

УДК 532.135; 539.3

## Перестройка волнообразного рельефа упругого слоя под действием нагрузки

Л. А. Комар, А. Л. Свистков, А. Ю. Беляев

Институт механики сплошных сред УрО РАН

Россия, 614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1

komar@icmm.ru; +7(342)2378315

Перспективной идеей на пути создания биосовместимых полимерных имплантатов является предложение использовать ионно-плазменную обработку поверхности, которая находится в контакте с биологической тканью. В результате этой обработки возникает карбонизированный нанослой, который не отторгается организмом. Если для изготовления медицинского изделия будет использован мягкий полимерный материал (например, биоинертный полиуретан), то возникает ряд проблем. Материал может сильно деформироваться при движении биологической ткани. При этом будут возникать изменяющиеся во времени напряжения в нанослое. Кроме того, возникающий при ионно-плазменной обработке карбонизированный слой имеет волнообразную поверхность, что свидетельствует о существовании напряжений в исходном состоянии. Целью данного исследования является математическое моделирование возможных перестроек тонкого упругого слоя. Полученные аналитические решения позволяют объяснить возможное поведение упругого слоя и условия потери устойчивости того или иного деформированного состояния. Показано, что в результате изменения нагрузок возможно появление новой ориентации волнообразного рельефа. Полученное решение может быть использовано для понимания возможных явлений, связанных с геометрическими изменениями нанослоев на мягких материалах.

**Ключевые слова:** тонкий упругий слой; напряженно-деформированное состояние; потеря устойчивости; волнообразный рельеф; изменение геометрии поверхности; ориентация волн.

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-4-21-29

### Введение

Модифицирование полимеров методом ионной имплантации приводит к существенному изменению свойств обработанной поверхности, благодаря которым открываются новые области их практического применения [1–7]. Приобретенные свойства в первую очередь зависят от энергии и дозы ионов. Высокая доза имплантации ионов приводит к карбонизации полимера [3, 7–8]. В этом случае, также известен факт формирования волн в карбонизированном слое [9].

Для объяснения причин их появления высказываются различные предположения [10–11]. Очевидно, что сформировавшийся волнообразный рельеф слоя может внести определенные коррективы при выборе области применения модифицированного таким образом полимера. Существуют случаи, когда неровность поверхности карбонизированного слоя играет положительную роль. Особенно это касается вопросов, связанных с повышением оценки биологической совместимости искусственных эндопротезов [6, 12–13].

В связи с этим заслуживает внимания ионно-плазменный метод обработки для создания одно- и двумерных волнообразных складок (wrinkling) на поверхности полимера [14–16].

© Комар Л. А., Свистков А. Л., Беляев А. Ю., 2019

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов № 13-01-96009 и № 16-08-00910.

При разных условиях нагружения морфологические характеристики волн (длина, амплитуда) и их направление могут отличаться.

Аналогичный механизм формирования волн проявляется при нагружении тонких упругих пленок на податливой подложке. Этому посвящено большое количество работ, демонстрирующих разнообразность характера этого процесса, причина проявления которого заключается в потере устойчивости [17–27].

В качестве условий потери устойчивости при формировании волн, как правило, используется некоторое критическое сжимающее напряжение или критические деформации [28–35].

Конечный результат этих работ заключается в определении количества волн, их длин и амплитуд в зависимости от значений приложенных нагрузок, а также условий, при которых тонкие пленки отслаиваются от подложки. Эволюция формирования волн наиболее полно отражается в работах, сочетающих экспериментальные и модельные данные [36–38].

В целом проблема формирования и перестройки волн имеет широкие рамки, и ее решение играет важную роль в различных отраслях промышленности [39–42].

В данной работе основное внимание сосредоточено на анализе возможных изменений рельефа тонкого упругого слоя. Предполагается, что он расположен на мягком эластомерном материале, влияние которого в первом приближении можно не учитывать.

Приведенные в данной статье уравнения могут описывать изменение волнообразного рельефа модифицированной полиуретановой пластины с карбонизированным нанослоем при приложении к ее торцам внешней нагрузки. Уравнения получены на основе соотношений потери устойчивости тонких пластин, с помощью которых определены области потери устойчивости в изолированном нанослое и, как результат этого, формирование волн разной направленности. Вывод приведенных уравнений сопровождается математическими выкладками. В уравнениях используются значения компонент вектора перемещений в каждой точке карбонизированного слоя. Кроме этого, приведенные условия потери устойчивости не только контролируют формирование волн, но и условия их исчезновения.

