УДК 531.391

Дистанционное управление манипуляционными роботами

Ф. М. Кулаков, Г. В. Алфёров, П. А. Ефимова
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский проспект, 35
kufelix@yandex.ru; +7-906-244-82-16

Предложен и обоснован метод дистанционного управления космическим роботом, предназначенным для выполнения в недетерминированной внешней среде разнообразных операций с предметами как свободно перемещаемыми в пространстве, так и имеющими голономные связи. Последнее характерно при выполнении сборочных операций при освоении космоса. Метод базируется на использовании важной особенности, характеризующей каждую выполняемую операцию – наличие так называемого паспорта выполняемой операции по взаимодействию рабочего инструмента робота с объектами внешней среды.

Ключевые слова: *копирующее управление; дистанционное управление; билатеральное управление; адаптивное управление; устойчивость процессов управления.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-4-34-43

1. Особенности предлагаемого подхода дистанционного управления

Предлагаемый в статье подход предусматривает разделение процесса дистанционного управления на два этапа. Первый этап, осуществляемый на наземном центре управления, является этапом обучения робота требуемому действию. Второй – этап исполнения этого действия реальным космическим роботом.

На первом этапе осуществляется управление не самим роботом, а очень хорошей его моделью. Модель должна функционировать в среде, которая служит моделью реальной внешней среды робота. В этой "модельной" среде человек должен выполнить с помощью модели робота требуемую операцию. Для этого, в частности, допустимо использовать билатеральное управление с использованием задающей рукоятки. Поскольку на наземном центре управления запаздывания в передаче сигналов управления от рукоятки к модели робота отсутствуют, то требуемая операция может быть успешно проведена.

Допустимы и другие способы проведения операции в модельной среде, например с помощью задающей перчатки.

С помощью соответствующих сенсоров, установленных на модели робота, в процессе выполнения требуемой операции формируются законы изменения во времени ряда данных, характеризующих силу взаимодействия рабочего инструмента модели с моделями объектов внешней среды робота, а также их взаимное положение. Можно утверждать, что в случае использования этих законов в качестве программных для системы управления реальным роботом при достаточно высоком качестве их отслеживания этой системой на втором этапе управления космическим роботом имеет место весьма большая вероятность выполнения роботом требуемой операции в недетерминированной внешней среде. Этот класс представляет собой набор произвольно расположенных твердых тел, которые могут быть как свободно перемещаемыми в пространстве, так и имеющими голономные связи [1, 2], ограничивающие их возможные перемещения.

Вышеуказанное утверждение базируется на следующем соображении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-08-00419.

Для каждого типа операции по взаимодействию рабочего инструмента (схвата) с предметом среды существует некий инвариант – паспорт ее выполнения [3–9, 22]. Он включает траекторию изменения во времени положения относительно схвата так называемых характерных точек, принадлежащих предметам внешней среды. В случае же силового взаимодействия схвата с предметами, к этим траекториям добавляется привязанный к ним "по времени" закон изменения силы и момента взаимодействия схвата с этими предметами, измеряемыми запястным силомоментным сенсором.

Для успешного выполнения рабочим инструментом робота операции с предметом, необходимо чтобы в процессе реализации операции положение предмета относительно рабочего инструмента, а также величина силы взаимодействия инструмента с предметом, были идентичны положению и силам их моделей в процессе обучения, т.е. чтобы паспорт операции, полученный с помощью моделей в процессе обучения, совпадал с паспортом реализуемой операции.

Таким образом, для осуществления предлагаемого подхода необходимо оснастить модель робота набором сенсоров, который обеспечивает возможность формирования на этапе обучения "паспортных" траекторий, используемых в качестве программных. Для отслеживания этих траекторий система управления реального космического робота должна использовать информацию, аналогичную той, которая была использована для построения паспортных траекторий. Это требует оснащения реального космического робота тем же сенсорным обеспечением, которое было использовано на его модели, установленной аналогичным образом.

В случае достаточно точного отслеживания вышеупомянутых программных траекторий рабочим инструментом реального робота, требуемая операция с предметом в недетерминированной внешней среде оказывается выполненной независимо от возможной неточности модели внешней среды (в которой осуществлялся процесс обучения), обусловленной в основном отличием реальных позиций объектов в базовой системе координат корпуса робота от их модельных позиций. Для повышения точности отслеживания программных траекторий вместо традиционного регулирования "по отклонению" целесообразно использовать более совершенные методы управления, например комбинированное управление, когда сигнал рассогласования формируется как разность между программными текущими значениями и дополняется сигналом изменения по величине управления, которое имело место в процессе обучения.

Предлагаемый способ дистанционного управления, очевидно, является способом off-line дистанционного управления, что в значительной мере снимает ограничения по времени запаздывания в передаче сигналов управления и получения сигналов обратной связи. Это достигается тем, что сигналы обратной связи по положению и силе взаимодействия робота с внешней средой замыкаются не через человека, как при традиционном билатеральном управлении, а через систему управления космического робота, находящуюся вблизи от исполнительных органов космического робота, что устраняет запаздывание.

