

УДК 534.014.2

Резонансы сил и скоростей

И. П. Попов

Курганский государственный университет
Россия, 640002, г. Курган, ул. Томина, 106-52
ip.porow@yandex.ru; 8 951-273-80-87

Даны определения резонансов сил и скоростей. Показано, что при параллельном соединении инертного тела, упругого элемента и демпфера в системе может возникать резонанс сил. При последовательном соединении этих элементов может возникать резонанс скоростей. Классический механический резонанс является резонансом сил.

Ключевые слова: резонанс сил; скоростей; параллельное соединение; последовательное; источник силы; скорости.

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-4-62-66

Широко известное дифференциальное уравнение

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = a_\omega \sin \omega t \quad (1)$$

[1] имеет решение $x = x_1 + x_2$,

где

$$x_1 = ae^{-bt} \sin(\omega_1 t + \alpha) \quad (2)$$

– собственные затухающие колебания,

$$x_2 = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (3)$$

– вынужденные колебания, a , α – постоянные интегрирования,

$$b = \frac{a_1}{2a_2}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}, \quad (4)$$

$$A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4h^2 \lambda^2}}, \quad (4a)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h\lambda}{1 - \lambda^2}, \quad \lambda = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad h = \frac{b}{\omega_0}, \quad \delta_0 = \frac{a_\omega}{a_0}. \quad (5)$$

При подстановках

$$a_2 = m, \quad a_1 = r, \quad a_0 = k, \quad a_\omega = F \quad (6)$$

уравнение (1) превращается в классическое дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний [2–7]:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = F \sin \omega t \quad (7)$$

или
$$m \frac{dv}{dt} + rv + k \int v dt = F \sin \omega t. \quad (7a)$$

При

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

имеет место резонанс.

Нам известна теоретическая электротехника, объекты и процессы которой математически изоморфны механическим [8–10]; при этом различают два резонанса – резонанс напряжений и резонанс токов.

В 1873 г. Дж. Максвелл ввел первую (из двух) систему электромеханических аналогий, в соответствии с которой напряжение дуально силе, а ток – скорости. В этой связи возникает закономерный вопрос: резонанс применительно к уравнению (7) это резонанс сил или скоростей?

Ответ на этот и связанные с ним вопросы составляет предмет настоящего исследования.

Определение 1. Резонанс сил – это резонанс, возникающий на частоте (8) в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими реактивные силы максимальны и противоположны.

Определение 2. Резонанс скоростей – это резонанс, возникающий на частоте (8) в механической системе, включающей инертное тело и упругий элемент, при котором развиваемые ими скорости максимальны и противоположны.

Резонанс сил

Уравнению (7) соответствует схема параллельного соединения (рис. 1), при котором инертное тело и изменения размеров упругого элемента и демпфера имеют единую скорость, а их реактивные силы складываются. При этом сумма реактивных сил потребителей механической мощности равна силе, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику напряжения в электротехнике можно назвать источником силы.

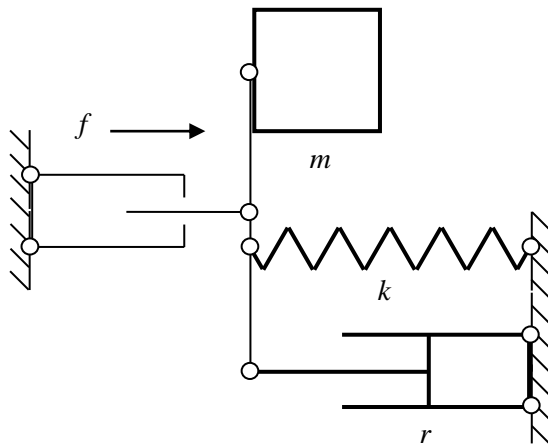


Рис. 1. Параллельное соединение

Теорема 1. При выполнении условия (8) в механической системе, состоящей из параллельно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера, что соответствует уравнению (7), возникает резонанс сил.