## 1. Моделирование условий потери устойчивости тонкой упругой пластины при деформировании

### 1.1. Напряженно-деформированное состояние пластинки при деформировании

Рассмотрим задачу о потере устойчивости и появлении волн при сжатии по боковым граням тонкой пластинки, расположенной в горизонтальной плоскости. На верхней и нижней границе пластинки, нормаль которой ориентирована вертикально, не действуют напряжения. Начало отсчета находится в центре пластинки. Две оси координат расположены в горизонтальной плоскости. Третья ось направлена вертикально вверх.

Задана следующая геометрия: пластинка в ненагруженном состоянии имеет форму параллелограмма, в основании которого лежит квадрат со стороной  $2L$ . Толщина пластины равна  $2h$ . Боковые грани задаются участками плоскостей, которые определяются уравнениями:  $x_1 \in [-L, L]$ ,  $x_2 \in [-L, L]$ ,  $x_3 \in [-h, h]$ .

Полагаем, что точки с координатами  $x_3 = 0$  на боковых гранях пластинки не могут перемещаться в вертикальном направлении, то есть соответствующая им компонента перемещений  $u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$  равна 0:

$$u_3(-L, x_2, 0) = u_3(L, x_2, 0) = u_3(x_1, -L, 0) = u_3(x_1, L, 0) = 0.$$

Для построения уравнений рассмотрим ситуации, когда деформации материала по  $j$ -й оси постоянны, а вдоль  $i$ -й оси происходит появление волнообразной поверхности, при этом значения параметров могут быть следующие:  $i=1, j=2$  или  $i=2, j=1$ .

В расчетах будем использовать безразмерные величины:

$$\tilde{l}_i = \frac{l_i}{h}, \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{h}, \quad \tilde{u}_i = \frac{u_i}{h},$$

где  $l_i$  – длина волны;  $u_i$  – перемещения. Приведенные безразмерные величины позволяют легко определить, какие слагаемые в уравнениях имеют малые значения, которыми можно пренебречь. Особенно следует отметить факт, что пластинка имеет малую толщину  $2h$ . Поэтому значение характеристик длин, появляющихся на поверхности пластинки волн  $\tilde{l}_i$ , будет очень большим, что позволяет в дальнейшем упростить математические выражения.

Для безразмерных величин компоненты тензора деформации вычисляются, как и в случае использования размерных величин:

$$\varepsilon_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right) \right].$$

С помощью безразмерной величины  $\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu}$

закон Гука представляется в виде

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\lambda}{2\mu} (\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{\varepsilon}_{33}) \delta_{ij} + \tilde{\varepsilon}_{ij},$$

где  $\sigma_{ij}$  – напряжения;  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера;  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе.

Покажем, что нужное нам аналитическое решение компонент вектора перемещений в слое могут вычисляться с помощью выражений:

$$\tilde{u}_j = \gamma_j \tilde{x}_j,$$

$$\tilde{u}_i = \tilde{l}_i^2 \delta_i \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda}} \sin\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3\right) + \gamma_i \tilde{x}_i,$$

$$\tilde{u}_3 = \tilde{l}_i^2 \delta_i \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3\right) - \frac{\lambda(\gamma_i + \gamma_j)}{\lambda+2\mu} \tilde{x}_3,$$

где  $\gamma_j$  – малые деформации по  $j$ -й оси;  $\gamma_i$  – малые деформации по  $i$ -й оси;  $\delta_i$  – некоторая малая величина, позволяющая в дальнейшем использовать теорию малых упругих деформаций. Очевидно, что компоненты тензора деформации  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  и  $\tilde{\varepsilon}_{3j}$  равны нулю.

Из равенств

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_3} = \pi \tilde{l}_i \delta_i \sin\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3\right),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_i} = -\pi \tilde{l}_i \delta_i \sin\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \cos\left(\frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3\right),$$

следует, что компонента  $\tilde{\varepsilon}_{i3}$  также равна нулю.

Ненулевыми являются только компоненты:

$$\tilde{\varepsilon}_{jj} = \gamma_j,$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ii} = \pi \tilde{l}_i \delta_i \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda}} \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3\right) + \gamma_i,$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = -\pi \tilde{l}_i \delta_i \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3\right) - \frac{\lambda(\gamma_i + \gamma_j)}{\lambda+2\mu}.$$

Первый инвариант тензора деформаций определяется выражением

$$\tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{\varepsilon}_{33} = \frac{2\pi \mu \tilde{l}_i \delta_i}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3\right) + \frac{2\mu(\gamma_i + \gamma_j)}{\lambda+2\mu}.$$

Легко убедиться, что в данном решении  $\tilde{\sigma}_{33} = 0$ . Ненулевыми компонентами тензора напряжений являются следующие:

$$\tilde{\sigma}_{jj} = \pi \tilde{l}_i \delta_i \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3\right) + \frac{\lambda \gamma_i + 2(\lambda + \mu) \gamma_j}{\lambda + 2\mu},$$

$$\tilde{\sigma}_{ii} = 2\pi \tilde{l}_i \delta_i \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3\right) + \frac{2(\lambda + \mu) \gamma_i + \lambda \gamma_j}{\lambda + 2\mu}.$$