Описанный подход более эффективен при реализации дистанционного управления в стационарных или квазистационарных средах, когда объекты внешней среды не слишком быстро перемещаются. Однако он остается работоспособным как в случае свободно-перемещаемых объектов среды, так и в случае если перемещения объектов ограничены связями. Например, таким объектом может быть шкаф с гнездами, в которых должны быть вставлены платы, перемещаемые по направляющим. Возможной средой может быть поверхность произвольного профиля, которую надо отшлифовать специальным инструментом, осуществляя давление на поверхность с требуемой силой. Сочленение двух деталей, одна из которых имеет отверстие, а другая – вставляемый в это отверстие штырь, также является возможным вариантом внешней среды.

Вышеприведенные операции и другие им подобные, в принципе могут быть использованы при создании интерпретатора расширяемого проблемно ориентированного языка для реализации супервизорного управления космическим роботом [9, 22].

При производстве работ в космосе преимущества предлагаемого подхода наиболее полно раскрываются, если внешняя среда, в которой функционирует робот, является поверхностью, на которой произвольно разбросаны твердые предметы неправильной формы. Такая поверхность может быть поверхностью некото-рых астероидов, Луны, а также Марса.

2. Обоснование работоспособности подхода

Для выяснения работоспособности предложенного подхода к организации дистанционного управления космическим роботом необ-ходимо провести детальный анализ динами-ческих свойств системы дистанционного уп-равления роботом, реализованной на основе этого подхода.

В результате анализа должны быть выявлены условия устойчивости функционирования системы дистанционного управления роботом в целом. Только при их удовлетворении система может быть признана работоспособной. Поскольку система дистанционного управления включает наземную и космическую части, то для ее работоспособности, *во-первых*, должны быть удовлетворены требования устойчивости для билатерально управляемой от задающей рукоятки наземной модели робота, *во-вторых*, должна быть достигнута устойчивость функционирования локальной системы управления реальным космическим роботом, которая должна отслеживать программные траектории, сформированные на наземном центре управления реальным роботом. Что касается динамического анализа [4] функционирования билатерально управляемого от задающей рукоятки модели космического робота, то он уже был проведен [4] и результаты его, включающие условия достижения устойчивости управления, приведены в [12–21].

В настоящей статье приводится динамический анализ процесса функционирования локальной системы управления космического робота при отслеживании программных траекторий, сформированных в процессе обучения на наземном центре управления.

Динамическое описание поведения манипуляционного космического робота, функционирующего в невесомости, имеет вид:

$$A\ddot{q}+B\dot{q}+Cq=HU+Q, \qquad (1)$$

$$A=\frac{\partial^2 T}{\partial(\dot{q})^2},$$

$$B=\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\dot{q})^{\mathrm{T}}A}{\partial \mathrm{q}}\right]+k_F+k_V,$$

$$Cq=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}, C=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & C_e\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}E\\ 0\end{bmatrix},$$

где $q=(g,e)$, $\dot{q}=(\dot{g},\dot{e})$ – $(n+m)$-мерные векторы обобщенных координат робота, а также его скоростей, e – m-мерный вектор деформаций упругих элементов конструкции манипуляционного робота, A и C – $(n+m)\times(n+m)$ симметрические положительно-определенные матрица инерции и полуопределенная матрица жесткости, C_e – $(m\times m)$ симметрическая положительно-определенная матрица жесткости конструкции робота, Q – $(n+m)$-мерный вектор обобщенных реакций связей (сил взаимодействия рабочего инструмента с предметами внешней среды, имеющими склерономные связи), H – $(n+m)\times n$-блочная матрица, k_F – $(n+m)\times(n+m)$-симметрическая положительно определенная матрица коэффициентов трения, E – $n\times n$-единичная матрица, U – n-мерный вектор управления.

Обобщенные координаты механизма-манипулятора, входящие в вектор q, могут оказаться "связанными". Это происходит, если схват манипулятора перемещает предмет, возможные перемещения которого ограничены связями (наиболее вероятно – склерономными). Предмет, жестко схваченный схватом, является единым целым со схватом, поэтому связи предмета выступают связями схвата манипулятора. Уравнения связей имеют вид

$$M(X)=M(f(q))=0, \qquad (2)$$

где $M(X)$ – r-мерная непрерывно дифференцируемая вектор-функция $r\le 6$.

$X=(Y_1, Y_2, Y_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ – вектор положения и ориентации рабочего инструмента (схвата) космического манипулятора, прикрепленного к последнему звену манипулятора с помощью "упругого" элемента, который является запястным силомоментным сенсором, измеряющим величину силы, приложенную к схвату со стороны перемещаемых им предметов внешней среды. $Y_1,\ Y_2,\ Y_3$ – координаты полюса (начала координат системы, связанный с рабочим инструментом), $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ – Эйлеровы углы поворота координатной системы схвата.

Дифференциальная форма (2) имеет вид

$$\frac{\partial M\left(X\right)}{\partial X}\dot{X}=0, \tag{3}$$

и в более удобном нормализованном виде:

$$p\dot{X}=pS\dot{q}=0, \tag{4}$$

где $p=R^{-1}\partial M/\partial X$ – $r\times 6$-нормализованная матрица связей, $R=\mathrm{d}iag\left\{R_1,R_2,...,R_6\right\}$ – диагональная $r\times r$-матрица, R_j – эвклидова норма *j*-й строки матрицы: $\partial M/\partial q$, $S=\dfrac{\partial X}{\partial q}$ – $6\times\left(n+m\right)$-матрица Якоби.

