УДК 531.381

Перманентные вращения твердого тела в обобщенном силовом поле

Н. Н. Макеев
Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

На основе обобщенной модели динамики твердого тела проведено исследование свойств его перманентных вращений, реализующихся в силовом поле общего вида. Рассмотрены некоторые частные случаи перманентных движений.

Ключевые слова: *абсолютно твердое тело; обобщенное силовое поле; перманентное вращение; геометрия перманентного движения.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-4-49-55

Введение

Актуальной задачей теории динамики твердого тела является задача о движении абсолютно твердого тела вокруг неподвижного полюса в некотором сложном по структуре силовом поле (обобщенном силовом поле). Компонентами этого поля могут являться: классическое потенциальное поле, магнитные поля различной природы (поле магнитного диполя; поля, порожденные эффектами Барнетта [1, 2] или Лондонов [2]), поле сил Лоренца [3, 4], а также силовые воздействия гироскопического характера [5, с. 80].

Динамика твердого тела в подобного рода силовых полях сложной структуры является предметом исследования *обобщенной* ("*абстрактной*" [6, 7]) *теории динамики*, являющейся одним из фундаментальных направлений современной механики.

Несмотря на абстрактность и высокую степень обобщенности, многие применения этой теории имеют вполне естественное и конкретное физическое содержание. В частности, классические уравнения Пуанкаре–Ламба–Жуковского [8, 9] содержатся в системе динамических уравнений Эйлера для конфигурационного пространства SO(4) [10], описывающих свободное вращение четырехмерного твердого тела вокруг неподвижного полюса. Уравнения этой задачи могут являться определенными модельными приближениями при описании геодинамических процессов взаимодействия твердой мантии Земли с ее жидким центральным ядром [11].

Динамические уравнения Эйлера в пространстве SO(4) рассматривались также в работах [12, 13] в связи с исследованием динамики взаимодействующих спинов во внешнем силовом поле, а также в работе [14].

В приложениях обобщенной теории динамики используется общая форма гироскопических и потенциальных сил, при которой уравнения движения тела сохраняют свойства интегрируемости, характерные для классических задач механики. Эти свойства обусловлены структурно-динамической симметрией механических систем [7].

1. Обобщенная динамическая система и первые интегралы

Пусть абсолютно твердое тело движется относительно неподвижного полюса O под воздействием потенциальных, соленоидальных и гироскопических сил. В качестве соленоидальных силовых полей рассматриваем магнитные поля различной природы. Такого рода суперпозицию силовых полей назовем *обобщенным силовым полем* (ОСП).

Введем неподвижный координатный ба-зис $Z(Oz_1z_2z_3)$ и главный координатный ортобазис X $(Ox_1x_2x_3)$, неизменно связанный с телом, оси Ox_j которого направлены по главным в полюсе O осям тензора инерции тела $\mathbf{A} = diag\,(A_1, A_2, A_3)$. Обозначим: $\mathbf{s} = [s_1\ s_2\ s_3]^T$ – орт, неизменно связанный с базисом Z, заданный координатами в базисе X; $U(\mathbf{s})$ – силовая функция потенциального поля; $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1\ \omega_2\ \omega_3]^T$ – мгновенная абсолютная угловая скорость твердого тела. Здесь и всюду далее все координатные элементы заданы в осях базиса X.

Введем характерные функции [7]:

$$U(\mathbf{s}),\quad F(\mathbf{s}),\quad f(\mathbf{s})\,, \tag{1}$$

заданные на сфере Римана $\|\mathbf{s}\|^2 = 1$, такие, что $(U, f) \in C^1(\mathbf{s})$, $F \in C^0(\mathbf{s})$, где C^r – символ класса гладкости порядка $r = 0,1,2,\ \ldots$ данной функции. Здесь F, f – заданные величины с размерностью кинетического момента.