При больших значениях  $\tilde{l}_i$  с высокой точностью выполняются равенства:

$$\sin\left(\frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3\right) \approx \frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{\tilde{l}_i} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}} \tilde{x}_3\right) \approx 1.$$

В этом случае компоненты перемещений можно представить в виде:

$$\tilde{u}_j = \gamma_j \tilde{x}_j,$$

$$\tilde{u}_i = \pi \tilde{l}_i \delta_i \sin\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \tilde{x}_3 + \gamma_i \tilde{x}_i,$$

$$\tilde{u}_3 = \tilde{l}_i^2 \delta_i \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) - \frac{\lambda(\gamma_i + \gamma_j)}{\lambda + 2\mu} \tilde{x}_3,$$

ненулевые компоненты тензора деформаций – в виде:

$$\tilde{\varepsilon}_{jj} = \gamma_j,$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ii} = \pi^2 \delta_i \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \tilde{x}_3 + \gamma_i,$$

$$\tilde{\varepsilon}_{33} = -\frac{\pi^2 \lambda \delta_i}{\lambda + 2\mu} \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \tilde{x}_3 - \frac{\lambda(\gamma_i + \gamma_j)}{\lambda + 2\mu},$$

а ненулевые компоненты тензора напряжений будут равны:

$$\tilde{\sigma}_{jj} = \frac{\pi^2 \lambda \delta_i}{\lambda + 2\mu} \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \tilde{x}_3 + \frac{\lambda \gamma_i + 2(\lambda + \mu) \gamma_j}{\lambda + 2\mu}$$

$$\tilde{\sigma}_{ii} = \frac{2\pi^2 \delta_i (\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \tilde{x}_3 + \frac{2(\lambda + \mu) \gamma_i + \lambda \gamma_j}{\lambda + 2\mu}$$

Это означает, что в уравнении равновесия  $\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial x_k} = 0$  для данного напряженно-деформированного состояния необходимо только проверить выполнение равенства

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Покажем, что равенство (1) в рассматриваемом напряженно-деформированном состоянии пластинки выполняется приближенно. Для этого нужно установить, что при изменении координаты положения точек материала по  $i$ -й оси на интервале от  $x_i$  до  $x_i + 2h$  величина  $\sigma_{ii}$  практически не меняет своего значения. Имеется только зависимость от координаты  $x_3$ . Это будет означать, что на масштабах, соизмеримых с толщиной пластинки  $2h$ , зависимость компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ii}$  от координаты  $x_i$  мала.

Действительно, ввиду малости параметра  $h$  получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}(x_i + 2h, x_3) - \sigma_{ii}(x_i, x_3) &\approx 2h \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} = \\ &= 4\mu \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ii}}{\partial \tilde{x}_i} = -\frac{4\mu \pi c \delta_i}{\tilde{l}_i} \sin\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \tilde{x}_3, \end{aligned}$$

где

$$c = \frac{2\pi^2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}.$$

Отсюда следует, что при больших значениях  $\tilde{l}_i$  выполняется условие

$$\sigma_{ii}(x_i + 2h, x_3) - \sigma_{ii}(x_i, x_3) \approx 0.$$

Для сравнения выпишем формулу, показывающую, как меняется значение компоненты  $\sigma_{ii}$  вдоль толщины пластинки:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}(x_i, h) - \sigma_{ii}(x_i, -h) &\approx 4\mu \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ii}}{\partial \tilde{x}_3} = \\ &= 4\mu c \delta_i \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right). \end{aligned}$$

Из формулы видно, что изменение компоненты  $\sigma_{ii}$  вдоль третьей оси координат не является малой величиной.

## 1.2. Моменты, действующие на элемент пластинки

Определим действующие моменты на элемент пластинки, координаты точек которого изменяются по  $i$ -й оси от  $x_i^0$  до  $x_i^0 + \Delta x_i$  и по  $j$ -й оси от  $x_j^0$  до  $x_j^0 + \Delta x_j$ . Рассмотрим случай отсутствия перемещений по  $j$ -й оси и, когда ненулевыми компонентами тензора напряжений являются только  $\tilde{\sigma}_{ii}$  и  $\tilde{\sigma}_{jj}$ .

