

УДК 004.9

Проектирование композитных стрингерных пластин

А. Ш. Кусяков

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

kusyakov@psu.ru; 89026354772

Исследуется проблема оптимального проектирования композитной стрингерной пластины, находящейся под действием сжимающих нагрузок. Установлено, что задача оптимального проектирования для рассматриваемого класса конструкций может иметь более одного решения. Приведены результаты численного анализа, позволяющие оценить эффективность использования стрингерных пластин по сравнению с аналогичными конструкциями без подкрепляющих элементов.

Ключевые слова: композит; пластина; устойчивость; прочность; проектирование.

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-4-44-48

Введение

Для композитных пластин, находящихся под действием сжимающих нагрузок, уменьшение массы конструкции может быть достигнуто не только путем варьирования числа слоев определенного типа, но и за счет введения в конструкцию пластины ребер жесткости.

Наиболее значимые результаты исследований в области оптимального проектирования подкрепленных конструкций из изотропного материала, представлены в работах [1, 2, 5, 9, 10, 12]. Методы расчета и оптимального проектирования композитных конструкций, подкрепленных ребрами жесткости, приведены, например, в работах [3, 4, 11, 13, 14]. Общий алгоритм оптимального проектирования ребристых композитных пластин, подверженных действию сжимающих нагрузок, представлен в статье [8].

В работе исследуется проблема эффективности пластин, подкрепленных продольными ребрами жесткости (стрингерами), по сравнению с аналогичными конструкциями без подкрепляющих элементов.

При оценке эффективности подкрепленной пластинки используется общий алгоритм оптимального проектирования [8].

1. Постановка задачи

Многослойная пластинка длиной a и шириной b , подкрепленная регулярным набором продольных ребер (стрингеров), находится под действием сжимающих нагрузок q .

Требуется при заданных габаритных размерах и величине сжимающей нагрузки подобрать параметры конструкции так, чтобы при сохранении устойчивости и прочности подкрепленная пластинка обладала минимальной массой (рис. 1, 2).

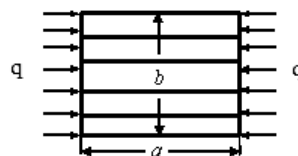


Рис. 1. Стрингерная пластинка

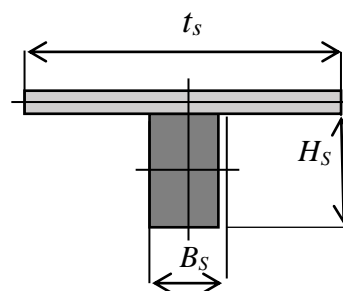


Рис. 2. Элемент стрингерной пластины

Введем обозначения:

h – толщина пластинки;

t_s, H_s, B_s – шаг, высота и ширина ребра соответственно;

t_s, H_{sm} – максимально возможная по условиям технологии высота стрингеров;

h_s – условная "толщина" стрингеров

$$h_s = \frac{B_s H_s}{t_s};$$

h_f – полная условная "толщина" подкрепленной пластины $h_f = h + h_s$;

γ – относительная толщина полотна пластинки $\gamma = \frac{h}{h_f}$;

E_1, E_2 – модули упругости вдоль и поперек волокон материала пластинки соответственно;

ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона материала пластинки;

G_{12} – модуль сдвига материала пластинки;

$b_{11}, b_{22}, b_{12}, b_{33}$ – компоненты матрицы жесткости монослоя

$$b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$b_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad b_{33} = G_{12};$$

$D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_G$ – изгибные жесткости полотна пластины;

$C_{xx}, C_{yy}, C_{xy}, C_G$ – мембранные жесткости полотна пластины;

E_s – модуль Юнга материала продольных ребер.

В дальнейших рассуждениях предполагается, что полотно пластинки и ребра изготовлены из одного и того же материала.