Движение твердого тела в ОСП при данных предпосылках определяется системой уравнений, отнесенных к ортобазису X:

$$\begin{gathered}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Phi}) = U_{\mathrm{s}}\times\mathbf{s},\\ \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{s} = 0,\end{gathered} \tag{2}$$

где обозначено:

$$\boldsymbol{\Phi} = F\mathbf{s} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}},\qquad U_{\mathrm{s}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}}.$$

Динамическая система (2), обладающая полем симметрии (термин [15]), в дальнейшем называется *обобщенной динамической системой* (ОДС) или системой уравнений М.П. Харламова [7]. В этой системе вектор $\boldsymbol{\Phi}$ обусловливает гироскопическое воздействие на твердое тело, поскольку $(\boldsymbol{\Phi}\times\boldsymbol{\omega})\,\boldsymbol{\omega} = 0$.

Для ОДС (2) имеют место первые алгебраические интегралы [7]:

$$\begin{gathered}J_1 \equiv \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}) - U(\mathbf{s}) = h_1,\\ J_2 \equiv (\mathbf{s}\cdot\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}) + f(\mathbf{s}) = h_2,\end{gathered} \tag{3}$$

$$J_3 \equiv (\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}) = 1, \tag{4}$$

где h_1, h_2 – постоянные интегрирования.

Интерпретация интегралов системы (3), (4) приведена в работе [16].

Уравнения ОДС (2) в проекциях на оси координатного базиса X имеют вид

$$\begin{aligned}A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 + \Phi_3\omega_2 - \Phi_2\omega_3 &=\\ = U_2 s_3 - U_3 s_2\,,&\end{aligned} \tag{5}$$

$$\dot{s}_1 = \omega_3 s_2 - \omega_2 s_3 \qquad (1,2,3),$$

где обозначено

$$\Phi_j(\mathbf{s}) = F(\mathbf{s})s_j + \frac{\partial f}{\partial s_j},\quad U_j(\mathbf{s}) = \frac{\partial U}{\partial s_j}\quad (j = 1,2,3).$$

Здесь и всюду далее принимается, что все величины U_j ограничены; символ (1, 2, 3) обозначает циклическую перестановку индексов 1, 2, 3, отнесенных к данным величинам.

Система основных уравнений (5) аналитически замкнута относительно всех переменных ω_j, s_j $(j = 1,2,3)$.

Возможные конкретные формы задания функций (1) приведены в работе [7]; при этом характерно, что для функции F в этой работе принято условие $F(\mathbf{s}) \equiv 0$.

2. Геометрия осей перманентных вращений

Пусть $\mathbf{e}\,(e_1, e_2, e_3)$ − орт *оси перманентного вращения* (ОПВ). Реализованная ОПВ должна быть неподвижна относительно каждого из базисов Z, X, так что $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}$, где ω − ненулевая скорость перманентного вращения тела, $\mathbf{e} = \mathrm{const}$. Здесь $\omega = \mathrm{const} \neq 0$ − угловая скорость перманентного вращения тела, а равенство

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{s}$$

определяет множество перманентных вращений тела относительно орта $\mathbf{s}$ со скоростями $|\boldsymbol{\omega}| = \omega$. В этом равенстве значения $\omega > 0$ соответствуют "прямому" перманентному вращению, а значения $\omega < 0$ – "обратному". Данное уравнение определяет ориентацию ОПВ в конфигурационном пространстве (s-пространстве параметров s_j).

При перманентном движении ОДС (5) принимает вид

$$\begin{aligned}A_1 e_1\dot{\omega} + (A_3 - A_2)\omega^2 e_2 e_3 + \omega(\Phi_3 e_2 - \Phi_2 e_3) &=\\ = U_2 s_3 - U_3 s_2\,,&\end{aligned} \tag{6}$$

$$\dot{s}_1 = \omega\,(e_3 s_2 - e_2 s_3) \qquad (1, 2, 3),$$

а первые интегралы (3), (4) принимают вид

$$\begin{gathered}\omega^2(\mathbf{e}\cdot\mathbf{A}\mathbf{e}) - 2U(\mathbf{s}) = 2h_1,\\ \omega\,(\mathbf{s}\cdot\mathbf{A}\mathbf{e}) + f(\mathbf{s}) = h_2,\end{gathered} \tag{7}$$

$$(\mathbf{e}\cdot\mathbf{s}) = h_3,\quad |\mathbf{s}|^2 = 1, \tag{8}$$

где $h_j\ (j = 1, 2, 3)$ − постоянные интегрирования.