Для малых приращений $\Delta X,\Delta q$ уравнение, связывающее их, имеет форму, аналогичную (4):

$$p\Delta X=pS\Delta q=0. \tag{5}$$

Вектор ΔX может быть представлен в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta X=\Delta X_g+\Delta X_e\ , \tag{6}$$

где ΔX_g – n-мерный вектор приращения, порождаемый приращением Δg вектора управляемых обобщенных координат, а ΔX_e – m-мерный вектор приращения, порождаемый приращением вектора Δe упругих деформаций конструкции робота.

Вместо вектора $\dot{X}^i$ в уравнениях связей можно использовать вектор

$$\dot{x}=\left(\omega,v\right)=\beta\dot{X}, \tag{7}$$

где β – ортогональная 6×6-матрица, являющаяся функцией вектора q угловых ω и линейных v скоростей схвата космического манипулятора, в системе координат, которая связана со схватом. Вместо вектора ΔX применим вектор малых приращений:

$$\Delta x=\beta\Delta X. \tag{8}$$

Тогда, приняв во внимание (7), (8), выражение (6) можно привести к нижеследующей нормализованной форме представления уравнений связи:

$$pJ\Delta X=p\Delta X_g+p\Delta X_e=pJ_g\Delta g+pJ_e e=0, \tag{9}$$

где $J=\left[J_g\mid J_e\right]$ – $6\times\left(n+m\right)$-Якобиева матрица манипулятора, J_g и J_e – $6\times n$ и $6\times m$-блоки.

Вследствие малости деформации e в (9) Δe заменено на e. $J_g=\left[J_g^v\mid J_g^\omega\right]$ – $6\times n$-Якобиева матрица для управляемых обобщенных скоростей, J_g^v и J_g^ω – $3\times n$-блоки, связывающие векторы линейной v и угловой ω скоростей.

Очевидно, вектор Q обобщенных реакций связей, т.е. вектор силы взаимодействия схвата с предметами внешней среды, отнесенный к вектору q обобщенных координат робота, имеет следующее представление: $Q=\left(Q_g,Q_e\right)=J^{\mathrm{T}}p^{\mathrm{T}}\lambda$, где λ – r-мерный вектор – множитель Лагранжа, Q_g и Q_e – векторы обобщенных реакций, отнесенные к векторам управляемых g и упругих e координатам конструкции соответственно. Они представляются как

$$Q_g=J_g^T p^{\mathrm{T}}\lambda \quad \text{и} \quad Q_e=J_e^T p^{\mathrm{T}}\lambda. \tag{10}$$

Для проведения анализа процесса управления прежде всего необходимо получить динамическое описание замкнутой системы управления реального космического робота. Искомое описание получается с помощью системы (1) при замене в ней вектора U его представлением

$$U=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X^i}{\partial g}\right)^T K_p\left(X_d^i-X^i\right)-K_Q\left(Q_g^d-Q_g\right),$$

где Q_g^d и Q_g – векторы желаемого и текущего значений сил взаимодействия схвата с объектом внешней среды, отнесенные к вектору управляемых обобщенных координат робота.

К сожалению, текущее значение вектора Q_g, входящего в это выражение, для U весьма неудобно для его формирования, так как точное значение этой величины требует измерения с помощью соответству-ющих сенсоров не только переменных g и e, являющихся компонентами обобщенных координат $q=(g,\ e)$, но и их производных.

Поэтому на практике в качестве Q_g используется величина, близкая к требуемой, однако, точно она равна ей только при значениях $\dot{q}=\ddot{q}=0$.

Эти величины могут быть получены с помощью подсистемы, состоящей из последних m уравнений системы (1) при $\dot{q}=\ddot{q}=0$, что приводит эту систему к виду $C_e\ e=Q_e=J_e^T p^T\lambda$ и, поскольку в соответствии с (10) $Q_g=J_g^T p^{\mathrm{T}}\lambda$, то искомая $Q_g=J_g^T C_r J_e e$, где $C_r=\left[J_e C_e^{-1} J_e^T\right]^{-1}$ – матрица жесткости запястного силомоментного сенсора. Текущее значение Q_g формируется с помощью силомоментного сенсора, который в процессе реализации управления измеряет значение e. Что касается остальных величин, входящих в закон управления U, а именно величины $X^i,\ i=1,2,3,...,\ n$, то они формируются вышеописанным способом с помощью лазерных дальномеров или с помощью ПЗС-камер.

Наконец, формирование текущих значений матриц $\left(\dfrac{\partial X^i}{\partial g}\right)^T$, $i=1,2,3,...,\ n$, входящих в выражение для вектора управления U, осуществляется также достаточно просто. Более детальное представление этих матриц может быть получено с помощью равенства

$$x^i=\mathrm{x}_0+\alpha X^i,$$

где x^i и x_0 – векторы, представляющие в базовой системе координат робота i-ю характерную точку предмета стационарной внешней среды и полюс (начало) подвижной системы координат, связанной с концом последнего звена манипулятора (место крепле-ния к звену корпуса силомоментного сенсора), α – матрица направляющих косинусов пово-рота координатной системы звена относительно базовой системы.

