 4. Прямой нового пространства (новой прямой) называется результат склеивания орбиты любой прямой пространства E_3, при этом склеиваются орбиты всех точек данной эвклидовой прямой.

Определение 5. Плоскостью нового пространства (новой плоскостью) называется результат склеивания орбиты любой плоскости пространства E_3, при этом склеиваются орбиты всех точек и прямых данной евклидовой плоскости.

Замечание. Можно дать другое определение точек, прямых и плоскостей новой геометрии.

Определение 6. Точкой (***прямой, плоскостью***) нового пространства называется орбита любой точки (прямой, плоскости) пространства E_3.

Если A – любая точка пространства E_3 и $\boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{A})$ – ее орбита, то соответствующую точку новой геометрии будем обозначать $\bar{A}$ (будем также использовать обозначение $\bar{A} = \boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{A})$). Аналогично, прямую и плоскость, определяемые прямой l и плоскостью Π соответственно, будем обозначать $\bar{l}$ и $\bar{\Pi}$.

Определение 7. Пространством, полученным склеиванием $\boldsymbol{E_3}$ ***при помощи группы*** $\boldsymbol{G_i}$, называется множество всех новых точек, прямых и плоскостей. Полученное пространство обозначим E_3^1.

Пусть $\bar{A} = \boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{A})$, $\bar{B} = \boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{B})$.

Определение 8. Расстоянием между точками $\bar{A} = \boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{A})$, $\bar{B} = \boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{B})$ называется минимум расстояний между точками $g(A)$ и $h(B)$, где g и h пробегают все движения из группы $\boldsymbol{G_i}$.

$|\bar{A}, \bar{B}|$ = min $|g(A), h(B)|$, где g и h пробегают все движения из группы $\boldsymbol{G_i}$.

Определение 9. Движением нового пространства называется такое взаимнооднозначное отображение множества ее точек на себя, при котором сохраняются расстояния между точками.

Очевидно, для движений выполняются следующие свойства:

1. Тождественное преобразование множества точек является движением.
2. Отображение, обратное движению, является движением.
3. Произведение двух движений является движением.
4. Множество всех движений нового пространства является мультипликативной группой.

Рассмотрим пространства, соответствующие некоторым равномерно-разрывным подгруппам. Очевидно, пространство, получающееся склеиванием E_3 при помощи тривиальной равномерно-разрывной подгруппы, совпадает с самим пространством E_3.

3. Трехмерное цилиндрическое пространство

3.1. Определение цилиндрического пространства и его модели

Трехмерное цилиндрическое пространство получается в результате "склеивания" пространства E_3 с помощью группы $G_1 = \{T_{\bar{a}}\}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, то пространство будем обозначать E_3^1.

Пусть A – произвольная точка пространства E_3. Орбитой этой точки при действии группы G_1 является множество точек $\{\dots A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 \dots\}$, где $A_s = T_{s\bar{a}}(A)$, $s \in Z$ (рис. 1).

Все точки орбиты лежат на одной евклидовой прямой, параллельной вектору $\bar{a}$.

При этом $\overline{A_k A_{k+1}} = \bar{a}$ для любого целого числа $к$. Если все точки орбиты "склеить" (отождествить), то в евклидовом пространстве результат склеивания можно изобразить любой точкой этой орбиты, например точкой A_0. Евклидов отрезок $[A_kA_{k+1}]$ "склеится" в окружность длины, равной $|\bar{a}|$.

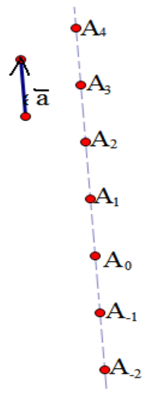

Рис. 1

Пусть П – произвольная плоскость в пространстве E_3, перпендикулярная вектору $\bar{a}$. Ее орбитой при действии группы $G_1 = \{T_{\bar{a}}\}$ будет множество (…, $П_{-2}$, $П_{-1}$, $П_0$, $П_1$, $П_2$, …) параллельных плоскостей, при этом каждая плоскость получается из предыдущей параллельным переносом на вектор $\bar{a}$ (рис. 2).