Исключая параметр ω из системы уравнений (7), в результате получаем

$$2[h_1 + U(\mathbf{s})](\mathbf{s}\cdot\mathbf{Ae})^2 = \\ = [h_2 - f(\mathbf{s})]^2(\mathbf{e}\cdot\mathbf{Ae}). \qquad (9)$$

Из уравнений (6) для ОПВ имеем $\mathbf{s} = \mathbf{e}$. Уравнения (8), (9), определяющие эти величины, устанавливают их постоянность относительно каждого из базисов Z, X. Из системы первых интегралов (7) получаем ω = const. В силу этого система (6) при $\delta = e_1e_2e_3 \neq 0$ порождает соотношения

$$L_1 \equiv (A_3 - A_2)\omega^2 + \omega G(\Phi_3, \Phi_2) + \\ + F(U_3, U_2) = 0 \qquad (1, 2, 3), \qquad (10)$$

где обозначено

$$G(\Phi_j, \Phi_k) = \Phi_j e_j^{-1} - \Phi_k e_k^{-1},$$
$$F(U_j, U_k) = U_j e_j^{-1} - U_k e_k^{-1}$$
$$((j, k) = 1, 2, 3;\ j \neq k),$$
$$U_j = U_j(\mathbf{e}) \quad (j = 1, 2, 3).$$

Составляя комбинацию $\Sigma\, L_j U_j$, где j = 1, 2, 3, согласно системе (10) получаем уравнение с параметром ω:

$$\sum_{j=1}^{3}[(A_{j+2} - A_{j+1})\omega + G(\Phi_{j+2}, \Phi_{j+1})]\cdot \\ \cdot U_j e_{j+1} e_{j+2} = 0, \qquad (11)$$

определяющее в пространстве координат e_j (*e-пространстве*) некоторую поверхность.

К равенству (11) следует присоединить нормированное условие

$$|\mathbf{e}|^2 = 1. \qquad (12)$$

В соотношении (11) и всюду далее значения числовых индексов всех величин не должны превышать числа n = 3, что в ином случае достигается вычитанием из значения индекса числа 3.

Уравнения (11), (12) определяют *многообразие ОПВ* твердого тела. В e-пространстве точка $N(e_1, e_2, e_3)$ должна находиться одновременно на поверхности (11) и на единичной сфере (12). Вследствие этого геометрическим множеством точек $\{N\}$ является линия взаимного пересечения этих поверхностей − *сферическая кривая* S, расположенная в e-пространстве на несущей для ОПВ поверхности – линейчатой поверхности, образующими которой являются ОПВ.

В частном случае, при котором тело находится в однородном или в центральном ньютоновском стационарных силовых полях, поверхность (11) при условии

$$\mathbf{e} = -F^{-1}(\mathbf{e})\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}} \qquad (13)$$

является *конусом ОПВ* (*конусом Штауде*) [17; 18, с. 144] с уравнением

$$\sum_{j=1}^{3} r_j (A_{j+1} - A_{j+2}) e_{j+1} e_{j+2} = 0,$$

где r_j $(j = 1, 2, 3)$ − координаты центра тяжести тела в базисе X. Условие (13) эквивалентно ограничению $\mathbf{\Phi}(\mathbf{e}) = 0$.

Если выполняются условия

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}U_2 - \frac{\partial f}{\partial e_2}U_1 = 0 \qquad (1, 2, 3), \qquad (14)$$

то сфера (12) и несущая поверхность (11) имеют общие симметрично расположенные нормированные точки:

$$(Q_1, Q_2, Q_3) = [(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)],$$

соотнесенные к главным осям инерции тела.

Равенства (14) по структуре являются *скобками Пуассона* (коммутаторами) функций f, U, заданных на симплектическом многообразии как производные функции f по направлению фазового потока с функцией U [19].