Продифференцировав правую и левую части этого равенства, получим

$$\frac{\partial X^i}{\partial q}\dot{g}=\alpha^T\left(\dot{x}^i-\dot{x}_0\right)+\dot{\alpha}^T\left(x^i-x_0\right). \quad (11)$$

Из-за стационарности внешней среды векторы положения характерных точек x^i не зависят от времени, т.е. $\dot{x}^i=0$. Тогда, учтя что $\dot{\alpha}^T=-\alpha^T\check{\omega}$ и что $\alpha^T\dot{x}_0=v=J_g^v$, а $\omega=J_g^{\omega}\dot{g}$, где v – векторы линейной скорости полюса (начала координат) последнего звена манипулятора, ω – вектор угловой скорости последнего звена в системе координат этого звена, наконец, приняв во внимание что $\alpha^T\left(x^i-x_0\right)=X^i$, равенство (11) можно привести к виду

$$\frac{\partial X^i}{\partial q}\dot{g}=J_g^v.\dot{g}+\check{X}^i\ J_g^{\omega}\dot{g}.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial X^i}{\partial q}=J_g^v.+\check{X}^i\ J_g^{\omega}.$

Дальнейший динамический анализ требует модернизации классического описания ди-намики поведения механизма, имеющего скле-рономные связи. Вместо описания динамики в виде двух систем уравнений, одна из которых – система дифференциальных уравнений Лагран-жа II рода, вторая – система (9), состоящая из r уравнений склерономных связей, будем использовать модернизированную систему. Она получается из исходной (1) путем замены в ней r-мерного множителя Лагранжа λ, с помощью которого представляется вектор обобщенных реакций связей $Q=J^T\lambda$ величиной $cpJ\Delta q$, в которой $c\to\infty$, а $cpJ\Delta q\to 0$ каждая j-я компонента которого пропорциональна расстоянию $p_j J\Delta q$ точки, определяемой вектором q до j-й гиперповерхности, представленной уравнением $p_j J\Delta q=0$, где p_j – j-я строка матрицы p. Оно является j-м уравнением, входящим в систему уравнений связи (9).

В качестве матрицы пропорциональности используется скалярная матрица $c\to\infty$. Правомерность описанной замены показана, в частности, в [18]. В соответствии со сказанным, полагая, что $q-q_0=\Delta q$ – малое приращение, а q_0 – значение q, удовлетво-ряющее уравнению связей (4), имеем

$$\lambda = -ApJ\left(q - q_0\right) = -cpJ\Delta q, A \to \infty .$$

Таким образом, новое представление системы уравнений динамики модели манипулятора (1) примет вид

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = HU - J^T p^T cpJ\Delta q$$

и будет включать только дифференциальные уравнения.

После перехода в этой системе к новой переменной $\Delta = q - q_0$, $q = (g, e)$, $\Delta_r = g - g_0$, $\Delta_e = e - e_0$, где q_0, e_0, g_0 соответствуют равновесному состоянию модели, заменим U его представлением (8). В результате полу-чим, дополнительно проведя еще и линеари-зацию системы в окрестности $\dot{q} = 0,\ q = q_0$, нижеследующую систему уравнений:

$$\ddot{\Delta} + \dot{\Delta} + C\Delta = 0, \qquad (12)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A_{nn} & A_{nm} \\ A_{mn} & A_{mm} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{nn} & 0 \\ 0 & B_{mm} \end{bmatrix} = k_F + k_V$$

и $C = \begin{bmatrix} f_{nn} & f_{nm} \\ f_{mn} & f_{mm} \end{bmatrix}$ – $(n+m)\times(n+m)$–матрицы инерции, представления диссипативных сил и представления сил, зависящих от вектора обобщенных координат.

$$f_{nn} = (J_g)^{\mathrm{T}} p^{\mathrm{T}} cpJ_g + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X^i}{\partial \Delta_g}\right)^T K_p \left(\frac{\partial X^i}{\partial \Delta_g}\right)$$

$$f_{nm} = k_R J_g^T C_r J_e + J_g^T p^{\mathrm{T}} cpJ_e,$$

$$f_{mn} = J_e^T p^T cpJ_g,$$

$$f_{mm} = c_e + J_e^T p^T cpJ_e. \qquad (13)$$

Для выяснения условий устойчивости полученной системы (11), проведем нижеследующие ее преобразования. *Во-первых,* представим ее в нормальной разрешенной относительно первой производной форме. *Во-вторых,* покажем, что преобразованная таким образом система, в случае нижеуказанной особенности конструкции манипулятора, будет включать две подсистемы дифференциальных уравнений. Одна из них сингулярно возмущена, т.е. имеет малый параметр при производных, вторая же подсистема является невозмущенной. Вышеупомянутая особен-ность конструкции манипулятора, которая порождает такую структуру, состоит в том, что масс-инерционные характеристики звень-ев должны быть намного больше, чем такие же характеристики рабочего инструмента, прикрепленного к последнему звену манипулятора через упругую конструкцию запястного силомоментного сенсора. *В-третьих,* выясним, удовлетворяет ли выше-указанная система условиям теоремы Тихонова [11].