Очевидно, что действующий на элемент пластинки момент, может иметь ненулевую компоненту только по  $j$ -й оси. Абсолютная величина этой компоненты вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} |M_j| = & \left| \Delta x_j \int_{-h}^h (x_3 + u_3(x_i^0 + \Delta x_i, x_3)) \sigma_{ii}(x_i^0 + \Delta x_i, x_3) dx_3 - \right. \\ & \left. - \Delta x_j \int_{-h}^h (x_3 + u_3(x_i^0, x_3)) \sigma_{ii}(x_i^0, x_3) dx_3 \right|. \end{aligned}$$

С учетом малости величины  $\Delta x_i$  получаем

$$|M_j| = \left| \Delta x_i \Delta x_j \int_{-h}^h \frac{\partial}{\partial x_i} ((x_3 + u_3) \sigma_{ii}) dx_3 \right|.$$

При использовании безразмерных величин это выражение принимает вид

$$|M_j| = \left| 2\mu h^3 \Delta \tilde{x}_i \Delta \tilde{x}_j \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} ((\tilde{x}_3 + \tilde{u}_3) \tilde{\sigma}_{ii}) d\tilde{x}_3 \right|.$$

Условие равновесия требует равенства нулю действующего на пластинку момента. То есть, должно выполняться требование

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} ((\tilde{x}_3 + \tilde{u}_3) \tilde{\sigma}_{ii}) d\tilde{x}_3 = 0. \quad (2)$$

Это приводит к следствию о возможном появлении волнообразного рельефа поверхности пластинки. Рассмотрим, как это происходит. Воспользуемся выведенными ранее формулами для величин  $\tilde{u}_3$  и  $\tilde{\sigma}_{ii}$ .

Равенство (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left\{ \left[ \tilde{x}_3 + \tilde{l}_i^2 \delta_i \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) - \frac{\lambda(\gamma_i + \gamma_j)}{\lambda + 2\mu} \tilde{x}_3 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{2\pi^2 \delta_i (\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \tilde{x}_3 + \frac{2(\lambda + \mu) \gamma_i + \lambda \gamma_j}{\lambda + 2\mu} \right] \right\} d\tilde{x}_3 = 0. \end{aligned}$$

Интеграл от нечетной функции относительно аргумента  $\tilde{x}_3$  на интервале от  $-1$  до  $1$  равен нулю. Отбросим последнее слагаемое в квадратных скобках в подынтегральном выражении из-за наличия в нем произведения малых величин  $\delta_i(\gamma_i + \gamma_j)$ .

В результате получим условие

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[ \frac{2\pi^2 \delta_i(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \tilde{x}_3^2 + \frac{\tilde{l}_i^2 \delta_i [2(\lambda + \mu)\gamma_i + \lambda\gamma_j]}{\lambda + 2\mu} \cos\left(\frac{\pi \tilde{x}_i}{\tilde{l}_i}\right) \right] d\tilde{x}_3 \approx 0.$$

Очевидно, что выполняется оно только в том случае, когда будет справедливо равенство

$$2\pi^2(\lambda + \mu) = -3\tilde{l}_i^2 [2(\lambda + \mu)\gamma_i + \lambda\gamma_j],$$

которое можно переписать в другом виде

$$\gamma_i = -\frac{\pi^2}{3\tilde{l}_i^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\gamma_j.$$

Это означает следующее. Чтобы на границах пластинки компоненты перемещений  $\tilde{u}_3$  центральной плоскости (для которой  $\tilde{x}_3 = 0$ ) равнялись нулю,

$$\tilde{u}_3(-L, 0) = \tilde{u}_3(L, 0) = 0,$$

необходимо выполнения условия

$$\frac{\tilde{L}}{\tilde{l}_i} = N - \frac{1}{2}, \quad (3)$$

где  $N$  – количество полуволен;  $\tilde{L}$  – суммарная длина полуволен. Произойти появление такого количества полуволен на поверхности пластинки может, когда деформация сжатия по  $i$ -й оси равна

$$\gamma_i = -\frac{\pi^2}{3\tilde{L}^2} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\gamma_j. \quad (4)$$

Их существование возможно только при выполнении неравенства

$$\gamma_i \leq -\frac{\pi^2}{3\tilde{L}^2} \left(N - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\gamma_j. \quad (5)$$

## 2. Иллюстрация образования волн на поверхности полиуретановой пластинки

### 2.1. Формирование волны

При  $N=1$  неравенство (5) примет вид

$$\gamma_i \leq -\frac{\pi^2}{12\tilde{L}^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\gamma_j. \quad (6)$$

Построим систему координат на плоскости. По вертикальной оси будем откладывать значения  $\gamma_j$ , по горизонтальной –  $\gamma_i$ . На

оси  $\gamma_i$  отметим значение  $-\frac{\pi^2}{12\tilde{L}^2}$ , удовлетворяющее неравенству  $\gamma_i \leq -\frac{\pi^2}{12\tilde{L}^2}$ , в которое преобразуется неравенство (6) при  $\gamma_j=0$ . На