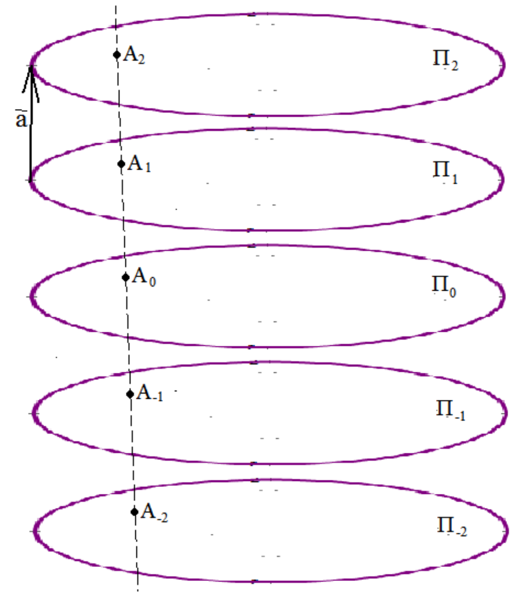

Рис. 2

Плоскости орбиты разбивают все евклидово пространство на слои с параллельными краями. Все эти слои склеиваются между собой и склеиваются с любым одним слоем, например с $(П_0П_1)$. При этом все точки плоскости $П_0$ склеиваются с соответствующими точками плоскости $П_1$. Получаем две модели цилиндрического пространства.

Первая модель. Слой с параллельными краями (при этом края слоя склеены при помощи вектора $\bar{a}$).

Вторая модель. Так как, склеивая слой по его краям, мы получаем цилиндрическую поверхность в четырехмерном евклидовом пространстве, то эта поверхность и будет моделью нового пространства. Этим объясняется название нового пространства.

3.2. Плоскости в цилиндрическом пространстве

Пусть H произвольная плоскость в пространстве E_3.

Возможны три случая расположения этой плоскости относительно вектора $\bar{a}$.

1. Если плоскость *H* перпендикулярна вектору $\bar{a}$, то все плоскости, входящие в ее орбиту, склеиваются в одну их них, например в саму плоскость *П*, но никакие две точки плоскости *H* не склеиваются между собой.

В результате получается сама плоскость *H*. Получаем ***плоскости 1-го рода*** – это евклидовы плоскости.

На первой модели они изображаются плоскостями, лежащими в слое $(П_0П_1)$ и параллельными его краям.

На второй модели плоскости 1-го рода изображаются плоскостными образующими четырехмерного цилиндра.

2. Если плоскость *H* параллельна вектору $\bar{a}$, то ее орбита состоит из одного элемента – самой плоскости *H*. Если h_0 одна из прямых этой плоскости, перпендикулярная вектору $\bar{a}$, то орбита этой прямой разбивает плоскость *H* на полосы с краями, параллельными h_0 (рис. 3). Все эти полосы склеиваются друг с другом, например с (h_0h_1). При этом все точки прямой h_0 склеиваются с соответствующими точками прямой h_1.

В результате этого склеивания получаются трехмерные цилиндры (цилиндрические плоскости).

Получили в цилиндрическом пространстве ***плоскости 2-го рода*** – цилиндрические плоскости.

На первой модели эти плоскости изображаются лежащими в слое $(П_0П_1)$ бесконечными цилиндрами с образующими, перпендикулярными вектору $\bar{a}$ и радиусом, равным $\frac{|\bar{a}|}{2\pi}$.

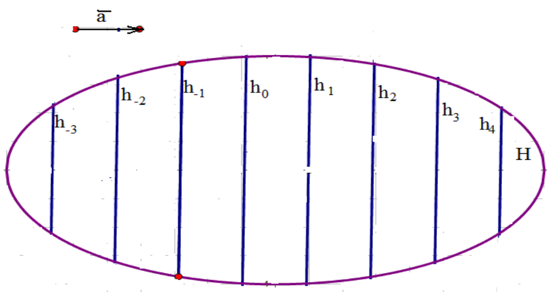

Рис. 3

3. Если плоскость *H* не параллельна и не перпендикулярна вектору $\bar{a}$, то плоскости ее орбиты (... $H_{-2}, H_{-1}, H_0, H_1, H_2, H_3$, ...) пересекают каждую плоскость орбиты (..., $П_{-2}, П_{-1}, П_0, П_1, П_2$, ...) (рис. 5).

