

УДК 519.642

Приближенное решение одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных методом расширения пространства состояний

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

В работе для моделирования переходных процессов в эволюционных системах, описываемых нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерры в частных производных (ИДУвЧП), используется метод, основанный на аппроксимации ядер уравнений, расширении пространства состояний, что позволяет построить цепочку ДУвЧП без интегральных членов. Приведены результаты расчетов, выполненных в среде математического пакета *Mathematica*, для случая ядра, характерного для детерминированных вязкоупругих систем.

Ключевые слова: нелинейное уравнение; интегро-дифференциальное уравнение в частных производных; расширение пространства состояний; приближенное решение.

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-4-56-61

Введение

Интегро-дифференциальные уравнения – это класс уравнений, в которых неизвестная функция содержится как под знаком интеграла, так и под знаком производной. Если производная – частная, то соответствующее уравнение называется *интегро-дифференциальным уравнением в частных производных* (ИДУвЧП), иначе *обыкновенным ИДУ* (ОИДУ). Если система ИДУ состоит как из ОИДУ, так и ИДУвЧП, то она называется *гибридной*.

Если в эволюционном ИДУвЧП интеграл по всему или части пространства, то такое уравнение нередко называют ИДУвЧП типа Фредгольма, а если по времени, то как

правило, ИДУвЧП типа Вольтерры. Естественно, в научной литературе встречаются и смешанные ИДУвЧП типа Вольтерры–Фредгольма, а также другие структурные вариации.

Рассмотрим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}'_x(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{x}, t, \mathcal{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t, t_0)), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \quad t \in (t_0, T]; \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial \mathbb{D}; \quad (2)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}'_x(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \mathbb{D}, \quad t \in (t_0, T], \quad (3)$$

где

$$\mathcal{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t, t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{B}(\mathbf{x}, t, s) \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds; \quad (4)$$

t – время ($t_0 \leq t \leq T < +\infty$); $\mathbf{x} = \{x_i\} \in \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{R}^n$; $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u_i(\mathbf{x}, t)\}^T \in \mathbb{R}^m$ – неизвестное векторное поле (вектор состояния); $\mathbf{f}(\dots) = \{f_i(\dots)\}^T \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{h}(\dots) = \{h_i(\dots)\}^T \in \mathbb{R}^r$ и $\mathbf{B}(\dots) = \{b_{ij}(\dots)\}$ – известные векторные и матричная функции своих аргументов со свойствами, обеспечивающими существование и единственность решения задачи (1)–(3), причем $b_{ij}(\mathbf{x}, t) \geq 0$ для $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{D}}$ и $t \in [t_0, T]$.

Уравнения, подобные рассматриваемому, используются в моделях теплопроводности в материалах с памятью, (термо)вязкоупругости, популяционных моделях, экологии, радиофизике, фильтрации жидкости, сейсмических волн и др. [1–7]. Как правило, прямое исследование систем типа (1)–(3) невозможно. При этом основные трудности с изучением переходных режимов, описываемых моделями указанного типа, связаны с наличием интегрального члена.

Как правило, для аппроксимации такого члена применяют численные процедуры, например: 1) метод трапеций с интегрированием по времени в комбинации с обратным (неявным) методом Эйлера [8] (схема первого порядка точности); 2) интерполяцию по Эрмиту совместно с неявным линейным многошаговым методом численного интегрирования ОДУ, основанном на формуле обратного дифференцирования (BDF) (схема третьего порядка точности) и др. С другой стороны, имеются работы, где с помощью увеличения размерности векторов состояния интегро-дифференциальных систем, у которых элементы матричных ядер вырождены, исходные системы приводят к формам без интегральных членов, что позволяет для исследования полученных ДУВЧП применить известные точные и приближенные методы [9–11].

В данной работе для исследования переходных процессов в эволюционных системах, описываемых нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерры в частных производных (ИДУВЧП), используется модифицированная схема, ранее применявшаяся для моделирования уравнений иных классов [12–15] и основанная на аппроксимации ядер уравнений, расширении пространства состояний, что

позволяет построить цепочку ДУВЧП без интегральных членов. Приведены результаты расчетов, выполненных в среде математического пакета *Mathematica* [16], для случая ядра, характерного для детерминированных вязкоупругих систем.

1. Метод исследования

Рассмотрим схему приближенного сведения (без задания структуры ядра) системы (1)–(3) к ДУВЧП, основанную на процедуре интегрального расширения пространства состояния.