оси  $\gamma_j$  отметим значение  $-\frac{\pi^2(\lambda + \mu)}{6\lambda\tilde{L}^2}$ , удовлетворяющее неравенству  $\gamma_j \geq -\frac{\pi^2(\lambda + \mu)}{6\lambda\tilde{L}^2}$ , в которое преобразуется неравенство (6) при  $\gamma_i=0$ . Подчеркнем, что в начале статьи было

сказано, что значения параметров может быть следующее:  $i=1, j=2$  или  $i=2, j=1$ . Это означает, что образование одной волны возможно, если значения  $\gamma_i$  и  $\gamma_j$  будут находиться в следующих пределах:

$$-\frac{\pi^2(\lambda + \mu)}{6\lambda\tilde{L}^2} \leq \gamma_i \leq -\frac{\pi^2}{12\tilde{L}^2}, \quad (7)$$

и

$$-\frac{\pi^2(\lambda + \mu)}{6\lambda\tilde{L}^2} \leq \gamma_j \leq -\frac{\pi^2}{12\tilde{L}^2}. \quad (8)$$

На рис. 1 показаны области значений величин  $\gamma_i$  и  $\gamma_j$ , при которых возможно появление и исчезновение волн. Перемещение из точки А в точку Б моделирует ситуацию, при которой фиксируется нулевая деформация по  $j$ -й оси и производится сжатие по  $i$ -й оси с учетом выполнения условия (7). В результате появится волна вдоль  $i$ -й оси. Перемещение из точки Б в точку В приводит к исчезновению волны. В точку В, отмеченную на рис. 1, можно прийти другим путем. Для этого рассмотрим условия нагружения, представленные на рис. 2. Перемещение из точки А в точку Г моделирует ситуацию, при которой фиксируется нулевая деформация по  $i$ -й оси и производится растяжение по  $j$ -й оси.

Наблюдается отсутствие волны. Перемещение из точки Г в точку В моделирует сжатие по  $i$ -й оси, но его недостаточно, чтобы появилась волна. Дальнейшее сжатие по  $i$ -й оси (перемещение из точки В в точку Д) с учетом выполнения условия (7) приводит к появлению волн по  $i$ -й оси.

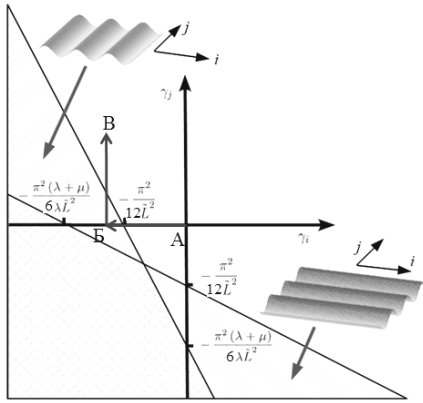


Рис. 1. Иллюстрация условий появления и исчезновения волн. Волна по  $i$ -й оси появляется за счет сжатия по  $i$ -й оси (путь от точки А до точки В). Ее исчезновение происходит за счет растяжения по  $j$ -й оси (путь от точки В до точки В)

В точку В, отмеченную на рис. 1, можно прийти другим путем. Для этого рассмотрим условия нагружения, представленные на рис. 2. Перемещение из точки А в точку Г моделирует ситуацию, при которой фиксируется нулевая деформация по  $i$ -й оси и производится растяжение по  $j$ -й оси. Наблюдается отсутствие волн. Перемещение из точки Г в точку В моделирует сжатие по  $i$ -й оси, но его недостаточно, чтобы появилась волна. Дальнейшее сжатие по  $i$ -й оси (перемещение из точки В в точку Д) с учетом выполнения условия (7) приводит к появлению волн по  $i$ -й оси.

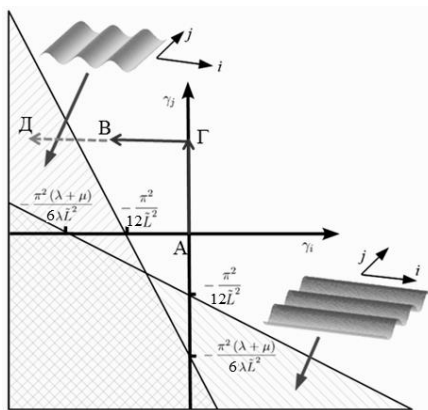


Рис. 2. Иллюстрация условий отсутствия и появления волн. Растяжение по  $j$ -й оси (путь от точки А до точки Г) и сжатие по  $i$ -й оси (путь от точки Г до точки В) не приводит к появлению волн. Дальнейшее сжатие по  $i$ -й оси приводит к появлению волн вдоль  $i$ -й оси (путь от точки В до точки Д)

Рассмотрим ситуацию появления волн в любом направлении (рис. 3).

Перемещение от точки А до точки Е моделирует сжатие нанослоя в обоих направлениях при одновременном удовлетворении неравенств (7) и (8). Затем, если материал подвергнуть растяжению (путь от точки Е до точки Ж), возможно, что волна поменяет направление.