Отметим, что характерная точка ОПВ:

$$Q_4(P_1, P_2, P_3), \quad P_j = A_j U_j K$$
$$(j = 1, 2, 3), \quad K = \pm\left[\sum_{j=1}^{3}(A_j^{-1}U_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (15)$$

имеет координаты, удовлетворяющие уравнению (11), если выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{3} A_j (A_{j+1} - A_{j+2})\Phi_j U_{j+1} U_{j+2} = 0,$$

определяющее в e-пространстве в общем случае (при $A_j \neq A_{j+1}$) некоторую невырожденную поверхность.

В случае, при котором на сфере (12) имеется точка $Q_5(e_1^*, e_2^*, e_3^*)$, являющаяся стационарной для функции U, ее координаты также удовлетворяют уравнению (11).

Каждой точке сферической кривой S, расположенной на поверхностях (11), (12), соответствует ось, которая является ОПВ, если для текущих координат этой кривой в силу соотношений (10) выполняются условия

$$G^2(\Phi_3, \Phi_2) - 4(A_3 - A_2)F(U_3, U_2) > 0 \quad (1, 2, 3). \tag{16}$$

Ограничения (16) непосредственно следуют из соотношений (10) при выполнении условия $\omega^2 > 0$. В частности, если ввести дополнительные условия

$$G(\Phi_j, \Phi_k) = 0 \ \left((j, k) = 1, 2, 3;\ j \neq k\right), \tag{17}$$

то условия существования ОПВ при всех не равных между собой значениях A_j (j = 1, 2, 3) принимают вид

$$\omega^2 = (A_{j+1} - A_j)^{-1} F(U_j, U_{j+1}) > 0 \quad (j = 1, 2, 3). \tag{18}$$

Отметим, что к условиям (18) можно применить истолкование, сходное с интерпретацией ограничений (14). Помимо этого, согласно соотношениям (18), при стремлении текущей точки несущей поверхности к любой из ее точек Q_j $(j = 1, 2, 3)$ значения величины ω^2 неограниченно возрастают. Это означает, что главные оси инерции тела не могут являться ОПВ в общем случае. Вместе с тем, в точке Q_5 тело находится в положении статического равновесия.

Предположим, что одна из точек Q_1, Q_2, Q_3, находящихся на кривой S, совпадает с точкой Q_5 (например, это − точка Q_1). Тогда при выполнении условий (17) главная ось инерции Ox_1, согласно уравнению (10), является ОПВ тела с произвольной скоростью вращения ω. В случае, при котором какая-либо главная ось инерции тела является ОПВ, имеем потенциальную функцию $U(\mathbf{e})$ такую, что выполняется условие

$$U_j = s_j \varphi_j(\mathbf{s}) \qquad (j = 1, 2, 3),$$

где φ_j − ограниченные функции класса C^1.

Для характерной точки Q_4 сферической кривой S из соотношений (18) находим:

$$\omega^2 = \pm K,$$

где величина K определяется равенством (15). Следовательно, перманентные вращения тела существуют только для осей, проходящих через точку Q_4 и соответствующих знаку "минус" в равенстве (15).

3. Частные случаи существования осей перманентных вращений

Рассмотрим некоторые частные случаи существования ОПВ в ОСП, определяемые структурно-динамической симметрией тела или структурой силового поля.

3.1. *Случай осевой кинетической симметрии твердого тела*

Положим $A_1 = A_2 \neq A_3$. Тогда из соотношений (10) следует

$$(A_3 - A_1)\omega^2 + \omega G(\Phi_3, \Phi_2) + F(U_3, U_2) = 0,$$
$$(A_1 - A_3)\omega^2 + \omega G(\Phi_1, \Phi_3) + F(U_1, U_3) = 0,$$
$$\omega G(\Phi_2, \Phi_1) + F(U_2, U_1) = 0, \tag{19}$$

а из равенства (11) получаем

$$[(A_3 - A_1)\omega F(U_1, U_2) + \sum_{j=1}^{2} U_j e_j^{-1} \cdot$$
$$\cdot G(\Phi_{j+2}, \Phi_{j+1})]e_3 + U_3 G(\Phi_2, \Phi_1) = 0. \tag{20}$$