В случае их удовлетворения появляется возможность успешного проведения динамического анализа, например на предмет выяснения устойчивости со значительно более простой системой дифференциальных уравнений, а именно, с так называемой *порождающей системой*, в которую превращается исходная система дифференциальных уравнений, если положить малый параметр при производных в сингулярно возмущенной подсистеме равным нулю. *В-четвертых,* осуществим требуемый анализ порождающей подсистемы с целью выяснения ее устойчивости. Положительный результат позволяет обоснованно распространить его на исходную систему. С целью приведения системы (12) к нормальной, разрешенной относительно первой производной форме, приняв во внимание что $\Delta = (\Delta_r,\ \Delta_e)$, введем новые переменные $\Delta_{r1} = \dot{\Delta}_r$, $\Delta_{e1} = \dot{\Delta}_e$ и получим

$$\dot{\bar{\Delta}}_{r1} = -\Pi_{or}\bar{\Delta}, \qquad (14)$$

$$\dot{\bar{\Delta}}_{e1} = -\Pi_{oe}\bar{\Delta}, \qquad (15)$$

$$\bar{\Delta}_r = (\Delta_r, \Delta_{r1}), \bar{\Delta}_e = (\Delta_e, \Delta_{e1}),\ \bar{\Delta} = (\Delta_r, \bar{\Delta}_e),$$

$$\Pi_{0r} = \begin{bmatrix} 0 & E_r & 0 & 0 \\ \Phi_{r\,n} & T_{0r} & \Phi_{rm} & 0 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$\Pi_{0e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_e \\ \Phi_{e\,n} & 0 & \Phi_{em} & T_{0e} \end{bmatrix},$$

где Π_{0r} и Π_{0e} – $2n\times 2(n+m)$ и $2m\times 2(n+m)$-матрицы;

$$\begin{gathered} T_{0r} = a_{n\bullet}B, T_{0e} = a_{m\bullet}B, \\ \Phi_{0r} = \left[\Phi_{r\,n} \quad \Phi_{r\,m}\right], \Phi_{0e} = \left[\Phi_{e\,n} \quad \Phi_{e\,m}\right], \\ \Phi_{r\,n} = a_{n\bullet}\left(f_{\bullet n}\right),\ \Phi_{r\,m} = a_{n\bullet}\left(f_{\bullet m}\right), \\ \Phi_{e\,n} = a_{m\bullet}\left(f_{\bullet n}\right),\ \Phi_{e\,m} = a_{n\bullet}\left(f_{\bullet n}\right), \end{gathered} \qquad (16)$$

$$(A_0)^{-1} = \begin{bmatrix} a_{nn} & a_{nm} \\ a_{mn} & a_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n\bullet} \\ a_{m\bullet} \end{bmatrix};$$
$$C = \begin{bmatrix} f_{n\bullet} \\ f_{m\bullet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{nn} & f_{nm} \\ f_{mn} & f_{mm} \end{bmatrix} = [\, f_{\bullet n} \quad f_{\bullet m} \,], \tag{17}$$

E_r и E_e – $(n \times n)$- и $(m \times m)$-единичные матричные блоки. Блоки a_{nn}, a_{nm}, a_{mn}, a_{mm} матрицы $(A_0)^{-1}$ в (17) размерности $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ представляются через блоки A_{nn}, A_{nm}, A_{mn}, A_{mm} матрицы A_0 с помощью формулы Фробениуса:

$$a_{nn} = A_{nn}^{-1} + A_{nn}^{-1} A_{nm} a_{mm} A_{mn} A_{nn}^{-1},$$
$$a_{nm} = a_{mn}^{\mathrm{T}} = A_{nn}^{-1} A_{nm} a_{mm}, a_{mm} =$$
$$(A_{mm} - A_{mn} A_{nn}^{-1} A_{nm})^{-1}. \tag{18}$$

Введем постоянный параметр:

$$\mu^2 = \Pi_r \;\; \Pi_e^{-1}. \tag{19}$$

Нормы Π_r, Π_e правомерно заменить на нормы блоков Φ_{or}, Φ_{oe}, поскольку элементы единичных блоков E_r, E_e, а также элементы блочных матриц T_{oe}, T_{or} коэффициентов вязкого трения значительно меньше элементов матриц Φ_{or}. Последние являются матрицами параметров, которые определяют величины потенциальных и упругих сил манипулятора. Эти параметры значительно больше единицы, а также коэффициентов вязкого трения. Поэтому выражение (19) для μ^2 можно заменить:

$$\mu^2 = \Phi_{or} \;\; \Phi_{oe}^{-1} = a_{n\bullet} \;\; a_{m\bullet}^{-1} \le$$
$$\left(a_{nn} + a_{nm}\right) \;\; a_{mm}^{-1}, \tag{20}$$

где a_{nn}, a_{mm}, $a_{m\bullet}$, $a_{n\bullet}$ – октаэдрические нормы матриц a_{nn}, a_{mm}, $a_{m\bullet}$, $a_{n\bullet}$.

С помощью (18) для a_{nm} и a_{nn} убедимся в справедливости неравенства:

$$a_{nm} \le A_{nn}^{-1} \;\; A_{nm} \;\; a_{mm} < a_{nn} \;\; A_{nm} \;\; a_{mm}. \tag{21}$$

Заменив в (21) величину a_{nm} правой частью неравенства (18), приведем (19) к виду

$$\mu^2 < a_{nn} \;\; \left(a_{mm}^{-1} + A_{nm}\right).$$

и так как $a_{mm}^{-1} < A_{mm}$, что следует из (18) для a_{mm}, окончательно имеем

$$\mu^2 < a_{nn} \;\; \left(A_{mm} + A_{nm}\right), \tag{22}$$

где

$$a_{nn} = A_{nn}^{-1} + A_{nn}^{-1} A_{nm} a_{mm} A_{mn} A_{nn}^{-1} < Cond\left(A_{nn}\right) A_{nn}^{-1}\left(E + \delta\right)$$
$$\delta < Cond\left(A_{nn}\right) A_{nn}^{-1} A_{nm} A_{mm} A_{mn} \le E .$$

Анализ показал, что особенности конструкции рассматриваемого класса манипуляторов, а также малость массы и момента инерции рабочего инструмента, закрепленного на конце манипулятора, по сравнению с инерцией и массой остальных его подвижных элементов – звеньев манипулятора, приводят к нижеследующему характерному соотношению между блоками матрицы .

