УДК 51:33 (075.8)

Три квантора

С. Ф. Тюрин

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
tyurinsergfeo@yandex.ru; +7-952-32-02-510

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Комсомольский пр., 29

На занятиях по математической логике правила перестановки кванторов поясняют с использованием интерпретаций на двух двухэлементных множествах. Однако вопрос для большего количества кванторов не исследовался. В статье рассматриваются особенности выражений с одним, двумя и тремя кванторами при максимально возможной из простых интерпретаций – на трех множествах, содержащих по два элемента.

Ключевые слова: *квантор общности; квантор существования; логическое следование.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2020-1-87-91

Введение

Логика предикатов первого порядка как расширение логики высказываний использует кванторы общности и существования по предметным переменным [1–4]. Квантор существования может быть заменен на дизъюнкцию по предметной области, возможно бесконечную. Квантор общности может быть заменен на конъюнкцию по предметной области, возможно бесконечную. При помощи такой интерпретации на занятиях по математической логике доказываются правила перестановки двух кванторов [5, 6]. Вызывает интерес вопрос особенностей перестановок трех кванторов и методика объяснения этих правил на практических занятиях.

1. Один квантор

Пусть дана высказывательная форма "Решать задачи", которой соответствует двухместный предикат, например, $P(x,y)$. Рассмотрим суждение: "Хотя бы один студент решает задачи" и возьмем два множества – студентов, состоящее всего из двух человек $M_x = \{1,2\}$ и множество задач, состоящее всего из двух задач. $M_y = \{1,2\}$.

Меньше брать нельзя – не получится дизъюнкция и конъюнкция. Больше – будут сложные выражения. Получаем формулу для заданного суждения:

$$\exists x P(x,y). \tag{1}$$

Далее получаем интерпретацию на выбранной предметной области:

$$\begin{aligned} &\exists x P(x,y) = \\ &= P(1,y) \vee P(2,y). \end{aligned} \tag{2}$$

Видим, что, поскольку формула (1) не замкнута, при подстановке конкретных задач можно получить либо истинное (если студенты № 1 и № 2 решают задачу № 1 или № 2), либо ложное высказывание (если студенты № 1 и № 2 не решают задачу № 1 или № 2). Аналогично анализируем суждение "Хотя бы одна задача решается студентами", получаем формулу

$$\begin{aligned} &\exists y P(x,y) = \\ &= P(x,1) \vee P(x,2). \end{aligned} \tag{3}$$

Видим, что (3) не эквивалентно (2).

Далее: "Каждый студент решает задачи", здесь уже будет конъюнкция:

$$\begin{aligned} &\forall x P(x,y) = \\ &= P(1,y) P(2,y). \end{aligned} \tag{4}$$

И, наконец, "Каждая задача решается студентами":

$$\begin{aligned} &\forall y P(x,y) = \\ &= P(x,1) P(x,2). \end{aligned} \tag{5}$$

Выражения (4) и (5) также не эквивалентны. Очевидно, что из (2) следует (4), а из (3) следует (5). Действительно, ибо сказано: "Конъюнкция сильнее каждого из ее членов". Покажем с использованием метода резолюций [4–6] правильность аргумента с одним квантором "Из всеобщности следует существование":

$$\begin{gathered}\frac{\forall x P(x)}{\exists y P(y)};\\ \forall x P(x), \overline{\exists y P(y)};\\ \forall x P(x), \forall y \overline{P}(y);\\ \forall x \forall y P(x), \overline{P}(y);\\ P(x), \overline{P}(y).\end{gathered} \tag{6}$$

В (6) вывод верный, опровержение достигается при подстановке $\{(x,y)\}$.

Обратное неверно:

$$\begin{gathered}\frac{\exists x P(x)}{\forall y P(y)};\\ \exists x P(x), \overline{\forall y P(y)};\\ \exists x P(x), \exists y \overline{P}(y);\\ P(a), \overline{P}(b).\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь нельзя во втором дизъюнкте ввести ту же константу, что и в первом.

Теперь можно приступать к анализу выражений с двумя кванторами.

