

УДК 519.7

Коррекция полета тяжелой материальной точки в среде с сопротивлением при наличии геометрических ограничений на дополнительные управления

С. В. Лутманов, О. А. Хотько

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
mru@psu.ru; (342)239-63-09

Данная работа является продолжением цикла статей [5–7], посвященных коррекции возмущенного полета управляемой тяжелой материальной точки с целью выхода ее на базовый закон движения. Возмущение полета вызвано неточным соблюдением начальных условий, а коррекция движения производится дополнительными управлениями, входящими в дифференциальные уравнения движения аддитивно базовым управлениями. В отличие от работ [5–6] здесь считается, что на параметры дополнительного управления наложены геометрические ограничения в форме включения в некоторое выпуклое компактное множество. Показано, что если геометрические ограничения не слишком обременительны, то коррекция движения может быть успешно осуществлена.

Ключевые слова: базовое движение; возмущенное движение; программное управление; коррекция полета; критерий качества.

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-3-56-64

1. Уравнения движения управляемой точки и требования к кинематике полета

В работе [5] были выведены дифференциальные уравнения управляемого полета тяжелой материальной точки в однородном поле тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости (см. рис. 1).

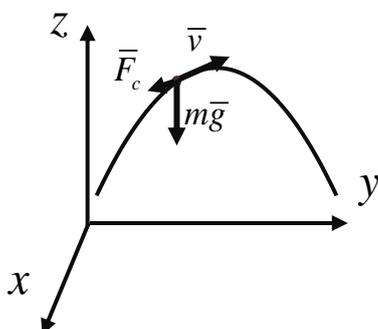


Рис. 1

Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \cdot \\ &\cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + v_1, \\ m\ddot{y} &= -k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \cdot \\ &\cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + v_2, \\ m\ddot{z} &= -k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \cdot \\ &\cdot \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - mg + v_3, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_1, \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_2, \\ \ddot{z} &= -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - g + \frac{1}{m} v_3, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где z – вертикальная, x, y – горизонтальные, координаты точки, m – ее масса, g – ускорение силы тяжести, $k = const$ – коэффициент пропорциональности, а

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ – вектор управляющих параметров. К кинематике полета предъявляются следующие требования.

Движение начинается в момент времени t_0 и заканчивается в момент времени $T > t_0$ на поверхности земли в положении, близком к точке (x_T, y_T, z_T) . При этом полет должен происходить на высоте не менее $\varepsilon > 0$ (за исключением заключительной фазы полета) и не более $2\varepsilon > 0$ от поверхности земли. Начальное положение и начальные скорости точки заранее не определены. Про них лишь известно, что они удовлетворяют условиям

$$x_0 \approx 0, y_0 \approx 0,$$

$$z_0 \in [\varphi(x_0, y_0) + \varepsilon, \varphi(x_0, y_0) + 2\varepsilon],$$

$$\dot{x}_0 \approx \frac{x_T}{T-t_0}, \dot{y}_0 \approx \frac{y_T}{T-t_0}, \dot{z}_0 \approx \frac{z_T}{T-t_0},$$

где $\varphi: R^2 \rightarrow R^1$ – гладкая функция двух переменных, моделирующая рельеф местности. Точные значения начальных условий $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ становятся известными только в момент старта. Управление движением точки будем осуществлять в классе программных стратегий.

Определение 1. Произвольная интегрируемая вектор-функция $v: [t_0, T] \rightarrow R^3$, называется программным управлением точкой на промежутке времени $[t_0, T]$.

В статье решается следующая задача управления полетом точки.

Задача. Построить программное управление $v^0: [t_0, T] \rightarrow R^3$ материальной точкой, которое обеспечивало бы выполнение требований, предъявляемых к кинематике полета.

2. Базовый кинематический закон движения точки и базовое программное управление

Введем понятие базового закона движения точки.

Определение 2. Кинематический закон движения точки

$$x = \hat{x}(t), y = \hat{y}(t), z = \hat{z}(t) \quad t \in [t_0, T].$$

будем называть базовым законом движения, если

$$\hat{x}(t_0) = 0, \hat{y}(t_0) = 0,$$

$$\hat{z}(t_0) \in [\varphi(x_0, y_0) + \varepsilon, \varphi(x_0, y_0) + 2\varepsilon],$$

$$\dot{\hat{x}}(t_0) = \frac{x_T}{T-t_0}, \dot{\hat{y}}(t_0) = \frac{y_T}{T-t_0}.$$

и он удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кинематике полета.