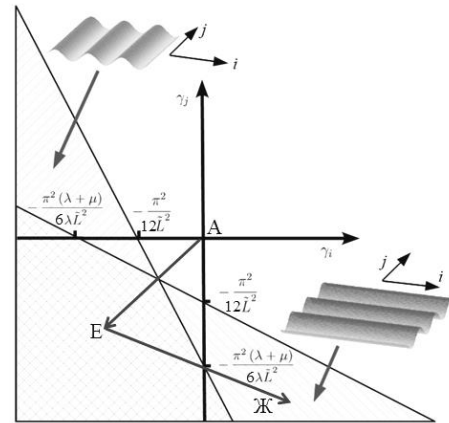


Рис. 3. Иллюстрация условий появления волн в любом направлении (путь от точки А до точки Е) с возможностью изменения своей направленности (путь от точки Е до точки Ж)

## 2.2. Условия формирования $m$ полуволн вдоль $i$ -й оси и $n$ полуволн вдоль $j$ -й оси

Рассмотрим случай, при котором вдоль  $i$ -й оси будет формироваться  $m$  полуволн, а вдоль  $j$ -й оси  $n$  полуволн.

Неравенство (5) приобретет вид

$$\gamma_i \leq -\frac{\pi^2}{3\tilde{L}^2} \left( m - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \gamma_j \quad (9)$$

или

$$\gamma_j \leq -\frac{\pi^2}{3\tilde{L}^2} \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \gamma_i \quad (10)$$

По аналогии с выводами условий (7) и (8) получаем условия формирования  $m$  полуволн вдоль  $i$ -й оси и  $n$  полуволн вдоль  $j$ -й оси:

$$-\frac{2\pi^2(\lambda + \mu)}{3\tilde{L}^2\lambda}\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \gamma_i \leq -\frac{\pi^2}{3\tilde{L}^2}\left(m - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$-\frac{2\pi^2(\lambda + \mu)}{3\tilde{L}^2\lambda}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \gamma_j \leq -\frac{\pi^2}{3\tilde{L}^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2.$$

### Заключение

Потеря устойчивости тонкого упругого слоя возникает при сжатии вдоль боковых граней. Но на условия возникновения волнообразной поверхности вдоль одной оси существенно влияют деформации вдоль другой оси. Появление волнообразной поверхности может происходить, в том числе и при растяжении пластинки вдоль одной оси, если при этом оно сопровождается сжатием вдоль другой оси. В работе получены формулы, позволяющие определить границы области, в которых возможны перестройки направления волн при деформировании материала.

### Список литературы

1. Lee E.H., Rao G.R., Lewis M.B., Mansur L.K. Ion beam application for improved polymer surface properties. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. 1993. Vol. 74, № 1–2. P. 326–330.
2. Begishev V., Gavrilov N., Mesyats G., Klyachkin Y., Kondyurina I., Osargina T., Kondyurin A. Modification of polyurethane endoprosthetics surface by pulsed ion beam. Proceedings of 12–th International Conference on High-Power Particle Beams. 1998. P. 997–1000.
3. Kondyurin A.V., Maitz M.F., Romanova V.A., Begishev V.P., Kondyurina I.V., Guenzel R. Drug release from polyurethane coating modified by plasma immersion ion implantation // J. Biomaterials Science. Polymer Edition. 2004. Vol. 15, № 2. P. 145–159.
4. Remeeva E.A., Rozanova I.B., Elinson V.M., Sevast'ianov V.I. Vliianie fiziko-khimicheskikh svoistv nanostrukturirovannoi poverkhnosti politetraftoretilena na kharakter ego vzaimodeistviia s syvorotochnym al'buminom i trombotsitami cheloveka [Influence of the physicochemical properties of nanostructured polytetrafluoroethylene surface on the nature of its interaction with serum albumin and human platelets]. Perspektivnye materialy. 2007. № 5. P. 63–71.
5. Grigor'ev F.I. Ionno-plazmennaya obrabotka polimernykh materialov v tekhnologii mikroelektroniki [Ion-plasma processing of polymeric materials in microelectronics technology]: Uchebnoe posobie of Mosk. gos. in-t elektroniki i matematiki. 2008. 36 p.
6. Alekhin A.P., Boleiko G.M., Gudkova S.A., Markeev A.M., Sigarev A.A., Toknova V.F., Kirilenko A.G., Lapshin R.V., Kozlov E.N., Tetiukhin D.V. Sintez biosovmestimykh poverkhnostei metodami nanotekhnologii [Synthesis of biocompatible surfaces by nanotechnology methods]. Rossiiskie nanotekhnologii. 2010. Vol. 5, № 9–10. P. 128–136.
7. Bykov D.V., Grigor'ev F.I., Lysenko A.P., Strogankova N.I. Mekhanizm i kinetika formirovaniia struktury i travleniia tonkikh plenok foto- i elektronorezistov pri obluchenii ionami srednikh energii [The mechanism and kinetics of the formation of the structure and etching of thin films of photo- and electron-resists under irradiation with medium-energy ions]. Fizika i khimiia obrabotki materialov. 2014. Vol. 2. P. 5–8.
8. Sviridov D.V. Khimicheskie aspekty implantatsii vysokoenergeticheskikh ionov v poli-mernye materialy [Chemical aspects of the implantation of high-energy ions into polymeric materials]. Uspekhi khimii. 2002. Vol. 71, № 4. P. 363–377.
9. Morozov I.A., Mamaev A.S., Osorgina I.V., Beliaev A.Y., Izumov R.I., Oschepkova T.E. Soft polyurethanes treated by plasma immersion ion implantation: structural-mechanical properties of surface modified layer // J. Appl. Polym. Sci. 2017. doi:10.1002/app.45983.
10. Svistkov A.L., Solod'ko V.N., Beliaev A.Iu., Izumov R.I., Terpugov V.N., Osorgina I.V., Kondyurin A.V. Issledovanie osobennostei rel'efa poverkhnosti uglerodnogo nanosloia na granitse poliuretanovogo implantata posle ionno-plazmennoi obrabotki [Investigation of the surface relief features of carbon nanolayer at the border of a polyurethane implant after ion-plasma treatment] // Vestnik Permskogo Nauchnogo Tsentra Uro RAN. 2017. № 4. P. 33–37.
11. Beliaev A.Yu., Svistkov A.L. Mechanisms influencing the formation of the carbonized layer relief on the polymer surface after the ion-