В этом случае, с точностью до произведения коэффициентов Пуассона, имеем:

$$E_s = b_{11}.$$

2. Критические нагрузки

Критическую нагрузку, соответствующую общей форме потери устойчивости, будем определять по известной формуле для

ортотропной пластинки бесконечной ширины с "приведенными" изгибными жесткостями:

$$q_{cr} = D_{xx}^{(p)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \quad (1)$$

где

$$D_{xx}^{(p)} = D_{xx} + \frac{E_s J_s}{t_s} + \frac{C_{xx} E_s h_s}{C_{xx} + E_s h_s} e_s^2; \quad (2)$$

$$J_s = \frac{F_s H_s^2}{12}, \quad e_s = \frac{h + H_s}{2}, \quad F_s = B_s H_s. \quad (3)$$

Если полотно подкрепленной пластины состоит только из продольных монослоев, "приведенная" изгибная жесткость может быть представлена в виде

$$D_{xx}^{(p)} = D_f \left(\gamma^3 + (1 - \gamma)r_H^2 + 3\gamma(1 - \gamma)(r_H + \gamma)^2 \right). \quad (4)$$

Здесь

$$D_f = \frac{b_{11} h_f^3}{12}, \quad r_H = \frac{H_s}{h_f}. \quad (5)$$

Подставив выражение (4) в формулу (1), получим

$$q_{cr} = q_f \left(\gamma^3 + (1 - \gamma)r_H^2 + 3\gamma(1 - \gamma)(r_H + \gamma)^2 \right). \quad (6)$$

где

$$q_f = D_f \left(\frac{\pi}{a} \right)^2. \quad (7)$$

Критическую нагрузку, соответствующую местной форме потери устойчивости, будем вычислять по классической формуле для ортотропной пластинки:

$$q_{cm} = k_s \frac{2\pi^2}{t_s^2} \left(\sqrt{D_{xx} D_{yy}} + D_{xy} + 2D_G \right). \quad (8)$$

Здесь k_s – редуцированный коэффициент:

$$k_s = 1 + \frac{E_s h_s}{E_x h}. \quad (9)$$

где E_x – модуль Юнга полотна пластины по направлению действия нагрузки.

Если полотно подкрепленной пластины состоит только из продольных монослоев, изгибные жесткости и коэффициент редукиции можно представить следующим образом соответственно:

$$D_{xx} = \frac{b_{11} h_f^3}{12} \gamma^3, \quad D_{yy} = \frac{b_{22} h_f^3}{12} \gamma^3, \\ D_{xy} = \frac{b_{12} h_f^3}{12} \gamma^3, \quad D_G = \frac{b_{33} h_f^3}{12} \gamma^3; \quad (10)$$

$$k_s = \frac{1}{\gamma}. \quad (11)$$

3. Алгоритм проектирования

Алгоритм проектирования подкрепленной пластины состоит из следующих шагов:

1. Полагаем, что полотно подкрепленной пластины состоит только из продольных монослоев. Очевидно, что данная структура армирования является оптимальной по условиям прочности.

2. По известной величине сжимающей нагрузки и пределу прочности материала пластинки при сжатии находим полную условную "толщину" h_f подкрепленной пластины:

$$h_f = \frac{q_0}{\sigma_{-lv}}$$

Здесь σ_{-lv} – предел прочности монослоя при сжатии в направлении волокон, q_0 – заданная сжимающая нагрузка.

3. Полагая $h = h_f$, находим критическую нагрузку для гладкой пластинки q_{cr} . Проверяем выполнение условия общей устойчивости:

$$q_f \geq q_0.$$

Если это условие соблюдается, то процесс проектирования завершается.

4. Если условие общей устойчивости не выполняется, тогда, полагая $H_s = H_{sm}$, решаем уравнение относительно γ :

$$q_{cr}(\gamma) = q_0.$$

Подставив в левую часть уравнения выражение для критической нагрузки, после несложных преобразований получим следующее уравнение:

$$\gamma^3 + (1-\gamma)r_H^2 + 3\gamma(1-\gamma)(r_H + \gamma)^2 = \frac{q_0}{q_f}.$$

Нетрудно видеть, что последнее равенство представляет собой алгебраическое уравнение четвертой степени относительно величины γ . Для нахождения решения этого уравнения можно воспользоваться, например, формулами Кардано. Величина γ , очевидно, должна принадлежать промежутку $[0;1]$.

Предельные случаи:

$\gamma = 0$ – отсутствует полотно пластинки;

$\gamma = 1$ – отсутствуют ребра.