Величина блока A_{nn} в основном определяется моментами инерции звеньев манипулятора. Она значительно больше величины блоков $A_{nm} = A_{mn}^{\mathrm{T}}, A_{mm}$, которые определются моментом инерции и массой рабочего инструмента на конце манипулятора, т.е. имеет место следующее неравенство: $A_{nn} >> A_{mn}$, $A_{nn} >> A_{nm}$ и $A_{nn} >> A_{mm}$.

И, следовательно, как видно из (20), параметр μ^2 будет очень малым, если блок A_{nn} матрицы A еще и достаточно хорошо обусловлен, т.е. $Cond\left(A_{nn}\right)$ не будет слишком большим.

Для дальнейшего преобразования систем (14), (15) с использованием малого параметра μ введем вместо Δ_{e1} переменную $\tilde{\Delta}_{e1} = \mu \dot{\Delta}_e$ и домножим на $\mu^2 = \Phi_{or} \;\; \Phi_{oe}^{r\;-1}$ правые и левые части равенства (15). Заменим также матрицу Π_{or} ее представлением через Φ_{or} с помощью выражения (16).

В результате получим следующую запись систем уравнений (14), (15):

$$\mu \dot{\Delta}_e = \tilde{\Delta}_{e1}, \tag{23}$$

$$\mu \dot{\tilde{\Delta}}_{e1} = -\mu T_{oe} \tilde{\Delta}_{e1} - \Phi_{or} \;\; \Phi_{oe}^{r\;-1} \Phi_{or} \Delta \;\; ,$$
$$\dot{\Delta}_r = \Delta_{r1}, \tag{24}$$
$$\dot{\Delta}_{r1} = -T_{or} \Delta_{r1} - \Phi_{or} \Delta \;\; + k \Delta_r .$$

Она включает невозмущенную подсистему (24) и сингулярно возмущенную подсистему (23), так как ее левые части имеют малый скалярный множитель μ при производных переменных Δ_e, Δ_{e1}.

В то же время множитель $\Phi_{or}\ \ \Phi_{oe}^{-1}\Phi_{oe}$ при переменной Δ в правой части этой подсистемы соизмерим с матричным коэффициентом Φ_{or} при той же переменной в подсистеме (22), поскольку он является произведением нормы Φ_{or} матрицы Φ_{or} на нормированную матрицу $\Phi_{oe}^{-1}\Phi_{oe}$. Если эта подсистема (23), (24) удовлетворяет теореме Тихонова [11], а это значит, во-первых, что, при $\mu = 0$ сингулярно возмущенная система, связывающая переменные Δ_e и Δ_r, превращается в алгебраическую систему, которая имеет изолированный корень $\Delta_{e0} = (\Delta_e, \Delta_{e1}) = \varphi(\Delta_r)$. Во-вторых, при замене входящей в эту сингу-лярную подсистему переменной Δ_r некоторым параметром, например нулем, последняя превращается в систему диффе-ренциальных уравнений, которая устойчива в окрестности значения Δ_{e0}, тогда для прове-дения динамического анализа исходной сис-темы (23) и (24) можно в первом приближении использовать более простую, чем исходная, так называемую *порождаю-щую подсистему.* Она получится из несин-гулярно возмущенной подсистемы (24) при замене входящей в нее переменной Δ_e изолированным корнем, $\Delta_{e0} = \varphi(\Delta_r)$.

Приняв во внимание (16), (17) для Φ_{0e}, C и $a_{m\bullet}$, а также (13) для f_{nn}, f_{nm} и (18) для a_{mn} и a_{mm}, имеем

$$\begin{aligned} &\Delta_{e10} = 0, \Phi_{oe}\Delta = a_{m\bullet} f_{01}\Delta = \\ &a_{mm}\left(A_{mn}A_{nn}^{-1} f_{n\bullet} + f_{m\bullet}\right)\Delta = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Норма матричного коэффициента $A_{mn}A_{nn}^{-1}$ при $f_{n\bullet}$ не может превышать величины $A_{mn}\ \ A_{nn}^{-1} < a_{nn}\ \ A_{nm}$, как следует из (21). Эта величина меньше μ^2, что видно из выражения (22). Тогда логично пренебречь в (25) членом $a_{mm}A_{mn}A_{nn}^{-1}$, и подсистема (25) с учетом невырожденности a_{mm} превратится в подсистему

$$f_{m\bullet}\Delta = 0. \quad (26)$$

Использовав (17) для $f_{m\bullet} = \left[f_{mn} \quad f_{mm} \right]$ и (13) для f_{mn}, f_{mm}, запишем систему (26) в виде

$$C_e\Delta_e + J_e^T p^T cpJ_g\Delta_g + J_e^T p^T cpJ_e\Delta_e = 0. \quad (27)$$

Откуда

$$\Delta_e = \left(C_e + J_e^T p^T cpJ_g\right)^{-1} J_e^T p^T cpJ_g\Delta_g. \quad (28)$$

Для формирования порождающей системы в системе (24) надо заменить вектор Δ_e, являющийся блоком вектора Δ, его представлением (28) через вектор Δ_r.