Если выполняются ограничения (17), то соотношения (19) упрощаются, а равенство (20) принимает вид

$$F(U_1, U_2)e_3 = 0. \tag{21}$$

Согласно равенству (21), характерная поверхность (11) в e-пространстве распадается на плоскость

$$e_3 = 0 \tag{22}$$

и поверхность

$$F(U_1, U_2) = 0. \tag{23}$$

Таким образом, геометрическое значение данных равенств состоит в том, что они устанавливают условия распадения поверхности (11), определяющей совместно со сферой (12) многообразие ОПВ тела для ОДС (5).

Пусть выполняется ограничение (22). Тогда, согласно условиям (19), представленном для $G \equiv 0$, заключаем, что каждая ОПВ $(e_1, e_2, 0)$ плоскости (22) с условием (23) является ОПВ с произвольным значением величины скорости ω, если выполняется дополнительное условие $U_3 = 0$. Условие (23) для главной оси инерции Ox_1 имеет место, если $U_2 = 0$, а для оси Ox_2 − если выполняется ограничение $U_1 = 0$.

Рассмотрим теперь случай, при котором $e_3 \neq 0$. Здесь возможные ОПВ реализуются со значением скорости ω, удовлетворяющем при $A_1 = A_2 \neq A_3$ условиям

$$\begin{aligned}(A_3 - A_1)\,\omega^2 &= F(U_1, U_3) = \\ &= F(U_2, U_3) > 0,\end{aligned} \tag{24}$$

непосредственно вытекающем из ограничений (19).

Согласно условиям (24), $U_1 = U_2$ и перманентное вращение тела со скоростью ω существует, если выполняется одна из групп следующих ограничений:

$$A_3 > A_1,\quad W_3 < \min\,(W_1, W_2),$$
$$A_3 < A_1,\quad W_3 > \max\,(W_1, W_2).$$

В частном случае, при котором выполняются условия (17) и $U_1 = U_2 \equiv 0$, в силу соотношений (19) заключаем, что главная ось инерции тела Ox_3 является ОПВ с произвольными значениями скорости ω.

3.2. *Случай полной кинетической симметрии тела*

Если $\mathbf{A} = A\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ − единичная матрица формата 3×3, то из соотношений (10) следует, что единственными ОПВ тела являются оси, соответствующие нормалям к эквипотенциальной поверхности силового поля или ее стационарным точкам. При этом должны выполняться ограничения (17).

3.3. *Случаи силовых полей размерности меньше трех*

Пусть вне зависимости от ограничений, принятых в пункте 3.1, и условий кинетической симметрии силовая функция данной задачи имеет вид $U = U(s_1, s_2)$, относящийся к силовому полю размерности "два". Обозначая

$$W_j = U_j\, e_j^{-1},\quad V_k = \Phi_k\, e_k^{-1}\quad \big((j,k) = 1, 2, 3\big)$$

и полагая в динамических уравнениях системы (6) $s_j = e_j$ $(j = 1, 2, 3)$ с учетом условий $e_1 e_2 \neq 0,\, U_3 \equiv 0$, представим эти уравнения в виде

$$\begin{aligned}&[(A_3 - A_2)\omega^2 - (W_2 + \omega V_2)]e_3 + \omega\Phi_3 = 0,\\ &[(A_1 - A_3)\omega^2 + (W_1 + \omega V_1)]e_3 - \omega\Phi_3 = 0,\\ &(A_2 - A_1)\omega^2 + \omega G(\Phi_2, \Phi_1) + F(U_2, U_1) = 0.\end{aligned} \tag{25}$$

Подобным же образом в силу системы уравнений (6) представим аналог комбинационного равенства типа (11):

$$\begin{aligned}&\{\omega[(A_3 - A_2)W_1 + (A_1 - A_3)W_2] +\\ &+ G(\Phi_3, \Phi_2)W_1 + G(\Phi_1, \Phi_3)W_2\}e_3 = 0.\end{aligned} \tag{26}$$