5. По найденным значениям относительной толщины γ и полной условной "толщины" h_f вычисляем толщину полотна и условную "толщину" ребер:

$$h = h_f \gamma, \quad h_s = h_f (1 - \gamma).$$

6. Шаг продольных ребер находим из условия сохранения местной устойчивости:

$$q_{cm}(t_s) = q_0.$$

Здесь q_{cm} – критическая нагрузка, соответствующая местной форме потери устойчивости полосы пластинки между ребрами.

Подставив выражение (8) в левую часть последнего уравнения, после несложных преобразований с учетом формул (10)–(11), получим явное выражение для нахождения шага продольных ребер:

$$t_s = \pi \gamma \sqrt{\frac{\sqrt{b_{11}b_{22}} + b_{12} + 2b_{33}}{6q_0}} h_f^3.$$

По известным значениям h_s, t_s и H_s находим ширину стрингера:

$$B_s = \frac{h_s t_s}{H_s}.$$

7. По найденной полной условной "толщине" подкрепленной пластины вычисляем массу конструкции:

$$G_f = 2ab\rho_0 h_f.$$

Здесь ρ_0 – плотность материала подкрепленной пластины.

4. Пример расчета

Стрингерная пластинка длиной a и шириной b , подкрепленная набором продольных ребер, находится под действием сжимающих нагрузок q_0 . Упругие характеристики материала пластинки приведены в таблице: предел прочности $\sigma_{-lv} = 0,7$ ГПа; плотность материала $\rho_0 = 1450$ кг/м³.

Упругие характеристики материала пластинки

E_1 (ГПа)	E_2 (ГПа)	ν_{12}	G_{12} (ГПа)
140	7	0.24	2.75

Требуется вычислить массу оптимальной стрингерной пластины, если $q_0 = 1,4 \cdot 10^7$ н/м; $a = b = 0,5$ м; $H_{sm} = 0,03$ м.

1. Полагаем, что полотно подкрепленной пластины состоит только из продольных монослоев. Очевидно, что данная структура армирования является оптимальной по условиям прочности.

2. По известной величине сжимающей нагрузки и пределу прочности материала пла-

стинки при сжатии находим полную условную "толщину" h_f подкрепленной пластины:

$$h_f = \frac{q_0}{\sigma_{-lv}} = 0,02(\text{м}).$$

3. Полагая $h = h_f$, находим критическую нагрузку для гладкой пластинки:

$$q_f = D_f \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 = 0,37 \cdot 10^7 \text{ (н/м)}.$$

Следовательно, $q_f < q_0$.

Таким образом, условие устойчивости нарушается.

4. Полагая $H_s = 0,03(\text{м})$, решаем уравнение относительно γ :

$$\gamma^3 + (1-\gamma)r_H^2 + 3\gamma(1-\gamma)(r_H + \gamma)^2 = \frac{q_0}{q_f},$$

где $r_H = 1,5$.

Уравнение имеет два действительных корня:

$$\gamma_1 = 0,34 \text{ и } \gamma_2 = 0,76.$$

Первый корень соответствует случаю, когда большую по массе часть конструкции составляют ребра, второй корень – полотно пластины.

В дальнейшем значения параметров, соответствующих первому решению, будем обозначать индексом "1", второму решению – индексом "2".

5. Вычисляем толщины полотна и условные "толщины" ребер:

$$h_1 = h_f \gamma_1 = 0,0068 \text{ (м)};$$

$$h_{s1} = h_f (1 - \gamma_1) = 0,013 \text{ (м)};$$

$$h_{2s} = h_f \gamma_2 = 0,015 \text{ (м)};$$

$$h_{s2} = h_f (1 - \gamma_2) = 0,0048 \text{ (м)}.$$

6. По найденным значениям γ_1 и γ_2 вычисляем расстояния между стрингерами:

$$t_{s1} = \pi \gamma_1 \sqrt{\frac{\sqrt{b_{11}b_{22}} + b_{12} + 2b_{33}}{6q_0}} h_f^3 = 0,065(\text{м}),$$

$$t_{s2} = \pi \gamma_2 \sqrt{\frac{\sqrt{b_{11}b_{22}} + b_{12} + 2b_{33}}{6q_0}} h_f^3 = 0,145(\text{м}).$$