Линии пересечения разбивают каждую плоскость $H_к$ на полосы.

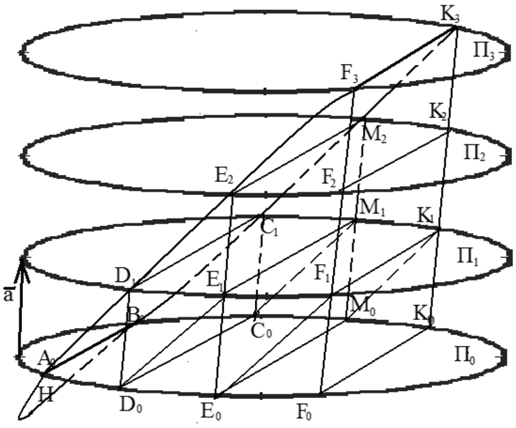

Рис. 4

При склеивании плоскости $H_к$ склеиваются с любой одной из них, например, с плоскостью $H_0 = H$. Так как все евклидово пространство склеивается со слоем $(П_0П_1)$, то результат склеивания полос, полученных на плоскости $П_0$,, тоже будет лежать в этом слое.

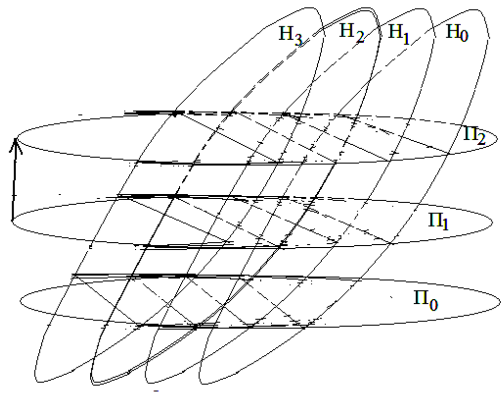

Рис. 5

Получим систему полос, у которых края, лежащие в плоскости $П_1$, склеиваются с соответствующими краями, лежащими в $П_0$. На рис. 4 это система полос (... $(A_0B_0C_1D_1)$, $(D_0C_0M_1E_1)$, $(E_0M_0K_1F_1)$, ...). При этом склеиваются прямые (D_1C_1) с (D_0C_0), (F_1M_1) с (F_0M_0), (F_1K_1) с (F_0K_0).

Итак, получили в цилиндрическом пространстве ***плоскости 3-го рода.***

На первой модели они изображаются описанной системой полос. На второй модели их изображениями будут винтовые поверхности на четырехмерном цилиндре.

3.3. Прямые в цилиндрическом пространстве

Пусть p – произвольная прямая в пространстве E_3. Возможны три случая ее расположения относительно вектора $\bar{a}$.

1. Прямая p параллельна вектору $\bar{a}$. Орбита этой прямой состоит только из самой прямой p. Орбита любой точки этой прямой разбивает ее на отрезки. Все эти отрезки склеиваются в один (любой из них), например, в $[A_0A_1]$, при этом точки A_0 и A_1 тоже склеиваются. Получается ***прямая 1-го рода*** в цилиндрическом пространстве. На первой модели эта прямая изображается отрезком, перпендикулярным плоскости $П_0$. Концы этого отрезка склеиваются и лежат в плоскостях $П_0$ и $П_1$. Любая прямая первого рода замкнута и имеет длину, равную $|\bar{a}|$ (рис. 6, а). На второй модели любая прямая 1-го рода изображается окружностью радиуса $\frac{|\bar{a}|}{2\pi}$.

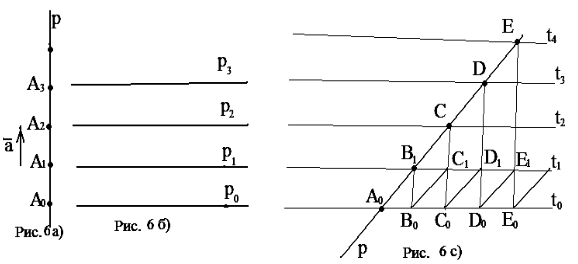

Рис. 6

2. Прямая p параллельна вектору $\bar{a}$. Орбита этой прямой состоит из всех возможных прямых, которые получаются из p параллельными переносами на векторы, кратных вектору $\bar{a}$ (рис. 6, б). Все эти прямые склеиваются в любую одну из них, например в $p = p_0$. Никакие точки прямой p не склеиваются между собой. Получили ***прямые 2-го рода*** в цилиндрическом пространстве. И на первой и на второй моделях эти прямые будут изображаться евклидовыми прямыми.