В частном случае, при котором выполняются условия (17) (которые применяются всюду далее, если иное не оговорено), согласно соотношениям (25), (26) получаем

$$\begin{aligned}&[(A_3 - A_2)\,\omega^2 - W_2]e_3 = 0,\\ &[(A_1 - A_3)\,\omega^2 + W_1]e_3 = 0,\\ &(A_2 - A_1)\,\omega^2 + F(U_2, U_1) = 0,\\ &\omega[(A_3 - A_2)W_1 + (A_1 - A_3)W_2]e_3 = 0.\end{aligned} \tag{27}$$

Согласно равенствам (27) в зависимости от выбора значений $e_3 = 0$ или $e_3 \neq 0$ несущая поверхность (11) распадается на плоскость (22) и характерную поверхность в e-пространстве

$$(A_3 - A_2)U_1 e_2 + (A_1 - A_3)U_2 e_1 = 0. \tag{28}$$

При $e_3 = 0$ в силу равенств (27) возможные ОПВ и соответствующие им величины скорости ω при $A_1 \neq A_2$ ограничены условием

$$\omega^2 = (A_2 - A_1)^{-1} F(U_1, U_2) > 0. \tag{29}$$

При этом, согласно условию (29), перманентное вращение тела имеет место, если $W_1 > W_2$ при $A_1 < A_2$ или $W_1 < W_2$ при $A_1 > A_2$. Из условия (29) также следует, что главная ось инерции Ox_1 (или Ox_2) является ОПВ, если $U_2 = 0$ (или если $U_1 = 0$, соответственно).

В случае, при котором $e_3 \neq 0$, возможная ОПВ должна удовлетворять условию (28), а величина скорости ω, согласно равенствам (27), определяется ограничениями

$$\begin{aligned}\omega^2 &= (A_3 - A_1)^{-1}W_1 = (A_3 - A_2)^{-1}W_2 =\\ &= (A_2 - A_1)^{-1}F(U_1, U_2) > 0.\end{aligned} \tag{30}$$

В соотношениях (30) значения всех величин A_j не равны между собой; при этом перманентное вращение тела необходимо существует, если выполняется какая-либо из следующих групп условий:

$$A_1 < A_2 < A_3,\quad 0 < W_2 < W_1,$$
$$A_3 < A_2 < A_1,\quad W_1 < W_2 < 0,$$
$$(A_1 > A_3,\, W_1 < 0) \vee (A_1 < A_3,\, W_1 > 0).$$

Если $U_1 = U_2 = 0$, то ось инерции тела Ox_2 соответствует стационарной точке силовой функции $U(s_1, s_2)$ и является ОПВ тела с произвольной величиной скорости ω.

В случае *одноразмерного* силового поля, например, при $U = U(s_1)$, имеем $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ и, согласно соотношениям (10), вне условий (17) получаем

$$[(A_3 - A_2)\omega^2 + \omega G(\Phi_3, \Phi_2)]e_2 e_3 = 0, \quad (31)$$

$$[(A_1 - A_3)\omega^2 + W_1 + \omega G(\Phi_1, \Phi_3)]e_3 e_1 = 0,$$

$$[(A_2 - A_1)\omega^2 - W_1 + \omega G(\Phi_2, \Phi_1)]e_1 e_2 = 0.$$

Из системы уравнений (31) при $\delta \neq 0$ и условиях (17) (которые принимаются и далее) непосредственно следует $A_2 = A_3$.

В дальнейшем предполагается выполнение всех ограничений (17).

Если заданы условия $e_2 \neq e_3 = 0$, то ось инерции Ox_1 является ОПВ тела с произвольными значениями параметра ω.

В случае, при котором $e_1 e_3 \neq 0$, $e_2 = 0$, параметр ω для ОПВ тела, согласно равенствам (31), определяется условием

$$\omega^2 = (A_3 - A_1)^{-1} W_1 > 0. \quad (32)$$

При этом, если $U_1 = 0$, то ось инерции тела Ox_3 является ОПВ с произвольной величиной угловой скорости.