2. Два квантора

Рассмотрим суждение "Существуют студенты, решающие хотя бы одну задачу", при этом формула имеет вид

$$\exists x \exists y P(x, y). \tag{8}$$

Формула (8) замкнута. То есть значение ее истинности в отличие от (1)–(5) не меняется. Выполняем интерпретацию:

$$\begin{gathered}\exists x \exists y P(x, y) = \exists y P(1, y) \vee \exists y P(2, y) =\\ = P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(2,1) \vee P(2,2).\end{gathered} \tag{9}$$

Далее формализуем суждение: "Существуют задачи, решаемые хотя бы одним студентом":

$$\begin{gathered}\exists y \exists x P(x, y) =\\ = P(1,1) \vee P(2,1) \vee P(1,2) \vee P(2,2).\end{gathered} \tag{10}$$

Видим, что это эквивалентные суждения, невзирая на то, что порядок следования элементов дизъюнкции разный, он для дизъюнкции не существенен. Аналогично получаем, что суждение "Каждый студент решает каждую задачу":

$$\begin{gathered}\forall x \forall y P(x, y) =\\ = P(1,1) P(1,2) P(2,1) P(2,2),\end{gathered} \tag{11}$$

эквивалентно "Каждая задача решается каждым студентом":

$$\begin{gathered}\forall y \forall x P(x, y) =\\ = P(1,1) P(2,1) P(2,1) P(2,2).\end{gathered} \tag{12}$$

Делаем вывод, что одноименные кванторы можно менять местами:

$$\begin{gathered}\forall y \forall x P(x, y) = \forall x \forall y P(x, y);\\ \exists y \exists x P(x, y) = \exists x \exists y P(x, y).\end{gathered} \tag{13}$$

Рассмотрим теперь два разных квантора. Формализуем суждение "По меньшей мере, один студент решил все задачи":

$$\exists x \forall y P(x, y). \tag{14}$$

Почти то же самое: "Каждую задачу решил по меньшей мере один студент":

$$\forall y \exists x P(x, y). \tag{15}$$

Эквивалентны ли (12) и (13)? Получим интерпретации:

$$\begin{gathered}\exists x \forall y P(x, y) =\\ = \forall y P(1, y) \vee \forall y P(2, y) =\\ = P(1,1) P(1,2) \vee P(2,1) P(2,2).\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\forall y \exists x P(x, y) =\\ = \exists x P(x,1) \exists x P(x,2) =\\ = [P(1,1) \vee P(2,1)][P(1,2) \vee P(2,2)].\end{gathered} \tag{17}$$

Нет, (14) и (15) не эквивалентны, разные кванторы нельзя менять местами. И тем не менее, между ними есть связь…

Конъюнкции $P(1,1), P(1,2), P(2,1) P(2,2)$ есть (если раскрыть скобки) и в выражении $[P(1,1) \vee P(2,1)][P(1,2) \vee P(2,2)]$, но здесь есть еще и другие конъюнкции

$$P(1,1) P(2,2), P(2,1) P(1,2).$$

Что это значит? Это значит, что выражение (16) имплицирует выражение (17), то есть:

$$\begin{gathered}[\mathrm{P}(1.1)\mathrm{P}(1.2) \vee \mathrm{P}(2.1)\mathrm{P}(2.2)] \rightarrow\\ \rightarrow [\mathrm{P}(1.1) \vee \mathrm{P}(2.1)][\mathrm{P}(1.2) \vee \mathrm{P}(2.2)].\end{gathered} \tag{18}$$

Проверим это, докажем, что выражение (18) общезначимо (тождественно истинно, тавтология), устраняем импликацию:

$$\begin{gathered}\overline{[\mathrm{P}(1.1)\mathrm{P}(1.2) \vee \mathrm{P}(2.1)\mathrm{P}(2.2)]} \vee\\ \vee [\mathrm{P}(1.1) \vee \mathrm{P}(2.1)][\mathrm{P}(1.2) \vee \mathrm{P}(2.2)].\end{gathered} \tag{19}$$

Выполняем закон Де Моргана:

$$\begin{gathered}\overline{[P(1.1)P(1.2)]}\overline{[P(2.1)P(2.2)]}\vee\\ \vee P(1.1)P(1.2)\vee P(1.1)P(2.2)\vee\\ \vee P(2.1)P(1.2)\vee P(2.1)P(2.2).\end{gathered}\qquad(20)$$