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ точками $t_k = t_0 + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots, K$, $h = (T - t_0)/M$ так, чтобы с достаточной точностью на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, $k \geq 1$ можно было заменить матричное ядро $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t, s)$ на семейство функций (средних значений на отрезках) $\widehat{\mathbf{B}}_k(\mathbf{x}, t)$, которые вычислим по формуле Симпсона:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{B}}_k(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t, s) ds \approx \\ &\approx \frac{1}{h} \frac{\Delta s}{3} \sum_{\ell=0}^{2K} c_\ell \mathbf{B}(\mathbf{x}, t, s_{k\ell}) = \\ &= \frac{1}{6K} \sum_{\ell=0}^{2K} c_\ell \mathbf{B}(\mathbf{x}, t, s_{k\ell}) \end{aligned}$$

(с точностью порядка $O(\Delta s)^4$), где

$$\begin{aligned} s_{k\ell} &= t_{k-1} + \ell \cdot \Delta s, \quad \ell = 0, 1, \dots, 2K, \\ h &= 2K \cdot \Delta s, \quad K \geq 1, \end{aligned}$$

$$c_\ell = \begin{cases} 1, & \ell = 0 \text{ или } \ell = 2K, \\ 2, & \ell - \text{четное число}, \\ 4, & \ell - \text{нечетное число}. \end{cases}$$

Таким образом, ядра $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t, s)$ представляются кусочно-постоянными по третьему аргументу матричными функциями. В результате этого система (1)–(3) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}'_x(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{x}, \\ &t, \widehat{\mathbf{Q}}_k(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t, t_{k-1})), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{D}, t \in (t_{k-1}, t_k]; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{k-1}) = \begin{cases} \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}), & k = 1, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{k-1}), & k > 1, \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \overline{\mathbb{D}}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}'_x(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{x}, t) &= 0, \\ \mathbf{x} \in \partial \mathbb{D}, \quad t \in (t_{k-1}, t_k], \quad (7) \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, \dots, M$;

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{Q}}_k(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t, t_{k-1}) &= \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \widehat{\mathcal{B}}_i(\mathbf{x}, t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds + \\ &\quad + \widehat{\mathcal{B}}_k(\mathbf{x}, t) \int_{t_{k-1}}^t \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds. \end{aligned}$$

Введем векторы:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \int_{t_{k-1}}^t \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds, \quad t_{k-1} < t \leq t_k, \quad (8)$$

удовлетворяющие начальным и краевым условиям вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t_{k-1}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \overline{\mathbb{D}}; \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial \mathbb{D}} &= \int_{t_{k-1}}^t \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial \mathbb{D}} ds. \end{aligned}$$

С учетом равенства (8) расширенная система (5)–(7), принимает форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}'_x(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{x}, \\ &\quad t, \widehat{\mathcal{Q}}_k^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, t, t_{k-1})); \\ \mathbf{h}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}'_x(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}''_{xx}(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{x}, t) &= 0; \\ \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t); \\ t_{k-1} < t \leq t_k, \quad k &= 1, 2, \dots, M, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{Q}}_k^*(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, t, t_{k-1}) &= \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \widehat{\mathcal{B}}_i(\mathbf{x}, t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds + \widehat{\mathcal{B}}_k(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, s). \end{aligned}$$

Если для $t_{k-1} < t \leq t_k$ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ обозначить соответственно через $\mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{v}_k(\mathbf{x}, t)$, то окончательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}'_{kx}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}''_{kxx}(\mathbf{x}, t), \\ &\quad \dots, \mathbf{x}, t, \widehat{\mathcal{Q}}_k^*(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{x}, t, t_{k-1})), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{D}; \\ \mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t_{k-1}) &= \begin{cases} \mathbf{u}^{[0]}(\mathbf{x}), & k = 1, \\ \mathbf{u}_{k-1}(\mathbf{x}, t_{k-1}), & k > 1, \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \overline{\mathbb{D}}; \\ \mathbf{h}(\mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}'_{kx}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}''_{kxx}(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{x}, t) &= 0, \\ &\quad \mathbf{x} \in \partial \mathbb{D}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{v}_k(t_{k-1}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k(\mathbf{x}, t) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial \mathbb{D}} &= \int_{t_{k-1}}^t \mathbf{u}_k(\mathbf{x}, s) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial \mathbb{D}} ds; \\ t_{k-1} < t \leq t_k, \quad k &= 1, 2, \dots, M, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{Q}}_k^*(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{x}, t, t_{k-1}) &= \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \widehat{\mathcal{B}}_i(\mathbf{x}, t_i) \mathbf{v}_i(\mathbf{x}, t_i) + \\ &\quad + \widehat{\mathcal{B}}_k(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}_k(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

2. Пример

Рассмотрим следующий, более общий, чем приведенный в работе [1], вид нелинейного уравнения в частных производных с распределенным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \epsilon \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \\ &+ \alpha u(x, t) + \beta u^3(x, t) + \gamma u^5(x, t) + \\ &+ \int_0^t \frac{\mu}{1 + (t-s)^2} u(x, s) ds \end{aligned} \quad (10)$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u^{[0]}(x), \quad u'_t(x, 0) = u^{[1]}(x), \\ u(-L, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\varepsilon > 0$, $\epsilon > 0$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\gamma < 0$, $\mu > 0$, $L > 0$ – некоторые постоянные. Интегральный член здесь учитывает эффект последействия, зависящий от прошлой истории состояния системы, причем этот эффект затухает полиномиально быстро во времени.