3. Прямая p не параллельна и не перпендикулярна вектору $\bar{a}$. Орбита этой прямой состоит из всех возможных прямых, которые получаются из p параллельными переносами на векторы, кратные вектору $\bar{a}$. Все эти прямые лежат в одной евклидовой плоскости H, параллельной вектору $\bar{a}$, и склеиваются в любую одну из них, например в $p = p_0$.

Пусть плоскость H пересекает плоскости (. . . , $П_{-2}$, $П_{-1}$, $П_0$, $П_1$, $П_2$, . . .) по прямым (. . . t_{-2} , t_{-1} , t_0 , t_1 , t_2 , . . .) соответственно. Эти прямые разбивают прямую p на отрезки. Эти отрезки склеиваются с соответствующими отрезками, лежащими в полосе (t_0,t_1).

На рис. 6, с B_1C склеивается с B_0C_1 , CD с C_0D_1 , DE с D_0E_1 и т.д. При этом склеиваются между собой соответствующие концы этих отрезков. На рис. 6, с склеиваются B_1 с B_0 , C_1 с C_0 , D_1 с D_0 , E_1 с E_0 и т.д. Получили ***прямую 3-го рода*** в цилиндрическом пространстве.

На первой модели эта прямая изображается описанной системой отрезков.

На второй модели она изображается винтовой линией.

3.4. Свойства прямых и плоскостей в цилиндрическом пространстве

Теорема 3. Через любые две различные точки цилиндрического пространства проходят
1) либо точно одна прямая 1-го рода,
2) либо точно одна прямая 2-го рода и бесконечно много прямых 3-го рода,
3) либо бесконечно много прямых 3-го рода.

Доказательство. Пусть А = $\boldsymbol{G_i(A)}$, В = $\boldsymbol{G_i(B)}$ – две различные точки цилиндрического пространства. Возможны следующие три случая расположения соответствующих орбит в пространстве E_3.

1. Орбиты $\boldsymbol{G_i(A)}$ и $\boldsymbol{G_i(B)}$ лежат на одном носителе. В результате склеивания получается одна прямая 1-го рода и только она.

2. Орбиты $\boldsymbol{G_i(A)}$ и $\boldsymbol{G_i(B)}$ лежат на разных носителях, но существуют такие A_i и B_j, что прямая $A_i B_j$ перпендикулярна вектору $\bar{a}$. В этом случае орбита прямой $A_i B_j$ склеивается в прямую 2-го рода. Орбиты всех прямых A_kB_s, отличные от орбиты прямой $A_i B_j$, склеиваются в прямые 3-го рода.

3. Орбиты $\boldsymbol{G_i(A)}$ и $\boldsymbol{G_i(B)}$ лежат на разных носителях и ни одна прямая A_iB_j не перпендикулярна вектору $\bar{a}$. В этом случае орбиты всех прямых A_iB_j склеиваются в прямые 3-го рода.

Теорема 4. Любые две различные прямые 1-го рода не имеют ни одной общей точки и лежат в одной и только в одной плоскости 1-го рода.

Доказательство. Прямые первого рода получаются при склеивании орбит евклидовых прямых, параллельных вектору $\bar{a}$.

Каждая из этих орбит состоит из одной прямой. Эти прямые в пространстве E_3 будут различными и параллельными. Так как прямые орбит не пересекаются, то и данные прямые не имеют общих точек. Через прямые этих орбит проходит евклидова плоскость и только одна. Орбита этой плоскости состоит из одной плоскости и при склеивании дает плоскость 1-го рода.