Применяем формулы равносильных преобразований [5, 6]:

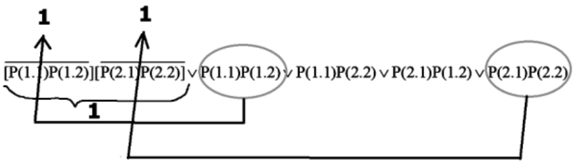

Рис. 1. *Доказательство следования (17) из (16)*

Видим, что получается единица. Или иначе:

$$\begin{gathered}[\overline{P(1.1)P(1.2)}][\overline{P(2.1)P(2.2)}]\vee\\ \vee\overline{\overline{P(1.1)P(1.2)}}\,\overline{\overline{P(2.1)P(2.2)}}\vee\\ \vee P(2.1)P(1.2)\vee P(2.1)P(2.2)=1.\end{gathered}\qquad(21)$$

Таким образом, разные кванторы переставлять местами нельзя, но из суждения и соответствующей формулы "По меньшей мере, один студент решил все задачи" следует суждение и соответствующая формула "Каждую задачу решил, по меньшей мере, один студент" и это есть закон логики предикатов:

$$\exists x\forall yP(x,y)\rightarrow\forall y\exists xP(x,y).\qquad(22)$$

Аналогично доказывается, что из суждения "По меньшей мере, одна задача решена каждым студентом" следует суждение "Каждый студент решил, по меньшей мере, одну задачу":

$$\exists y\forall xP(x,y)\rightarrow\forall x\exists yP(x,y).\qquad(23)$$

Докажем методом резолюций правильность аргумента (23):

$$\frac{\exists y\forall xP(x,y)}{\forall x\exists yP(x,y)}.\qquad(24)$$

Получим по (24) множество дизъюнктов с учетом стандартизации переменных:

$$\begin{gathered}\exists y\forall xP(x,y),\overline{\forall z\exists wP(z,w)}=\\ \exists y\forall xP(x,y),\exists z\forall w\overline{P}(z,w)=\\ =\forall x\forall wP(x,a),\overline{P}(b,w);\\ P(x,a),\overline{P}(b,w).\end{gathered}\qquad(25)$$

Видим, что при подстановке $\{(b,x),(a,w)\}$, где b,a – константы (функции Сколема), достигается опровержение, то есть аргумент правильный, да, следование имеет место быть!

Проверим, что обратное (24) неверно:

$$\frac{\forall x\exists yP(x,y)}{\exists y\forall xP(x,y)}.\qquad(26)$$

Получим по (26) множество дизъюнктов:

$$\begin{gathered}\forall x\exists yP(x,y),\overline{\exists z\forall wP(w,z)}=\\ \forall x\exists yP(x,y),\forall z\exists w\overline{P}(w,z)=\\ =\forall x\forall zP(x,f(x)),\overline{P}(g(z),z)=\\ =P(x,f(x)),\overline{P}(g(z),z).\end{gathered}\qquad(27)$$

Получаем некорректную подстановку $\{(g(x),x),(f(x),z)\}$, при которой происходит своего рода "зацикливание":

$$\{(g(x),x),(f(g(x)),z)\},\{(g(x),x),(f(g(g(x))),z)\}.\qquad(28)$$

Проверим неверный аргумент для двух кванторов по выражению (22):

$$\frac{\forall y\exists xP(x,y)}{\exists x\forall yP(x,y)}.\qquad(29)$$

$$\begin{gathered}\forall y\exists xP(x,y),\overline{\exists w\forall vP(w,v)}=\\ \forall y\exists xP(x,y),\forall w\exists v\overline{P}(w,v)=\\ P(f(y),y),\overline{P}(w,g(w)).\end{gathered}\qquad(30)$$

Получаем также подстановку $\{(f(y),w),(g(w),y)\}$ с "зацикливанием" $\{(f(g(w)),w),(g(w),y)\}$.

А как будет для верного аргумента (22)? Проверяем:

$$\begin{gathered}\exists x\forall yP(x,y),\overline{\forall w\exists vP(v,w)}=\\ \exists x\forall yP(x,y),\exists w\forall v\overline{P}(v,w)=\\ \forall y\forall vP(a,y),\overline{P}(v,b)=\\ P(a,y),\overline{P}(v,b).\end{gathered}\qquad(31)$$

Вот здесь нормальная подстановка

$$\{(a,v),(b,y)\}.\qquad(32)$$

3. Три квантора

Теперь введем третье множество (например, типов трудности задач) $M_z=\{1,2\}$ и рассмотрим три квантора.