В этом случае система ДУВЧП (9) примет следующую форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_k(x, t)}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} &= \epsilon \frac{\partial^2 u_k(x, t)}{\partial x^2} + \\ &+ \alpha u_k(x, t) + \beta u_k^3(x, t) + \gamma u_k^5(x, t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} \widehat{\mathcal{B}}_i(t_i) v_i(x, t_i) + \widehat{\mathcal{B}}_k(t) v_k(x, t), \\ &\quad x \in (-L, L); \\ u_k(x, t_{k-1}) &= \begin{cases} u^{[0]}(x), & k = 1, \\ u_{k-1}(x, t_{k-1}), & k > 1, \end{cases} \\ &\quad x \in [-L, L]; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_k(x, t_{k-1})}{\partial t} = \begin{cases} u^{[1]}(x), & k = 1, \\ u'_{k-1,t}(x, t_{k-1}), & k > 1, \end{cases}$$

$$x \in [-L, L];$$

$$u_k(-L, t) = 0, \quad u_k(L, t) = 0;$$

$$\frac{\partial v_k(x, t)}{\partial t} = u_k(x, t), \quad v_k(t_{k-1}) = 0,$$

$$x \in (-L, L);$$

$$v_k(-L, t) = 0, \quad v_k(L, t) = 0;$$

$$t_{k-1} < t \leq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{B}_r(t) &= \frac{1}{h} \int_{t_{r-1}}^{t_r} \frac{\mu}{1 + (t-s)^2} ds = \\ &= \frac{\mu}{h} [\operatorname{arctg}(t - t_{r-1}) - \operatorname{arctg}(t - t_r)] = \\ &= \frac{\mu}{h} \operatorname{arctg} \frac{h}{1 + (t - t_r)(t - t_{r-1})}, \quad r \geq 1. \end{aligned}$$

При расчетах с применением изложенного метода в качестве входных данных использовались следующие значения и функции:

$$u^{[0]}(x) = 0.02(x+2)(x-2)(x-1)(x+1.5),$$

$$u^{[1]}(x) = 0, \quad L = 2,$$

$$T = 12, \quad M = 240, \quad \varepsilon = 0.1, \quad \epsilon = 0.01,$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0.25, \quad \gamma = -0.1, \quad \mu = 0.5.$$

Для решения полученной системы уравнений применялся метод прямых [17] (общее число уравнений на шаге равнялось 399) в сочетании с численным интегрированием получившейся системы ОДУ с автоматическим выбором шага (функция `NDSolve` пакета `МатнематиСа`). Для аппроксимации второй производной использовалась схема третьего порядка точности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &\approx [-u_{\ell-2}(t) + 16u_{\ell-1}(t) - \\ &- 30u_{\ell}(t) + 16u_{\ell+1}(t) - u_{\ell+2}(t)] / (12h_x^2) \end{aligned}$$

с соответствующими корректировками для крайних точек пространственной сетки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(-L + h_x, t)}{\partial x^2} &\approx [11u(-L_x, t) - 20u_1(t) + \\ &+ 6u_2(t) + 4u_3(t) - u_4(t)] / (12h_x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(-L + 2h_x, t)}{\partial x^2} &\approx [-u(-L_x, t) + 16u_1(t) - \\ &- 30u_2(t) + 16u_3(t) - u_4(t)] / (12h_x^2) \end{aligned}$$

(приведены формулы для левого края, для правого – по симметрии).

Результаты расчетов приведены на рис. 1 в виде линий уровня аппроксимации функции $u(x, t)$. Из рисунка несложно усмотреть, что рассматриваемое уравнение описывает затухающие колебания волны, причем узлы этой волны совпадают с узлами функции $u^{[0]}(x)$.

3. Заключение

В работе представлена схема исследования одного класса систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. В отличие от ряда других методов изложенная схема не использует прогноз для вычисления интегральных частей уравнений с целью их исключения, что обычно понижает точность решения. Данная схема может быть использована для анализа других классов систем ИДУВЧП эволюционного типа.