Приведем один способ построения базового закона движения точки. Полагаем

$$\hat{x}_0 = 0, \hat{y}_0 = 0, \dot{\hat{x}}_0 = \frac{x_T - \hat{x}_0}{T-t_0}, \dot{\hat{y}}_0 = \frac{y_T - \hat{y}_0}{T-t_0},$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_0 + \dot{\hat{x}}_0(t-t_0),$$

$$\hat{y}(t) = \hat{y}_0 + \dot{\hat{y}}_0(t-t_0), \quad t \in [t_0, T].$$

Пусть $t_1 \in (t_0, T)$ и s – натуральное число.

Разобьем промежуток времени $[t_0, T]$ точками

$$\tau_0 = t_0, \tau_1 = \tau_0 + \Delta, \dots, \tau_s = \tau_{s-1} + \Delta = T,$$

$$\Delta = \frac{T-t_0}{s}.$$

Не теряя общности, считаем, что для некоторого номера $s_c < s$ выполняется равенство $\tau_{s_c} = t_1$. В противном случае разбиение промежутка времени $[t_0, T]$ можно сделать частично неравномерным.

Далее набирается массив точек

$$(\tau_0, \hat{z}_0), (\tau_1, \hat{z}_1), \dots, (\tau_s, \hat{z}_s),$$

где

$$\hat{z}_0 \in [\varphi(\hat{x}(\tau_0), \hat{y}(\tau_0)) + \varepsilon,$$

$$\varphi(\hat{x}(\tau_0), \hat{y}(\tau_0)) + 2\varepsilon],$$

$$\hat{z}_1 \in [\varphi(\hat{x}(\tau_1), \hat{y}(\tau_1)) + \varepsilon,$$

$$\varphi(\hat{x}(\tau_1), \hat{y}(\tau_1)) + 2\varepsilon],$$

.....,

$$\hat{z}_{s_c} \in [\varphi(\hat{x}(\tau_{s_c}), \hat{y}(\tau_{s_c})) + \varepsilon,$$

$$\varphi(\hat{x}(\tau_{s_c}), \hat{y}(\tau_{s_c})) + 2\varepsilon],$$

$$\hat{z}_{s_c+1} \in \left[\varphi(\hat{x}(\tau_{s_c+1}), \hat{y}(\tau_{s_c+1})) + \varepsilon \cdot \frac{T - \tau_{s_c+1}}{T - \tau_{s_c}}, \right. \\ \left. \varphi(\hat{x}(\tau_{s_c+1}), \hat{y}(\tau_{s_c+1})) + 2\varepsilon \cdot \frac{T - \tau_{s_c+1}}{T - \tau_{s_c}} \right], \\ \dots, \\ \hat{z}_{s-1} \in \left[\varphi(\hat{x}(\tau_{s-1}), \hat{y}(\tau_{s-1})) + \varepsilon \cdot \frac{T - \tau_{s-1}}{T - \tau_{s_c}}, \right. \\ \left. \varphi(\hat{x}(\tau_{s-1}), \hat{y}(\tau_{s-1})) + 2\varepsilon \cdot \frac{T - \tau_{s-1}}{T - \tau_{s_c}} \right], \\ \hat{z}_s = z_T.$$

Функциональная зависимость
 $\hat{z}(t) = \hat{f}(t), \quad t \in [t_0, T]$

устанавливается путем интерполяции массива точек. В результате получим

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i.$$

Выбирая число промежутков s достаточно большим, а степень интерполяционного полинома достаточно высокой, можно добиться того, что кинематический закон движения точки

$$x = \hat{x}(t), \quad y = \hat{y}(t), \quad z = \hat{z}(t), \\ t \in [t_0, T] \quad (2.2)$$

будет базовым.

Определение 3. Программное управление $v = \hat{v}(t), \quad t \in [t_0, T]$,

реализующее базовый закон движения точки, назовем базовым программным управлением.