Если все кванторы одинаковые, то все аналогично вышеописанному.

Например, "По крайней мере, один студент решает, по крайней мере, одну задачу хотя бы одного типа":

$$\begin{aligned}&\exists x\exists y\exists zP(x,y,z)=\\&=\exists y\exists zP(1,y,z)\vee\exists y\exists zP(2,y,z)=\\&=[\exists zP(1,1,z)\vee\exists zP(1,2,z)]\vee\\&\vee[\exists zP(2,1,z)\vee\exists zP(2,2,z)]=\\&=[\{P(1,1,1)\vee P(1,1,2)\}\vee\\&\vee\{P(1,2,1)\vee P(1,2,2)\}]\vee\\&\vee[\{P(2,1,1)\vee P(2,1,2)\}\vee\\&\vee\{P(2,2,1)\vee P(2,2,2)\}].\end{aligned}\tag{33}$$

Для суждения "Каждый студент решает каждую задачу каждого типа" получаем:

$$\begin{aligned}&\forall x\forall y\forall zP(x,y,z)=\\&=[\{P(1,1,1)P(1,1,2)\}\\&\{P(1,2,1)P(1,2,2)\}]\\&[\{P(2,1,1)P(2,1,2)\}\\&\{P(2,2,1)P(2,2,2)\}].\end{aligned}\tag{34}$$

То есть получаем "чистые" дизъюнкцию (33) и конъюнкцию (34).

Сколько всего вариантов выражений с тремя кванторами? 12 описываются выражениями с одинаковыми кванторами, типа (33), (34).

С одним квантором общности и двумя существования имеем 6 вариантов. С двумя кванторам общности и одним существования еще 6 вариантов. Итак, всего 24 варианта.

Рассмотрим, например, следующее выражение:

$$\begin{aligned}&\exists x\forall y\exists zP(x,y,z)=\\&=\forall y\exists zP(1,y,z)\vee\forall y\exists zP(2,y,z)=\\&=\exists zP(1,1,z)\exists zP(1,2,z)\vee\exists zP(2,1,z)\exists zP(2,2,z)=\\&=[P(1,1,1)\vee P(1,1,2)][P(1,2,1)\vee P(1,2,2)]\vee\\&\vee[P(2,1,1)\vee P(2,1,2)][P(2,2,1)\vee P(2,2,2)]\end{aligned}\tag{35}$$

Переставляем кванторы:

$$\begin{aligned}&\forall y\exists x\exists zP(x,y,z)=\\&=\exists x\exists zP(x,1,z)\exists x\exists zP(x,2,z)=\\&=[\exists zP(1,1,z)\vee\exists zP(2,1,z)]\\&[\exists zP(1,2,z)\vee\exists zP(2,2,z)]=\\&=[P(1,1,1)\vee P(1,1,2)\vee\\&\vee P(2,1,1)\vee P(2,1,2)]\cdot\\&\cdot[P(1,2,1)\vee P(1,2,2)\vee\\&\vee P(2,2,1)\vee P(2,2,2)].\end{aligned}\tag{36}$$

Легко видеть, что из (35) следует (36).

В выражении (35) имеется 8 конъюнкций, а в выражении (36) – все 16.

Проверим:

$$\begin{aligned}&[P(1,1,1)\vee P(1,1,2)][P(1,2,1)\vee P(1,2,2)]\vee\\&\vee[P(2,1,1)\vee P(2,1,2)][P(2,2,1)\vee P(2,2,2)]=\\&=P(1,1,1)P(1,2,1)\vee P(1,1,1)P(1,2,2)\vee\\&\vee P(1,1,2)P(1,2,1)\vee P(1,1,2)P(1,2,2)\vee\\&\vee P(2,1,1)P(2,2,1)\vee P(2,1,1)P(2,2,2)\vee\\&\vee P(2,1,2)P(2,2,1)\vee P(2,1,2)P(2,2,2)\end{aligned}\tag{37}$$