В разделе 3 публикации [9] было показано, что вектор $\Phi_{0r}\Delta$, входящий в (24) и представляемый в соответствии с (16), (17) в виде $\Phi_{0r}\Delta = a_{n\bullet}\left[f_{\bullet n} \quad f_{\bullet m} \right]\Delta$, при $\mu \to 0$ с большой точностью определяется как

$$\Phi_{0r}\Delta = a_{nn}\left(f_{nn}\Delta_r + f_{nm}\Delta_e \right). \quad (29)$$

После замены f_{nn} и f_{nm} их выражениями (13), замены Δ_e его представлением (28) и соот-ветствующих преобразований, имеем

$$\begin{aligned} f_{0r} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial X^i}{\partial \Delta_g}\right)^T K_p\left(\frac{\partial X^i}{\partial \Delta_g}\right) + \\ &\left(k_R + E\right) J_g^T C_e J_g - \\ &\left(k_R + E\right) J_g^T C_e (C_e + p^T cp)^{-1} C_e J_g \end{aligned} \quad (30)$$

Если положить матричные коэффициенты k и k_R скалярными положительными матрицами и учесть, что C_e – положительно-определенная матрица, то f_{or}. будет симметрической положительно-определенной матрицей. Действительно, все три слагаемые, образующие f_{or}, в силу своей структуры являются симметрическими матрицами, откуда следует симметричность f_{or}. Кроме того, первые два слагаемых – положительно-определенные матрицы, а третье слагаемое – отрицательно-определенная. Однако это слагаемое в сумме со вторым не может быть отрицательно-определенной матрицей, что следует из очевидного неравенства

$$C_e \geq C_e(C_e + p^T cp)^{-1} C_e.$$

Поэтому f_{or} симметрична и положительно определена.

Замена в (24) члена $\Phi_{0r}\Delta_r$ его выражением (29) дает следующее представление порождающей подсистемы уравнений для модели манипулятора в форме уравнения второго порядка:

$$a_{nn}^{-1}\ddot{\Delta}_r + {}_{nn}\ddot{\Delta}_r + f_{0r}\Delta_r = 0, \qquad (31)$$

где A_{nn} – диагональная положительно-определенная матрица, составленная из первых n строк матрицы $= k_F + k_V$.

В соответствии с приведенным ранее утверждением полученная система (31) позволяет в первом приближении анализировать динамику исходной системы (14), т.е. быть порождающей системой, если присоединенная система будет устойчивой.

Что касается порождающей системы, то ее устойчивость, а значит, и устойчивость анализируемой исходной системы, будут иметь место, так как матричный коэффициент B_{nn}, как и коэффициенты a_{nn}^{-1} и f_{0r}, – симметрические положительно-определенные матрицы. Присоединенная система получается из сингулярно возмущенной подсистемы (23), в которой переменная Δ_r, являющаяся блоком вектора $\Delta = \left(\Delta_r, \Delta_e\right)$, назначается параметром, например нулем: $\Delta_r = 0$.

Заменим в (23) матричный множитель Φ_{oe} его выражением (16), а входящие в него выражения матрицы $a_{m\bullet}$ и матрицы C – их представлениями (17) с последующим использованием формулы (13) для f_{mn}^I, f_{mn}^I и формулы (17) для a_{mn} и a_{mm}. Эти действия трансформируют (23) в следующую форму записи присоединенной подсистемы уравнений:

$$\begin{gathered}\mu\dot{\Delta}_{e1} = \\ -\mu T_0\Delta_{e1} - \Phi_{or}\ \ \Phi_{oe}^{-1} a_{mm}\left[\, f_{mm} + A_{mn}A_{nn}^{-1} f_{nm} \,\right]\Delta_e .\end{gathered} \qquad (32)$$

Член $A_{mn}A_{nn}^{-1} < a_{nn}\ \ A_{mn} < \mu^2$, как следует из (21). Поэтому в (32) слагаемым $A_{mn}A_{nn}^{-1} f_{nm}$ логично пренебречь при $\mu \to 0$. Тогда подсистема (32) в форме уравнений второго порядка примет вид

$$\mu a_{mm}\ddot{\Delta}_e + \mu B_{mm}\dot{\Delta}_e + \Phi_{or}\ \ \Phi_{oe}^{-1} f_{mm}\Delta_e = 0, \qquad (33)$$

где B_{mm} – диагональная положительно-определенная $m \times m$-матрица, составленная из последних m строк матрицы $B = k_F + k_V$.

Поскольку все матричные коэффициенты при переменных $\ddot{\Delta}_e$, $\dot{\Delta}_e$, Δ_e – положительно-определенные симметрические матрицы, включая f_{mm}, что следует из (15) для f_{mm}, то (33) описывает устойчивый процесс.

Полученный результат свидетельствует об удовлетворении условий теоремы Тихонова [11] для рассматриваемой системы уравнений (12) динамики модели робота, что дает право использовать для анализа динамики модели робота вместо системы уравнений (12) порож-дающую систему уравнений (31) поскольку, как показано выше, он описывает устойчивый процесс.

Заключение

В статье предложен и обоснован метод дистанционного управления космическим робо-том, предназначенным для выполнения в недетерминированной внешней среде разнообразных операций с предметами как свободно перемещаемыми в пространстве, так и имеющими голономные связи. Последнее характерно при выполнении сборочных операций наиболее востребованных в настоящее время при освоении космоса.