Для построения базового программного управления уравнения (1.1) разрешаем относительно управлений:

$$v_1 = m\ddot{x} + k\dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \\ v_2 = m\ddot{y} + k\dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \\ v_3 = m\ddot{z} + k\dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + mg. \quad (2.2)$$

Базовый закон движения (2.1) подставим в уравнения (2.2). В результате получаем искомые базовые управления

$$\hat{v}_1(t) = m\ddot{\hat{x}}(t) + \\ + k\dot{\hat{x}}(t) \cdot \sqrt{\dot{\hat{x}}^2(t) + \dot{\hat{y}}^2(t) + \dot{\hat{z}}^2(t)}, \\ \hat{v}_2(t) = m\ddot{\hat{y}}(t) + \\ + k\dot{\hat{y}}(t) \cdot \sqrt{\dot{\hat{x}}^2(t) + \dot{\hat{y}}^2(t) + \dot{\hat{z}}^2(t)},$$

$$\hat{v}_3(t) = m\ddot{\hat{z}}(t) + \\ + k\dot{\hat{z}}(t) \cdot \sqrt{\dot{\hat{x}}^2(t) + \dot{\hat{y}}^2(t) + \dot{\hat{z}}^2(t)} + mg.$$

3. Возмущенные начальные условия и возмущенные движения

Пусть

$$\begin{pmatrix} x_{voz0} \\ y_{voz0} \\ z_{voz0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \\ \hat{z}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{voz0} \\ \dot{y}_{voz0} \\ \dot{z}_{voz0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}(t_0) \\ \dot{\hat{y}}(t_0) \\ \dot{\hat{z}}(t_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \dot{x}_0 \\ \delta \dot{y}_0 \\ \delta \dot{z}_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta \dot{x}_0 \\ \delta \dot{y}_0 \\ \delta \dot{z}_0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

где величины $\left\| \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} \delta \dot{x}_0 \\ \delta \dot{y}_0 \\ \delta \dot{z}_0 \end{pmatrix} \right\|$ малы.

Определение 4. Вектора

$$\begin{pmatrix} x_{voz0} \\ y_{voz0} \\ z_{voz0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}_{voz0} \\ \dot{y}_{voz0} \\ \dot{z}_{voz0} \end{pmatrix}$$

назовем возмущенными начальными условиями,

а вектора $\begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{pmatrix} \neq 0, \begin{pmatrix} \delta \dot{x}_0 \\ \delta \dot{y}_0 \\ \delta \dot{z}_0 \end{pmatrix} \neq 0$ – возмущением начальных условий точки.

Обозначим

$$x = x_{voz}(t), \quad y = y_{voz}(t), \quad z = z_{voz}(t), \\ t \in [t_0, T] \quad (3.1)$$

– решение системы дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} \hat{v}_1(t), \\ \ddot{y} = -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} \hat{v}_2(t), \\ \ddot{z} = -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - g + \frac{1}{m} \hat{v}_3(t),$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_{voz0}, \quad y(t_0) = y_{voz0}, \quad z(t_0) = z_{voz0}, \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_{voz0}, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_{voz0}, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_{voz0}.$$

Определение 5. Кинематический закон движения точки (3.1) назовем возмущенным движением, а разность

$$\begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \\ \delta z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{voz}(t) \\ \hat{y}_{voz}(t) \\ \hat{z}_{voz}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \\ \hat{z}(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}(t) \\ \delta \dot{y}(t) \\ \delta \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_{voz}(t) \\ \dot{\hat{y}}_{voz}(t) \\ \dot{\hat{z}}_{voz}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) \\ \dot{\hat{z}}(t) \end{pmatrix},$$

$$t \in [t_0, T]$$

возмущением движения точки.

4. Минимизация возмущений

Основная идея решения задачи управления точкой, сформулированной в первом пункте, состоит в построении управления, вынуждающего точку двигаться по кинематическому закону, который, начиная с момента времени $t_1 \in [t_0, T]$, мало отличается от базового закона движения. Для этого требуется обнулить возмущения в момент времени $t_1 \in [t_0, T]$.

Обнуление возмущений будем осуществлять при помощи дополнительного управления

$$u(\cdot) = \begin{pmatrix} u_1(\cdot) \\ u_2(\cdot) \\ u_3(\cdot) \end{pmatrix},$$

которое вводится в дифференциальные уравнения (1.1) аддитивно основному управлению, т. е.