Доказательство

В соответствии с (4)–(6)

$$A = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + 4 \frac{r^2 m}{4m^2 k} \frac{m\omega^2}{k}}} =$$

$$= \frac{F}{k} \frac{1}{\omega/k \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} =$$

$$= \frac{F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}}.$$

В установившемся режиме

$$x = A \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= \frac{F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

$$f_k = kx = \frac{kF}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi). \quad (9)$$

$$f_m = m \frac{d^2 x}{dt^2} =$$

$$= - \frac{m\omega^2 F}{\omega \sqrt{(k/\omega - m\omega)^2 + r^2}} \sin(\omega t - \varphi). \quad (10)$$

При выполнении условия (8)

$$f_k^* = \frac{kF \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{k/m} \sqrt{(k/\sqrt{k/m} - m\sqrt{k/m})^2 + r^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{mk} F}{r} \sin(\omega t - \varphi) = \quad (11)$$

$$= \frac{\sqrt{k/m} \sqrt{mk} F}{\omega r} \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= \frac{kF}{\omega r} \sin(\omega t - \varphi). \quad (12)$$

$$f_m^* = - \frac{m\sqrt{k/m} F \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(k/\sqrt{k/m} - m\sqrt{k/m})^2 + r^2}} =$$

$$= - \frac{\sqrt{mk} F}{r} \sin(\omega t - \varphi) = \quad (13)$$

$$= - \frac{\omega \sqrt{mk} F}{\sqrt{k/mr}} \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= - \frac{\omega m F}{r} \sin(\omega t - \varphi). \quad (14)$$

Выражения (11) и (13) показывают, что f_k^* и f_m^* равны и противоположны. (9) и (12), (10) и (14) показывают, что f_k^* и f_m^* максимальны.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. В первую (максвелловскую) систему электромеханических аналогий необходимо добавляется следующее дуально-инверсное соответствие – последовательное соединение потребителей электрической мощности при резонансе напряжений дуально параллельному соединению потребителей механической мощности при резонансе сил.

Следствие 1.2. При резонансе сил реактивная сила системы *упругий элемент – инертное тело* равна нулю, поскольку $f_k^* = -f_m^*$.

Величину \sqrt{mk} по аналогии с электротехникой можно назвать *волновым сопротивлением* (системы).

Следствие 1.3. Если $\sqrt{mk} > r$, то реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают приложенную силу.

Пример 1. $F = 100$ Н, $\omega = 2$ рад/с, $m = 10$ кг, $k = 40$ кг·с⁻², $r = 5$ кг·с⁻¹.

Найти f_k^* и f_m^* .

В соответствии с (12) и (14)

$$f_k^* = \frac{40 \cdot 100}{2 \cdot 5} \sin(\omega t - \varphi) = 400 \sin(\omega t - \varphi) \text{ (Н)},$$

$$f_m^* = -\frac{2 \cdot 10 \cdot 100}{5} \sin(\omega t - \varphi) = -400 \sin(\omega t - \varphi) \text{ (Н)}.$$

Реактивные силы, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают приложенную силу.

Последовательное соединение

Инертное тело, упругий элемент и демпфер можно соединять не только параллельно, но и последовательно (рис. 2).

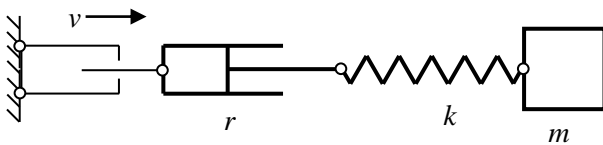


Рис. 2. Последовательное соединение

При последовательном соединении к элементам системы приложена единая сила, а скорости инертного тела и изменения размеров упругого элемента и демпфера складываются. При этом сумма скоростей потребителей механической мощности равна скорости, развиваемой источником механической мощности, который подобно источнику тока в электротехнике можно назвать источником скорости.

Скорости компонентов системы равны

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt, \quad v_k = -\frac{1}{k} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \frac{df}{dt}, \quad v_r = \frac{f}{r},$$

$$v = -V \cos \omega t.$$

$$v_m + v_k + v_r = v,$$

$$\frac{1}{k} \frac{df}{dt} + \frac{f}{r} + \frac{1}{m} \int f dt = -V \cos \omega t$$

или
$$\frac{1}{k} \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dt} + \frac{1}{m} f = V \omega \sin \omega t. \quad (15)$$

Последнее уравнение изоморфно (1). Собственные затухающие колебания силы на штоке источника скорости для последова-