$$\begin{aligned}&=[P(1,1,1)\vee P(1,1,2)\vee\\&\vee P(2,1,1)\vee P(2,1,2)]\cdot\\&\cdot[P(1,2,1)\vee P(1,2,2)\vee\\&\vee P(2,2,1)\vee P(2,2,2)]=\\&=P(1,1,1)P(1,2,1)\vee P(1,1,1)P(1,2,2)\vee\\&\vee P(1,1,1)P(2,2,1)\vee P(1,1,1)P(2,2,2)\vee\\&\vee P(1,1,2)P(1,2,1)\vee P(1,1,2)P(1,2,2)\vee\\&\vee P(1,1,2)P(2,2,1)\vee P(1,1,2)P(2,2,2)\vee\\&\vee P(2,1,1)P(1,2,1)\vee P(2,1,1)P(1,2,2)\vee\\&\vee P(2,1,1)P(2,2,1)\vee P(2,1,1)P(2,2,2)\vee\\&\vee P(2,1,2)P(1,2,1)\vee P(2,1,2)P(1,2,2)\vee\\&\vee P(2,1,2)P(2,2,1)\vee P(2,1,2)P(2,2,2).\end{aligned}\tag{38}$$

Проверим методом резолюций:

$$\begin{aligned}&\exists x\forall y\exists zP(x,y,z)\to\forall y\exists x\exists zP(x,y,z);\\&\frac{\exists x\forall y\exists zP(x,y,z)}{\forall w\exists v\exists qP(v,w,q)}.\end{aligned}\tag{39}$$

Получаем дизъюнкты:

$$\begin{aligned}&\exists x\forall y\exists zP(x,y,z),\overline{\forall w\exists v\exists qP(v,w,q)}=\\&=\exists x\forall y\exists zP(x,y,z),\exists w\forall v\forall q\overline{P}(v,w,q)=\\&=\forall y\forall v\forall qP(a,y,f(y)),\overline{P}(v,b,q)=\\&=P(a,y,f(y)),\overline{P}(v,b,q).\end{aligned}\tag{40}$$

Здесь $f(y),g(y)$ – как и константы, функция Сколема, поскольку квантор существования по z находится в области действия квантора общности по y. Видим, что опровержение достигается при корректной подстановке $\{(a,v),(b,y),(f(y),q)\}$.

Проверим, что обратное (39) следование не имеет места:

$$\begin{aligned}&\forall y\exists x\exists zP(x,y,z)\to\exists x\forall y\exists zP(x,y,z)?\\&\frac{\forall w\exists v\exists qP(v,w,q)}{\exists x\forall y\exists zP(x,y,z)}?\end{aligned}\tag{41}$$

Получаем множество дизъюнктов:

$$\begin{aligned}&\forall w\exists v\exists qP(v,w,q),\overline{\exists x\forall y\exists zP(x,y,z)}=\\&\forall w\exists v\exists qP(v,w,q),\forall x\exists y\forall z\overline{P}(x,y,z)=\\&=\forall w\forall x\forall zP(f(w),w,g(w)),\\&\overline{P}(x,h(x),z)=\\&P(f(w),w,g(w)),\overline{P}(x,h(x),z).\end{aligned}\tag{42}$$

Подстановка $\{(f(w),x),(h(x),w),(g(w),z)\}$ некорректна, ибо:

$$\{(f(h(x)),x),(h(f(w)),w),(g(h(f(w)),z)\}. \qquad (43)$$

То есть h зависит от f, а f от h.

Таким образом, в (42) опровержение не достигается, поэтому такой вывод неверный.

А как насчет вот такого аргумента:

$$\exists x\forall y\forall zP(x,y,z) \to \forall y\exists x\forall zP(x,y,z)?$$

$$\frac{\exists x\forall y\forall zP(x,y,z)}{\forall w\exists v\forall qP(v,w,q)}? \qquad (44)$$

По идее смена квантора в конце не изменит выводимости. Получаем дизъюнкты:

$$\begin{gathered}\exists x\forall y\forall zP(x,y,z), \overline{\forall w\exists v\forall qP(v,w,q)} = \\ \exists x\forall y\forall zP(x,y,z), \exists w\forall v\exists q\overline{P}(v,w,q) = \\ = \forall y\forall z\forall vP(a,y,z), \overline{P}(v,b,f(v)) = \\ P(a,y,z), \overline{P}(v,b,f(v)).\end{gathered} \qquad (45)$$