Находим ширину стрингера для γ_1 :

$$B_{s1} = \frac{h_{s1} t_{s1}}{H_s} = 0,028(\text{м}).$$

Находим ширину стрингера для γ_2 :

$$B_{s2} = \frac{h_{s2} t_{s2}}{H_s} = 0,023(\text{м}).$$

7. По найденной полной условной "толщине" подкрепленной пластины вычисляем массу конструкции:

$$G_f = 2ab\rho_0 h_f = 45,6(\text{кг}).$$

Найдем количество подкрепляющих элементов для первого и второго вариантов оптимальных конструкций:

$$k_1 = \frac{B_{s1}}{t_{s1}} = 7,72; \quad k_2 = \frac{B_{s2}}{t_{s2}} = 3,45.$$

Округляя данные величины до целых значений (в большую сторону), получим:

$$k_1 = 8; \quad k_2 = 4.$$

Найдем уточненные значения массы подкрепленной пластины для каждого варианта конструкции:

$$G_{f1} = 46,6(\text{кг}); \quad G_{f2} = 47,2(\text{кг}).$$

Уточненный расчет показывает, что первый вариант конструкции имеет меньшую массу по сравнению со вторым вариантом.

Масса гладкой пластины, толщина которой определяется из условия сохранения устойчивости, вычисляется по формуле

$$G_{\max} = 2ab\rho_0 h_{\max},$$

где

$$h_{\max} = \sqrt[3]{\frac{12q_0}{b_{11}} \cdot \left(\frac{\pi}{a} \right)^2}.$$

Подставив числовые значения в две последние формулы, найдем:

$$h_{\max} = 0,031(\text{м}); \quad G_{\max} = 71(\text{кг}).$$

Таким образом, введение в конструкцию пластины подкрепляющих элементов позволило снизить массу пластины более чем на 30 %.

Список литературы

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Исследования в области устойчивости ребристых оболочек // Прикладная механика. 1983. Т. 19, № 11. С. 3–20.
2. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
3. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

4. Васильев В.В., Лопатин А.В. Теория сетчатых и подкрепленных композитных оболочек // *Механика конструкций из композиционных материалов*. Новосибирск: Наука, 1984. С. 31–36.
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
6. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1982. 256 с.
7. Кармишин А.В. Потенциальная энергия деформации непологой ортотропной оболочки из неоднородного материала // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1976. № 4. С. 183–185.
8. Кусяков А.Ш. Алгоритм проектирования подкрепленных композитных пластин // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2013. Вып. 4(23). С. 34–38.
9. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1976. 408 с.
10. Маневич А.И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. Киев: Донецк: Вища школа, 1979. 152 с.
11. Мормуль Н.Ф., Почтман Ю.М. Многокритериальная оптимизация подкрепленных композитных панелей при комбинированном нагружении // *Механика композитных материалов*. 1993. Т. 29, № 6. С. 823–830.
12. Немировский Ю.В. Устойчивость и выпучивание конструктивно анизотропных и неоднородных пластин и оболочек // *Механика твердого деформируемого тела*. М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. Т. 9. С. 5–156.
13. Почтман Ю.М., Тугай О.В. Подкрепленные многослойные цилиндрические оболочки минимального веса, сжатые в осевом направлении // *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. 1980. Вып. 1. С. 153–156.
14. Томашевский В.Т., Ануфриев А.П., Шалыгин В.Н., Яковлев В.С., Калимулин Р.И. Оптимизация конструкций подкрепленных цилиндрических оболочек из композитов // *Механика композитных материалов*. 1987. № 5. С. 853–869.

Design of composite stringer plates

A. Sh. Kusyakov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
 kusyakov@psu.ru; 89026354772

The paper investigates the problem of optimal design of a composite stringer plate under compressive loads. It has been established that the optimal design problem for the considered class of structures can have more than one solution. There are provided results of numerical analysis, which allow one to evaluate the efficiency of using stringer plates in comparison with similar structures without reinforcing elements.

Keywords: *composite; plate; stability; strength; design.*