Теорема 5. Любые две различные прямые 2-го рода не имеют ни одной общей точки, и через них проходит либо точно одна плоскость 2-го рода, либо точно одна плоскость 2-го рода и бесконечно много плоскостей 3-го рода, либо только бесконечно много плоскостей 3-го рода.

Доказательство. Пусть данные прямые получаются склеиванием орбит $\boldsymbol{G_i(p)} = (\ldots ,p_{-2} , p_{-1} , p_0 , p_1 , p_2 , \ldots)$ и $\boldsymbol{G_i(q)} = (\ldots , q_{-2} , q_{-1} , q_0 , q_1 , q_2 , \ldots)$. Так как $p_i \perp \bar{a}$ и $q_j \perp \bar{a}$, то ни одна прямая p_i не пересекается ни с одной q_j. Следовательно, данные прямые не имеют общих точек. Если орбиты $\boldsymbol{G_i(p)}$ и $\boldsymbol{G_i(q)}$ лежат в одной плоскости, то эта плоскость перпендикулярна вектору $\bar{a}$ и при склеивании определяет одну плоскость 2-го рода. Если орбиты $\boldsymbol{G_i(p)}$ и $\boldsymbol{G_i(q)}$ не лежат в одной плоскости, то для орбит плоскостей, проходящих через p_i и q_j, возможны да случая.

1) Найдется орбита, плоскости которой перпендикулярны вектору $\bar{a}$ (очевидно, такая орбита может быть только одна). При склеивании эта орбита даст плоскость 2-го рода. Остальные орбиты определят плоскости 3-го рода.

2) Плоскости всех орбит не перпендикулярны вектору $\bar{a}$. При их склеивании получатся только плоскости 3-го рода.

Теорема 6. Любые две различные прямые 3-го рода либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют бесконечно много общих точек. Через любые две различные прямые 3-го рода проходит либо одна плоскость 1-го рода, либо бесконечно много плоскостей 3-го рода.

Теорема 7. Любые две прямые 1-го и 2-го родов (1-го и 3-го родов) либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют точно одну общую точку.

Такие прямые либо определяют точно одну плоскость 1-го рода, либо не лежат ни в какой одной плоскости.

Теорема 8. Любые две прямые 2-го и 3-го родов либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют бесконечно много общих точек. Такие прямые либо определяют точно одну плоскость 1-го рода, либо не лежат ни в какой одной плоскости.

Теорема 9. Любые две различные плоскости 1-го рода либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют точно одну общую прямую 2-го рода.

Теорема 10. Любые две различные плоскости 2-го рода не имеют ни одной общей точки.

Теорема 11. Любые две различные плоскости 3-го рода либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют точно одну общую прямую 3-го рода.

Теорема 12. Любые две плоскости 1-го и 2-го родов либо не имеют общих точек, либо имеют общую прямую 2-го рода.

Теорема 13. Любые две плоскости 1-го и 3-го родов либо не имеют общих точек, либо имеют общую прямую 3-го рода.

Теорема 14. Любые две плоскости 2-го и 3-го родов либо не имеют общих точек, либо имеют общую прямую 2-го рода.

Теорема 15. Любая плоскость 1-го рода содержит прямые 1-го, 2-го и 3-го родов. Любая плоскость 2-го рода содержит только прямые 2-го рода. Любая плоскость 3-го рода содержит прямые 2-го и 3-го родов.

Теорема 16. Через любые две различные прямые проходит

1) либо точно одна плоскость первого рода,
2) либо точно одна плоскость второго рода и бесконечно много плоскостей третьего рода,
3) либо бесконечно много плоскостей третьего рода.

3.5. Расстояние между точками в цилиндрическом пространстве. Угол между прямыми

Пусть $\overline{\boldsymbol{A}}$ и $\overline{\boldsymbol{B}}$ – любые две точки в цилиндрическом пространстве и $G_1(A) =\{\ldots A_{-2}, A_{-1}, A_0 , A_1, A_2 , A_3 , A_4 \ldots\}$, $G_1(B) =\{\ldots B_{-2}, B_{-1}, B_0 , B_1, B_2 , B_3 , B_4 \ldots\}$ соответствующие им орбиты точек в пространстве E_3 .