Подстановка корректная:

$$\{(a,v),(b,y),(f(v),z)\}. \qquad (46)$$

При нашей интерпретации для всеобщности в конце получаем:

$$\begin{gathered}\exists x\forall y\forall zP(x,y,z) = \forall y\forall zP(1,y,z) \vee \forall y\forall zP(2,y,z) = \\ = \forall zP(1,1,z)P(1,2,z) \vee \forall zP(2,1,z)P(2,2,z) = \\ = [P(1,1,1)(1,1,2)][P(1,2,1)P(1,2,2)] \vee \\ [P(2,1,1)(2,1,2)][P(2,2,1)P(2,2,2)].\end{gathered} \qquad (47)$$

Далее:

$$\begin{gathered}\forall y\exists x\forall zP(x,y,z) = \exists x\forall zP(x,1,z)\exists x\forall zP(x,2,z) = \\ = [\forall zP(1,1,z) \vee \forall zP(2,1,z)][\forall zP(1,2,z) \vee \forall zP(2,2,z)] = \\ = [P(1,1,1)P(1,1,2) \vee P(2,1,1)P(2,1,2)] \\ [P(1,2,1)P(1,2,2) \vee P(2,2,1)P(2,2,2)] = \\ = [P(1,1,1)P(1,1,2) \vee \\ \vee P(2,1,1)P(2,1,2)] \cdot \\ \cdot [P(1,2,1)P(1,2,2) \vee \\ \vee P(2,2,1)P(2,2,2)] = \\ = P(1,1,1)P(1,1,2)P(1,2,1)P(1,2,2) \vee \\ \vee P(1,1,1)P(1,1,2)P(2,2,1)P(2,2,2) \vee \\ \vee P(2,1,1)P(2,1,2)P(1,2,1)P(1,2,2) \vee \\ \vee P(2,1,1)P(2,1,2)P(2,2,1)P(2,2,2).\end{gathered} \qquad (48)$$

Действительно, следование имеет место. Можно предположить, что такое свойство будет соблюдаться и при наличии любой последовательности " крайних справа" кванторов.

Выводы

Таким образом, в выражениях, имеющих три квантора, выполняется правило следования при перестановках двух крайних кванторов независимо от вида третьего, крайнего справа квантора. При доказательстве методом резолюций некорректная подстановка характеризуется "зацикливанием" функций Сколема. Рассмотренные примеры целесообразно использовать на занятиях по математической логике и в самостоятельной работе студентов.

Список литературы

1. *Верещагин Н.К., Шень А.* Математическая логика. URL: https://www.intuit.ru/studies/professional_skill_improvements/2162/courses/133/lecture/3723 (дата обращения: 19.12.2019).
2. *Никольская И.Л.* Математическая логика. М.: Высшая школа, 1981. 128 с.
3. *Морозенко В.В.* Дискретная математика: учеб. пособие. Пермь, 2006, ISBN 5-7944-0608-9. 226. Библиогр.: с. 223–224.
4. *Алябьева В.Г.* Математическая логика. Пермь, 2017. ISBN 978-5-7944-2904-66. Библиогр.: с. 19–21, 110.
5. *Аляев Ю.А., Тюрин С.Ф.* Дискретная математика и математическая логика. М.: Финансы и статистика, 2006. 357 с.
6. *Тюрин С.Ф., Аляев Ю.А.* Дискретная математика: практическая дискретная математика и математическая логика. М.: Финансы и статистика, 2010. 394 с.
7. *Тюрин С.Ф., Ланцов В.М.* Дискретная математика & математическая логика. Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2013. 271 с.

Three quantifiers

S. F. Tyurin
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia
tyurinsergfeo@yandex.ru; +7 952-320-02-510

In mathematical logic classes, the rules for alteration of quantifiers are explained using interpretations on two two-element sets. The problem is not addressed with regard to a bigger number of quantifiers. The article discusses the features of expressions with one, two and three quantifiers with the maximum possible of simple interpretations – on three sets containing two elements each.

Keywords: *generality quantifier; existential quantifier; logical implication.*