тельного соединения в соответствии с (2) определяются выражением

$$f_1 = ae^{-bt} \sin(\omega_1 t + \alpha) = ae^{-\frac{k}{2r}t} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k^2}{4r^2}}t + \alpha\right).$$

Вынужденные колебания силы на штоке источника скорости для последовательного соединения в соответствии с (3) определяются выражениями

$$A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}} = \frac{V\omega m}{\sqrt{\left(1-\omega^2\frac{m}{k}\right)^2 + 4\frac{k^2}{4r^2}\frac{m}{k}\omega^2\frac{m}{k}}} = \frac{V\omega m}{\omega m \sqrt{\left(\frac{1}{\omega m} - \frac{\omega}{k}\right)^2 + \frac{1}{r^2}}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2h\lambda}{1-\lambda^2} = 2\frac{k}{2r} \frac{\omega m}{k} \frac{1}{1-\omega^2 m/k} = \frac{\omega m}{r\omega m(1/\omega m - \omega/k)},$$

$$f_2 = A \sin(\omega t - \varphi) = \frac{V \sin\left[\omega t - \operatorname{arctg} \frac{1}{r(1/\omega m - \omega/k)}\right]}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}}.$$

Резонанс скоростей

Справедлива

Теорема 2. При выполнении условия (8) в механической системе, состоящей из последовательно соединенных инертного тела, упругого элемента и демпфера, что соответствует уравнению (15), возникает резонанс скоростей.

Доказательство

В установившемся режиме

$$f = \frac{V}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}} \sin(\omega t - \varphi).$$

$$v_m = \frac{1}{m} \int f dt =$$

$$= -\frac{1}{\omega m} \frac{V \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}}. \quad (16)$$

$$v_k = \frac{1}{k} \frac{df}{dt} = \frac{\omega}{k} \frac{V \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{[1/(\omega m) - \omega/k]^2 + 1/r^2}}. \quad (17)$$

При выполнении условия (8)

$$v_m^* = -\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}m} \frac{V \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\left(1/\sqrt{\frac{k}{m}}m - \sqrt{\frac{k}{m}}/k\right)^2 + 1/r^2}} =$$

$$= -\frac{Vr}{\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \quad (18)$$

$$= -\frac{\sqrt{k/m}Vr}{\omega\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) =$$

$$= -\frac{Vr}{\omega m} \cos(\omega t - \varphi). \quad (19)$$

$$v_k^* = \frac{\sqrt{k/m}}{k} \frac{V \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{\left[1/(\sqrt{k/mm}) - \sqrt{k/m}/k\right]^2 + 1/r^2}} =$$

$$= \frac{Vr}{\sqrt{mk}} \cos(\omega t - \varphi) = \quad (20)$$

$$= \frac{\omega Vr \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{k/m}\sqrt{mk}} = \frac{\omega Vr}{k} \cos(\omega t - \varphi). \quad (21)$$

Выражения (18) и (20) показывают, что v_k^* и v_m^* равны и противоположны. (16) и (19), (17) и (21) показывают, что v_k^* и v_m^* максимальны. Теорема доказана.

Следствие 2.1. В первую (максвелловскую) систему электромеханических аналогий необходимо добавляется следующее дуально-инверсное соответствие – параллельное соединение потребителей электрической мощности при резонансе токов дуально последовательному соединению потребителей механической мощности при резонансе скоростей.

Следствие 2.2. При резонансе скоростей точка приложения силы к системе упругий элемент-инертное тело неподвижна, поскольку $v_k^* = -v_m^*$.

Следствие 2.3. Если $\sqrt{mk} < r$, то скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают скорость штока источника воздействия.

Пример 2. $V = 10 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, $r = 80 \text{ кг}\cdot\text{с}^{-1}$, остальные данные из примера 1. Найти v_k^* и v_m^* .

В соответствии с (19) и (21)

$$v_m^* = -\frac{10 \cdot 80}{2 \cdot 10} \cos(\omega t - \varphi) = -40 \cos(\omega t - \varphi) (\text{м}\cdot\text{с}^{-1}),$$

$$v_k^* = \frac{2 \cdot 10 \cdot 80}{40} \cos(\omega t - \varphi) =$$

$$= 40 \cos(\omega t - \varphi) (\text{м}\cdot\text{с}^{-1}).$$

Скорости, развиваемые инертным телом и упругим элементом, превышают скорость штока источника воздействия.