В пункте 2 было определено расстояние между точками в любом пространстве, развертывающемся на евклидово пространство, а именно $\left|\overline{A},\overline{B}\right| = min\left|A_i, B_j\right|$, где A_i, B_j пробегают все точки орбит $G_1(A)$ и $G_1(B)$ соответственно.

Свойства расстояний между точками

1^0. Для любой упорядоченной пары точек цилиндрического пространства расстояние между ними определено и однозначно.

2^0. $\left|\overline{A},\overline{B}\right| \geq 0$ для любых точек $\overline{A}$ и $\overline{B}$. При этом $\left|\overline{A},\overline{B}\right| = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{A} = \overline{B}$.

3^0. Для любой точки $A_i \in G_1(A)$ найдется такая точка $B_j \in G_1(B)$, что $\left|\overline{A},\overline{B}\right| = \left|A_i, B_j\right|$.

4^0. $\left|\overline{A},\overline{B}\right| = \left|\overline{B},\overline{A}\right|$ для любых точек $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

5^0. $\left|\overline{A},\overline{B}\right| + \left|\overline{B},\overline{C}\right| \geq \left|\overline{A},\overline{C}\right|$ для любых точек $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$.

Если $\{\dots p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2, \dots\}$ и $\{\dots q_{-2}, q_{-1}, q_0, q_1, q_2, \dots\}$ – орбиты двух прямых p и q пространства E_3, то углы между прямыми p_i и q_j для любых i и j не зависят от i и j и равны углу между прямыми p и q. Отсюда

Определение 11. Углом между прямыми в цилиндрическом пространстве называется угол между соответствующими им евклидовыми прямыми.

Определение 12. Две прямые цилиндрического пространства называются ***ортогональными*** (***перпендикулярными***), если угол между ними равен 90^0.

Свойства перпендикулярных прямых в цилиндрическом пространстве

1. Любая прямая первого рода и любая прямая второго рода перпендикулярны.

2. Через любую точку проходят бесконечно много прямых, перпендикулярных данной прямой первого рода. Все они лежат в одной плоскости второго рода.

3.6. Движения цилиндрического пространства

Обозначим ***M*** – множество орбит всех точек пространства E_3 при действии группы $G_1 = \{T_{\overline{a}}\}$. Пусть G^* множество всех движений пространства E_3, при которых орбита любой точки преобразуется снова в орбиту некоторой точки (т.е. относительно которых инвариантно множество ***M***). Очевидно, G^* является группой. В эту группу входят

1) все параллельные переносы пространства E_3 (в частности в группу G^* входит группа $G_1 = \{T_{\overline{a}}\}$);

2) все центральные симметрии пространства E_3;

3) все повороты пространства E_3 относительно осей, параллельных вектору $\overline{a}$, в том числе осевые симметрии относительно таких осей;

4) все осевые симметрии пространства E_3 относительно осей, перпендикулярных вектору $\overline{a}$;

5) все скользящие симметрии, оси которых параллельны вектору $\overline{a}$;

6) все скользящие симметрии, оси которых перпендикулярны вектору $\overline{a}$;

7) все симметрии пространства E_3 относительно плоскостей, параллельных вектору $\overline{a}$;

8) все симметрии пространства E_3 относительно плоскостей, перпендикулярных вектору $\overline{a}$;

9) все произведения перечисленных выше движений.

Теорема 17. Группа $G_1 = \{T_{\overline{a}}\}$ является инвариантной подгруппой в группе G^*.

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить, что $g^{-1} \circ T_{\bar{a}} \circ g \in \{T_{\bar{a}}\}$ для любого частного вида движений из группы G^*. Действительно, $T_{\overline{b}}^{-1} \cdot T_{\overline{a}} \cdot T_{\overline{b}} = T_{\overline{a}} \in G^*$; $R_l^{-\alpha} \cdot T_{\overline{a}} \cdot R_l^{\varepsilon} = T_{\overline{a}} \in G^*$ (здесь $l \parallel \overline{a}$); $S_l^{-1} \cdot T_{\overline{a}} \cdot S_l = T_{-\overline{a}} \in G^*$ (здесь l перпендикулярна $\overline{a}$); $S_{\Pi}^{-1} \cdot T_{\overline{a}} \cdot S_{\Pi} = T_{\overline{a}} \in G^*$ (здесь Π параллельна $\overline{a}$). так, $G_1 = \{T_{\overline{a}}\}$ является инвариантной подгруппой в группе G^*.