Метод базируется на использовании важной особенности, характеризующей каждую выполняемую операцию, – наличии паспорта выполняемой операции по взаимодействию рабочего инструмента робота с объектами внешней среды. Он включает закон изменения во времени вектора силы и момента взаимодействия, а также закон изменения вектора положения объекта в системе координат рабочего инструмента. Паспорт операции не зависит от позиции и ориентации объекта, с которым взаимодействует рабочий инструмент робота в базовой системе координат. Разработана структура позиционного силового управления роботом, синтезированы законы управления, определены особенности конструкции манипулятора, при которых обеспечивается устойчивость процесса управления, что гарантирует работоспособность предложенного метода.

Список литературы

1. *Kulakov F., Alferov G.V., Efimova P., Chernakova S., Shymanchuk D.* Modeling and Control of Robot Manipulators with the Constraints at the

Moving Objects // Intern. Conf. "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP). St. Petersburg, 2015. P. 102–105.
2. *Alferov G.V., Malafeyev O.A.* The Robot Control Strategy in Domain with Dynamical Obstacles // Lecture Notes in Computer Science. 1996. Vol. 1093. P. 211–217.
3. *Kulakov F., Alferov G., Efimova P.* Methods of Remote Control over Space Robots // Intern. Conf. on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading, St. Petersburg, 2015. P. 7106742.
4. *Kulakov F., Alferov G., Sokolov B., Gorovenko P., Sharlay A.* Dynamic analysis of space robot remote control system // AIP Conference Proceedings. St. Petersburg, 2018. Vol. 1959. P. 080014.
5. *Kulakov F., Sokolov B., Shalyto A., Alferov G.* Robot Master Slave and Supervisory Control with Large Time Delays of Control Signals and Feedback // Applied Mathematical Sciences. Vol. 10 (33–36). P. 1783–1796.
6. *Kulakov F., Alferov G., Sokolov B., Sharlay A.* Bilateral Remote Control over Space Manipulators // AIP Conference Proceedings. St. Petersburg, 2018. P. 150015.
7. *Kulakov F., Kadry S., Alferov G., Efimova P.* Remote Control of Space Robots Change-Adaptive in its External Environment // International Journal of Online and Biomedical Engineering, 2019. Vol. 15 (7). P. 84–98.
8. *Kulakov F.M.* Methods of Supervisory Remote Control over Space Robots // Journal of Computer and Systems Sciences Interna-tional. 2018. Vol. 57(5). C. 822–839.
9. *Кулаков Ф.М.* Методы супервизорного телеуправления космическими роботами // Известия Российской академии наук. Тео-рия и системы управления. 2018. № 5. С. 161–181.
10. *Ivanov G., Alferov G., Efimova P.* Integrability of nonsmooth onevariable functions // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017 – Proceedings, P. 7973965.
11. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных: мат. сб. 1952. Т. 31, № 3. С. 575–586.
12. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The structural study of limited invariant sets of relay stabilized system (Book Chapter) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. 2017. P. 101–164.
13. *Ivanov G., Alferov G., Gorovenko P., Sharlay A.* Estimation of periodic solutions number of first-order differential equations (2018) AIP Conference Proceedings. 1959. P. 080006.
14. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S.* Stability of linear systems with multitask right-hand member (Book Chapter) Stochastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering. 2018. P. 74–112.
15. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with non-linearity of hysteresis type AIP Conference Proceedings. 2017. 1863. P. 080003.
16. *Ivanov G., Alferov G., Sharlay A., Efimova P.* Conditions of asymptotic stability for linear homogeneous switched systems AIP Conference Proceedings, 2017. 1863, P 080002.
17. *Seifedine Kadry, Gennady Alferov, Gennady Ivanov, Artem Sharlay*. Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differential Equations, Mathematics. 2018. Vol. 6, № 9. P. 171, DOI: 10.3390/math 6090171.
18. *Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G., Sharlay, A.* About stability of selector linear differential inclusions AIP Conference Procee-dings, 2018. 2040. P. 150013. DOI: 10.1063/1.5079216.
19. *Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G., Sharlay, A.* Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements AIP Conference Proceedings, 2018. 2040. P. 150014. DOI: 10.1063/1.5079217.
20. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V., Selitskaya E.* A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis Mathe-matics. 2019. Vol. 7(8). P. 677.
21. *Seifedine Kadry, Gennady Alferov, Gennady Ivanov, Artem Sharlay* Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differen-tial Equations Mathematics. 2018. Vol. 6, № 9. P. 171.
22. *Кулаков Ф.М***.** Телеуправление космическими роботами // Известия РАН. ТиСУ. 2016. № 4. С. 141–192.

Remote control of robotic manipulator

F. M. Kulakov, G. V. Alferov, P. A. Efimova

Saint Petersburg State University; 35, Universitetsky prospekt, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia
kufelix@yandex.ru; +7-906-244-82-16

The article proposes and substantiates a method for remote control of a space robot designed to perform various operations with objects, both freely moving in space and having holonomic connections. The latter is typical during assembly operations that are most demanded at present in space exploration. The method is based on the use of an important feature that characterizes each operation performed - the presence of the so-called passport of the operation performed on the interaction of the working tool of the robot with environmental objects.

Keywords: *copying control; remote control; bilateral control; adaptive control; stability of control processes;*