Пусть $e_j \neq 0 \ (j = 2, 3)$. Тогда при условии $A_2 \neq A_3$ вместо перманентного вращения имеет место только состояние статического равновесия тела при условии $U_1 = 0$. В случае, при котором $A_2 = A_3$ возможные ОПВ тела и параметр ω также определяются условием (32). При этом, если $e_1 = U_1 = 0$, то в этом же случае для каждой из ОПВ тела $(0, e_2, e_3)$ величина параметра ω является произвольной.

Заключение

Перманентные вращения твердого тела являются составной частью общего многообразия стационарных движений, соответствующей определенной группе невырожденных преобразований Лежандра с нулевой или единичной размерностью их ядра [20]. При этом подход, основанный на применении построенной в работах [6, 7] обобщенной модели динамики открывает новые возможности для исследования свойств перманентных движений.

Перманентные вращения тела определяются необходимыми условиями стационарности по переменным q_j:

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = u_j = 0 \quad (j = 1, \dots, 6), \quad (33)$$

где V − связка первых интегралов (3), (4):

$$V(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}) = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k J_k, \quad (34)$$

λ_k − постоянные множители Лагранжа.

Систему уравнений (33) можно трактовать как множество преобразований Лежандра вида $\{q_j\} \to \{u_j\}$, параметризованное величинами λ_k $(k = 1, 2, 3)$. В исходных переменных это множество совпадает с ядром данного преобразования. Здесь { … } − символ полного множества указанных величин.

Выражение (34) можно истолковать как линейное пространство первых интегралов (3), (4), принимаемых за базисные [20].

Список литературы

1. *Вонсовский С.В.* Магнетизм. М.: Наука, 1971. 1032 с.
2. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Физматгиз, 1963. 696 с.
3. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1966. 624 с.
4. *Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.* Механика // Берклеевский курс физики. М.: Наука, 1971. Т. 1. 479 с.
5. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел / пер. с англ. М.: Мир, 1980. 294 с.
6. *Харламов М.П.* О некоторых применениях дифференциальной геометрии в теории механических систем // Механика твердого тела. Киев, 1979. Вып. 11. С. 37–49.
7. *Харламов М.П.* Симметрия в системах с гироскопическими силами // Механика твердого тела. Киев, 1983. Вып. 15. С. 87–93.
8. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. 928 с.
9. *Арнольд В.И. и др.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики: фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
10. *Веселов А.П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на SO(4) // Докл. Академии наук СССР. 1983. Т. 270, № 6. С. 1298–1300.

11. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет. М.: Мир, 1976. Т. 2. 483 с.
12. *Srivastava N. and others.* Classical spin clusters: Integrability and dynamical properties // Journal of Applied Physics. 1987. Vol. 61, № 8. P. 4438–4440.
13. *Srivastava N. and others.* Integrable and non-integrable classical spin clusters // Zeitschrift fur Physik B. Condensed Matter. 1988. Vol. 70, № 2. P. 251–268.
14. *Bogoyavlensky O.I.* Integrable Euler Equations SO(4) and their Physical Applications // Communications in Mathematical Physics. 1984. Vol. 93. P. 417–436.
15. *Козлов В.В.* Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1995. 431 с.
16. *Макеев Н.Н.* Верификация обобщенной модели динамики твердого тела // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 3(7). С. 35−41.
17. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики: в 2 т., 4 ч. М.: Изд-во иностр. лит. 1951. Т. 2, ч. 2. 556 с.
18. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.
19. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
20. *Иртегов В.Д.* О смене устойчивости при бифуркациях // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением: сб. науч. тр. Новосибирск: Наука (Сибирск. отд.), 1991. С. 73–79.

Permanent rotations of a rigid body in the generalized field of force

N. N. Makeyev
Problems of Precision Mechanics and Control Institute Russian Academy of Sciences
24, Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Based on the generalized model of a rigid body dynamics, the research investigates the properties of the body's permanent rotations realized in a force field of the general form. Some special cases of permanent movements are considered.

Keywords: *perfectly rigid body; generalized force field; permanent rotation; geometry of permanent motion.*