Теорема 18. Любое движение из группы G^* определяет движение цилиндрического пространства.

Доказательство. Пусть $g \in G^*$.

Зададим отображение $g_ц$ множества точек цилиндрического пространства на себя по правилу $G_ц$ ($\boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{A})$) = $\boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{A^1})$ тогда и только тогда, когда g ($\boldsymbol{A}$) = $\boldsymbol{A^1}$ для любой точки $\boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{A})$. Очевидно, $g_ц$ есть однозначное отображение множества точек цилиндрического пространства на себя.

Так как g является движением пространства E_3, то $|AB| = |A^1B^1|$ для любых точек пространства E_3, то $\min|A_iB_j| = \min|A_i^1B_j^1|$ для любых точек орбит точек A, B, A^1, B^1.
Следовательно, $|G_i(A), G_i(B)| = |G_i(A^1), G_i(B^1)|$, т.е. $g_ц$ сохраняет расстояние между точками. Следовательно, $g_ц$ является движением цилиндрического пространства.

Теорема 19. Все элементы группы $G_1 = \{T_{\bar{a}}\}$ и только они определяют тождественное преобразование цилиндрического пространства.

Теорема 20. Любое движение цилиндрического пространства порождается некоторым движением из группы G^*.

Обозначим группу движений цилиндрического пространства $G_ц$. Из теорем 17–20 вытекает

Теорема 21. Группа движений цилиндрического пространства изоморфна фактор-группе группы движений трехмерного евклидова пространства по подгруппе $G_1 = \{T_{\bar{a}}\}$.

Частные виды движений, входящие в группу G^*, определяют и частные виды движений цилиндрического пространства.

1. Параллельные переносы $T_{\bar{b}}$ определяют сдвиги по прямым 1-го, 2-го или 3-го рода, если вектор $\bar{b}$ параллелен вектору $\bar{a}$, перпендикулярен $\bar{a}$, или не параллелен и не перпендикулярен $\bar{a}$ соответственно.

2. Центральные симметрии определяют центральные симметрии цилиндрического пространства.

3. Осевые симметрии S_l евклидова пространства определяют в цилиндрическом пространстве осевые симметрии относительно прямой 1-го или 2-го рода, если l параллельна или перпендикулярна вектору $\bar{a}$ соответственно.

4. Симметрии $S_П$ евклидова пространства определяют в цилиндрическом пространстве симметрии относительно плоскости 1-го или 2-го рода, если $П$ параллельна или перпендикулярна вектору $\bar{a}$ соответственно.

Список литературы

1. *Андреева З.И.* Равномерно-разрывные подгруппы группы движений n-мерного евклидова пространства // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 2(41). С. 5–10.
2. *Никулин В.В., Шафаревич И.Р.* Группы и геометрии. М.: Наука, 1993. 239 с.
3. *Андреева З.И.*. Современные главы геометрии: учеб. пособие / Пермь: Изд-во ПГНИУ, 2014. 102 с.
4. *Андреева З.И., Шеремет Г Г.* Многообразие геометрии: учебник / Пермь: Изд-во ПГГПУ, 2015. 171 с.
5. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Движения плоскостей, развертывающихся на евклидову плоскость: сб. науч. тр. IV междунар. симпоз. "Симметрии: теоретический и методический аспекты". Астрахань, 2012. С. 16.

Geometries expanding into a three-dimensional Euclidean space

Z. I. Andreeva, G. G. Sheremet
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
sheremet@pspu.ru; +79028317175

The paper considers a general approach to defining and studying geometries expanding into 3-dimensional Euclidean space E_3 through the operation of 'gluing' space E_3 using uniformly discontinuous groups of its movements. As an example, there is provided construction of space E_3^1 obtained as a result of 'gluing' the space with the help of the group $G_1 = \{T_{\bar{a}}\}$. Affine and some metric properties of this space are considered, the group of its movements is studied.

Keywords: *Euclidean space; distance; movement group; group structure; uniformly discontinuous group; gluing; plane; straight line; point.*