Артефакты

Существуют устройства в удовлетворительном приближении способные выполнять функции источников силы и источников скорости. Источником гармонической скорости может выступать привод с кривошипно-кулисным механизмом и маховиком с большим моментом инерции. Источником гармонической силы может выступать шток пневмоцилиндра, полость которого сообщается с полостью другого пневмоцилиндра с диаметром неизмеримо выше, чем у первого, а поршень совершает гармонические колебания.

В работе [11] описана механическая система из двух инертных тел и двух упругих элементов, для которой обнаружено "удивительное явление": точка приложения гармонической силы остается неподвижной. Это явление, казалось бы, очевидным образом названо *антирезонансом*. Степень неудачности этого термина можно оценить, применив его к резонансу токов в электротехнике.

В действительности упомянутая система представляет собой суперпозицию "элементарных" систем, рассмотренных выше. По этой причине процессы, происходящие в ней, являются суперпозицией соответствующих процессов, одним из которых и был резонанс скоростей, ошибочно принятый за "антирезонанс". При этом неподвижность точки приложения гармонической силы ("удивительное явление") соответствует следствию 2.2.

Заключение

Таким образом, можно сделать вывод, что описываемый в курсах теоретической механики механический резонанс является резонансом сил. Ему соответствует параллельное соединение инертного тела, упругого элемента и демпфера. При последовательном соединении этих элементов возникает резонанс скоростей.

Список литературы

1. *Полов И.П.* Применение символического (комплексного) метода для расчета сложных механических систем при гармонических воздействиях // Прикладная физика и

- математика. 2019. № 4. С. 14–24. DOI: 10.25791/pfim.04.2019.828.
2. Попов И.П. Механические аналоги реактивной мощности // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2015. № 3(30). С. 37–39.
 3. Попов И.П. О мерах механического движения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. № 3 (26). С. 13–15.
 4. Попов И.П., Парышев Д.Н., Ильтяков А.В., Моисеев О.Ю., Мосин А.А., Харин В.В. Механическая реактивная инерционная мощность // Естественные и технические науки. 2018. № 10 (124). С. 130–132.
 5. Попов И.П., Парышев Д.Н., Ильтяков А.В., Моисеев О.Ю., Мосин А.А., Харин В.В. Инерционная и полная мощности при периодических воздействиях // Естественные и технические науки. 2019. № 3 (129). С.183–186. DOI:10.25633/ETN. 2019.03.01.
 6. Попов И.П., Парышев Д.Н., Ильтяков А.В., Моисеев О.Ю., Харин В.В. Деформационная и полная мощности при периодических воздействиях // Естественные и технические науки. 2019. № 5(131). С. 165–168. DOI: 10.25633/ETN. 2019.05.10.
 7. Попов И.П. Мощность, развиваемая при механических гармонических воздействиях // Вестник Калужского университета. 2018. № 4. С. 86–89.
 8. Попов И.П. Комбинированные векторы и магнитный заряд // Прикладная физика и математика. 2018. № 6. С. 12–20. DOI:10.25791/pfim.06.2018.329.
 9. Попов И.П. Емкостно-инертное устройство // Известия Санкт-Петерб. гос. электротехн. ун-та "ЛЭТИ". 2015. Т. 2. С. 43–45.
 10. Попов И.П. Построение абстрактной модели силового поля типа электромагнитного // Наука. Инновации. Технологии: науч. журн. Северо-Кавказского Федер. ун-та. 2015. № 2, ч. 1. С. 41–54.
 11. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1987. 352 с.

Resonances of forces and velocities

I. P. Popov

Kurgan State University; 106–52, Tomina st., Kurgan, 640002, Russia
ip.popov@yandex.ru; 8 951-273-80-87

The definitions of resonances of forces and velocities are given. It is shown that with a parallel connection of an inert body, an elastic element and a damper, a resonance of forces may occur in the system. When these elements are connected in series, a velocity resonance may occur. The classic mechanical resonance is a resonance of forces.

Keywords: *resonance of forces; velocity resonance; parallel connection; series connection; source of force; velocity.*