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} (\hat{v}_1(t) + u_1),$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} (\hat{v}_2(t) + u_2),$$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - g + \frac{1}{m} (\hat{v}_3(t) + u_3).$$

Динамика управления возмущениями приближенно описывается векторным линейным дифференциальным уравнением [5]:

$$\dot{x} = A(t)q + B(t)u, \quad (4.1)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{z}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{z}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{z}} \end{pmatrix},$$

$\begin{matrix} x=\hat{x}(t), \\ y=\hat{y}(t) \\ z=\hat{z}(t), \\ v_i=\hat{v}_i(t), \\ i=1,2,3 \end{matrix}$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix} \in R^6,$$

$$F_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, v_1) = -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_1,$$

$$F_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, v_2) = -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_2,$$

$$F_3(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, v_3) = -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - g + \frac{1}{m} v_3.$$

При отсутствии геометрических ограничений на дополнительное управление для начального возмущения

$$q(t_0) = \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \\ \delta \dot{x}_0 \\ \delta \dot{y}_0 \\ \delta \dot{z}_0 \end{pmatrix}$$

в работах [5–6] задача обнуления фазового вектора линейного объекта (4.1) в момент времени $t_1 \in [t_0, T]$ была решена.

При этом разрешающее управление в работе [5] было оптимально по критерию "минимум энергии", а в работе [6] – по критерию "минимум силы". Терминология взята из монографии [1].

В данной статье принимается, что $u \in P$, где $P \subset R^3$ – выпуклое компактное множество. Символом $\Pi_P[t_0, t_1]$ обозначим множество всех программных управлений на промежутке времени $[t_0, t_1]$, для которых выполнено включение $u(t) \in P, t \in [t_0, t_1]$. В силу геометрических ограничений на управление $u(\cdot)$ задача обнуления фазового вектора системы (4.1) в момент времени $t_1 \in [t_0, T]$ может и не иметь решения. Вместо нее здесь решается задача минимизации расстояния от фазового вектора в момент времени t_1 до начала координат.

Указанное минимальное расстояние $\varepsilon^0(t_0, q_0)$ вычисляется по формуле [2]

$$\varepsilon^0(t_0, q_0) = \max \left\{ 0, \max_{\|l\|=1} \left[\langle Q[t_1, t_0]x_0, l \rangle \right], \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u \in P} \langle H[\tau]u, l \rangle d\tau \right\}, \quad (4.2)$$

где $Q[t, \tau], t, \tau \in [t_0, t_1]$ – фундаментальная матрица Коши для однородного уравнения $\dot{q} = A(t)q$, а $H[t] = Q[t_1, t]B(t), t, \tau \in [t_0, t_1]$ – матрица перехода для линейного объекта (4.1). Заметим, что если $\varepsilon^0(t_0, q_0) > 0$, то обнулить возмущения в момент времени t_1 нельзя в принципе.

Алгоритм решения задачи минимизации основывается на следующих двух утверждениях [1–2].

Теорема 1. Пусть $\varepsilon^0(t_0, q_0) > 0$.

Тогда максимум в (4.2) существует и достигается на единственном векторе $l^0 \in R^6, \|l^0\| = 1$.

Символом $q(\cdot, t_0, q_0, u(\cdot))$ обозначим движение линейного объекта (4.1), выходящее из начального положения (t_0, q_0) и порожденное управлением $u(\cdot) \in \Pi_P[t_0, t_1]$.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon^0(t_0, q_0) > 0$ и $u^0(\cdot) \in \Pi_P[t_0, t_1]$ – программное управление, для которого выполнено условие

$$\|q(t_1, t_0, q_0, u^0(\cdot))\| = \varepsilon^0(t_0, q_0) > 0.$$

Тогда

$$\langle H[t]u^0(t), l^0 \rangle = \min_{u \in P} \langle H[t]u, l^0 \rangle, \\ t \in [t_0, t_1].$$

Изложим алгоритм построения программного управления $u^0(\cdot) \in \Pi_P[t_0, t_1]$, решающего задачу минимизации расстояния от фазового вектора линейного объекта до начала координат в случае, когда $\varepsilon^0(t_0, q_0) > 0$ и