- plasma treatment modeling. *Materials Science Forum*. 2018. Vol. 938. P. 148–155.
12. *Morozov I.A., Kamenetskikh A.S., Izumov R.I., Scherban M.G.* The study of island carbon coating on nitrogen-activated polyurethane surface // *J. Physics: Conf. Series*. 2018. doi:10.1088/1742-6596/1134/1/012042.
  13. *Komar L.A., Svistkov A.L., Kondyurin A.V.* Model of Controlled Drug Release from the Polymer Implant. *Materials Science Forum*. 2018. Vol. 938. P. 139–147.
  14. *Moon M.W., Vavziri A.* Surface modification of polymers using a multi-step plasma-treatment. *Scripta Materialia*. 2009. Vol. 60. P. 44–47.
  15. *Bowden N., Huck W. T. S., Paul K.E., Whitesides G.M.* The controlled formation of ordered, sinusoidal structures by plasma oxidation of an elastomeric polymer. *Applied Physics Letters*. 1999. Vol. 75, № 17. P. 2557–2559.
  16. *Kulikov A.N., Kulikov D.A.* Formirovanie volnoobraznykh nanostruktur na poverkhnosti ploskikh podlozhek pri ionnoi bombardirovke [Formation of wave-like nanostructures on the surface of flat substrates during ion bombardment]. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematika i Matematicheskoi Fiziki*. 2012. Vol. 52, № 5. P. 930–945.
  17. *Shin T.K., Ho J.R., Liao H.Y., Chen C.F., Liu C.Y.* Fabrication of optical gratings by shrinkage of a rubber material. *Thin Solid Films*. 2008. Vol. 516. P. 5339–5343.
  18. *Pan K., Ni Y., He L., Huang R.* Nonlinear analysis of compressed elastic thin films on elastic substrates: From wrinkling to buckle-delamination // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51. P. 3715–3726.
  19. *Huang Z., Hong W., Suo Z.* Evolution of wrinkles in hard films on soft substrates. *Physical Review*. 2004. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.030601.
  20. *Mei H., Landis C.M., Huang R.* Concomitant wrinkling and buckle-delamination of elastic thin films on compliant substrates. *Mechanics of Materials*. 2011. Vol. 43. P. 627–642.
  21. *Cerda E., Mahadevan L.* Geometry and Physics of Wrinkling. *Physical Review Letters*. 2003, DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.074302.
  22. *Tarasovs S., Andersons J.* Buckling of a coating strip of finite width bonded to elastic half-space. *International Journal of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45. P. 593–600.
  23. *Zhuo L., Zhang Y.* The mode-coupling of a stiff film/compliant substrate system in the post-buckling range // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. Vol. 53. P. 28–37.
  24. *Zang J., Zhao X., Cao Y., Hutchinson J.W.* Localized ridge wrinkling of stiff films on compliant substrates // *J. Mech. Phys. Solids*. 2012. Vol. 60. P. 1265–1279.
  25. *Noroozi M.* Mechanical Instability of Thin Solid Film Structures. *Electronic Thesis and Dissertation Repository*. 2012. 187 p.
  26. *Ebata Y.* Bending, Wrinkling, and Folding of Thin Polymer Film/Elastomer Interfaces. *Open Access Dissertations*. 2013. 114 p.
  27. *Xu F., Koutsawa Y., Potier-Ferry M., Belouettar S.* Instabilities in thin films on hyperelastic substrates by 3D finite elements // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. Vol. 69–70. P.71–85.
  28. *Allen H.G.* Analysis and design of structural sandwich panels. N.Y.: Pergamon, 1969. 283 p.
  29. *Huang Z.Y., Hong W., Suo Z.* Nonlinear analyses of wrinkles in a film bonded to a compliant substrates // *J. Mech. Phys. Solids*. 2005. Vol. 53, № 9. P. 2101–2118.
  30. *Chen X., Hutchinson J. W.* Herringbone buckling patterns of compressed thin films on compliant substrates // *J. Appl. Mech.* 2004. Vol. 71. P. 597–603.
  31. *Chung J.Y., Nolte A.J., Stafford C. M.* Surface wrinkling: a versatile platform for measuring thin-film properties. *Advanced Materials*. 2011. Vol. 23. P. 349–368.
  32. *Nayyar V., Ravi-Chandar K., Huang R.* Stretch-induced stress patterns and wrinkles in hyperelastic thin sheets // *International Journal of Solids and Structure*. 2011. Vol. 48. P. 3471–3483.
  33. *Wong Y.W., Pellegrino S.* Wrinkled membranes // *J. Mechanics of Materials and Structures*. 2006. Vol. 1, № 1. P. 27–61.
  34. *Duan W.H., Gong K., Wang Q.* Controlling the formation of wrinkles in a single layer graphene sheet subjected to in-plane shear. *Carbon*. 2011. Vol. 49. P. 3107–3112.
  35. *Kurguzov V.D.* Modelirovanie otsloeniia tonkikh plenok pri szhatii [Simulation of thin film separation under compression]. *Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred*. 2014. Vol. 7, № 1. P. 91–99.