Список литературы

1. *Du A., Duan J.* A stochastic approach for parameterizing unresolved scales in a system with memory // *Journal of Algorithms & Computational Technology*. 2009. Vol. 3, № 3. P. 393–405.
2. *Francfort G.A., Suquet P.M.* Homogenization and mechanical dissipation in thermo-viscoelasticity // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1986. Vol. 96, № 3. P. 265–292.
3. *Frochte J.* A third order method for convection-diffusion equations with a delay term // *Numerical Mathematics and Advanced Applications: Proc. of the 7th European Conf. on Numerical Math. and Advanced Appl. (ENUMATH 2007, Graz, Austria, September 2007) / K. Kunisch, G. Of, O. Steinbach (eds.)*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. P. 281–288.
4. *Giorgi C., Marzocchi A., Pata V.* Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with memory // *Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA)*. 1998. Vol. 5, № 3. P. 333–354.
5. *Marchenko V.A., Khruslov E.Y.* Homogenization of partial differential equations. Boston: Birkhäuser, 2006. XIV, 402 p.

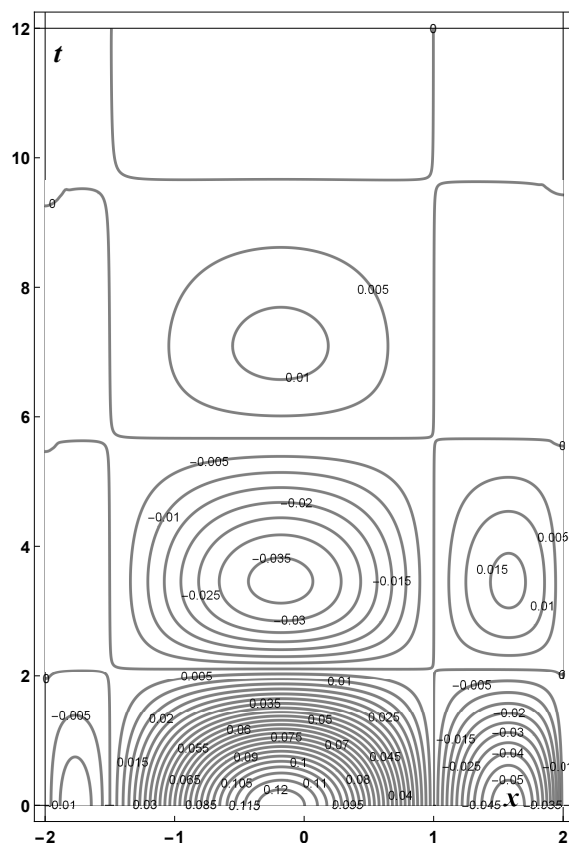


Рис. 1

6. Santos M.L. On the wave equations with memory in noncylindrical domains // Electronic Journal of Differential Equations. 2007. Vol. 2007, № 128. P. 1–18.
7. Wu J. Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer, 1996. X, 432 p.
8. Sloan H., Thomée V. Time discretization of an integro-differential equation of parabolic type // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1986. Vol. 23, № 5. P. 1052–1061.
9. Калиткин Н.Н. Численные методы: учеб. пособие. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
10. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 384 с.
11. Quarteroni A. Numerical models for differential problems. Milan: Springer, 2014. XIX, 656 p.
12. Полосков И.Е. Об одном методе приближенного анализа линейных стохастических интегро-дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 9. С. 1276–1279.
13. Полосков И.Е. О расчете первых моментов линейных интегро-дифференциальных систем с параметрическими возмущениями // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2006. Вып. 38. С. 133–142.
14. Полосков И.Е. Схема расширения вектора состояния для решения интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Вестник Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 2 (21). С. 59–65.
15. Полосков И.Е. Интегральное расширение пространства состояний в задачах анализа вязкоупругих систем // Вестник Пермского ун-та. Информационные системы и технологии. 2018. Вып. 1. С. 52–58.
16. Mangano S. Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly, 2010. XXIV, 800 p.
17. Zafarullah A. Application of the method of lines to parabolic partial differential equations with error estimates // Journal of the ACM (JACM). 1970. Vol. 17, № 2. P. 294–302.

An approximate solution of a class of nonlinear partial integro-differential equations by the method of expanding the state space

I. E. Poloskov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
polosk@psu.ru; (342) 239 65 60

In this paper, to simulate transient regimes in evolutionary systems described by non-linear partial integro-differential equations of Volterra type (PIDEs), we use the method based on approximation of kernels of equations, expanding the state space that allows us to construct a chain of PIDEs without integral terms. The results of calculations performed in the environment of the *it* Mathematica mathematical package are demonstrated for the case of a kernel that is specific for deterministic viscoelastic systems.

Keywords: *nonlinear equation; partial integro-differential equation; expansion a state space; approximate solution.*