36. Huang R. Kinetic wrinkling of an elastic film on a viscoelastic substrate // *J. Mechanics and Physics of Solids*. 2005. Vol. 53. P. 63–89.
37. Vella D., Bico J., Boudaoud A., Roman B., Reis P.M. The macroscopic delamination of thin films from elastic substrates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2009. Vol. 106, № 27. P. 10901–10906.
38. Kim T.Y., Puntel E., Fried E. Numerical study of the wrinkling of a stretched thin sheet // *International Journal of Solids and Structures*. 2012. Vol. 49. P. 771–782.
39. Shugurov A.R., Panin A.V. Mekhanizmy periodicheskoi deformatsii sistemy “plenka–podlozhka” pod deistviem szhimaiushchikh napriazhenii [Mechanisms of periodic deformation of three-layer plates of functional-gradient material] *Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2013. Vol. 54, № 5. P. 187–198.
40. Sun J.Y., Xia S., Moon M.W., Oh K.H., Kim K.S. Folding wrinkles of a thin stiff layer on a soft substrate. *Proceedings of the Royal Society A*. 2012. Vol. 468. P. 932–953.
41. Duan W. H., Gong K., Wang Q. Controlling the formation of wrinkles in a single layer graphene sheet subjected to in-plane shear. *Carbon*. 2011. Vol. 49. P. 3107–3112.

## The restructuring of the elastic layer wave-like relief under the load

**L. A. Komar, A. L. Svistkov, A. Yu. Belyaev**

Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS,

Laboratory of Micromechanics of Structurally Inhomogeneous Media;

1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia

komar@icmm.ru; +7(342)2378315

A promising direction in creating biocompatible polymer implants is using ion-plasma treatment of surface being in contact with biological tissues. This treatment allows production of implants with a carbonized nanolayer which does not provoke rejection. However, some problems arise when a soft polymeric material, e.g. bio-inert polyurethane, is used for the manufacture of this medical product. The material can be severely deformed by the movement of biological tissue, which causes the occurrence of time-varying stresses in the nanolayer. Moreover, the carbonized layer emerging in course of the ion-plasma treatment has a wave-like surface, which is an indication of initial stresses. This paper focuses on mathematical modeling of possible rearrangements of a thin elastic layer. The obtained analytical solutions provide an explanation for the behavior of the elastic layer and for the conditions of loss in stability of one or another deformed state. It has been found that changes in loads may provoke a new orientation of the wave-like relief. The solution presented in the paper can be used to gain better understanding of the phenomena related to geometrical changes in nanolayers formed on soft materials.

**Keywords:** *thin elastic layer; stress-strain state; stability loss; wave-like relief; surface geometry change; wave orientation.*