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \mid |u_1| \leq a_1, |u_2| \leq a_2, |u_3| \leq a_3 \right\}.$$

1. Вычисляется величина

$$\langle H[\tau]u, l \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & h_{13}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{i1}(t) & h_{i2}(t) & h_{i3}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{61}(t) & h_{62}(t) & h_{63}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_i \\ \dots \\ l_6 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 h_{1j}(t)u_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^3 h_{6j}(t)u_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 \\ \dots \\ l_6 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^6 \left(\sum_{j=1}^3 h_{ij}(t)u_j \right) l_i =$$

$$= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^6 h_{ij}(t)l_i \right) u_j = \sum_{j=1}^3 \omega_j(t, l) u_j,$$

где

$$\omega_j(t, l) = \sum_{i=1}^6 h_{ij}(t)l_i, \quad j = 1, 2, 3.$$

2. Решается задача математического программирования

$$\begin{cases} \langle H[\tau]u, l \rangle = \sum_{j=1}^3 \omega_j(t, l) u_j \rightarrow \min, \\ u \in P. \end{cases}$$

Пусть $U^0(t, l) = \begin{pmatrix} U_1^0(t, l) \\ U_2^0(t, l) \\ U_3^0(t, l) \end{pmatrix}$ – решение

этой задачи.

Тогда

$$U_j^0(t, l) = \begin{cases} -a_j, & \omega_j(t, l) > 0, \\ \forall \in [-a_j, a_j], & \omega_j(t, l) = 0, \\ a_j, & \omega_j(t, l) < 0. \end{cases} = -a_j \cdot \text{sign}[\omega_j(t, l)], \quad j = 1, 2, 3.$$

4. Вычисляется величина

$$\langle H[\tau]u^0(t, l), l \rangle = \sum_{j=1}^3 \omega_j(t, l) U_j^0(t, l) = -\sum_{j=1}^3 a_j |\omega_j(t, l)|.$$

3. Решается задача математического программирования

$$\begin{cases} \langle Q[t_1, t_0]q_0, l \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle H[\tau]U^0(\tau, l), l \rangle d\tau = \\ \langle Q[t_1, t_0]q_0, l \rangle - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^3 a_j |\omega_j(\tau, l)| d\tau \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^6 l_i^2 = 1. \end{cases}$$

Пусть $l^0 = \begin{pmatrix} l_1^0 \\ \dots \\ l_i^0 \\ \dots \\ l_6^0 \end{pmatrix}$ – ее решение.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(t_0, q_0) &= \langle Q[t_1, t_0]q_0, l^0 \rangle + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \langle H[\tau]U^0(\tau, l^0), l^0 \rangle d\tau = \end{aligned}$$

$$= \langle Q[t_1, t_0]q_0, l^0 \rangle - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^3 a_j |\omega_j(\tau, l^0)| d\tau.$$

4. Строится оптимальное управление

$$u^0(t) = U^0(t, l^0) = \begin{pmatrix} U_1^0(t, l^0) \\ U_2^0(t, l^0) \\ U_3^0(t, l^0) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (4.3)$$

5. Производится проверка. Интегрируется дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} q(t) = A(t)q(t) + B(t)u^0(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

с начальными условиями $q(t_0) = q_0$. Обозначим $q^0(\cdot) = q(\cdot, t_0, q_0, u^0(\cdot))$. Должно выполняться

$$\varepsilon^0(t_0, q_0) \approx \rho(q^0(t_1), \{0\}) = \|q^0(t_1)\|.$$

5. Решение основной задачи управления

Полагаем

$$\begin{pmatrix} v_1^0(t) \\ v_2^0(t) \\ v_3^0(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \hat{v}_1(t) + u_1^0(t) \\ \hat{v}_2(t) + u_2^0(t) \\ \hat{v}_3(t) + u_3^0(t) \end{pmatrix}, & t \in [t_0, t_1] \\ \begin{pmatrix} \hat{v}_1(t) \\ \hat{v}_2(t) \\ \hat{v}_3(t) \end{pmatrix}, & t \in (t_1, T] \end{cases} \quad (5.1)$$

Обозначим

$x_{kor}(t), y_{kor}(t), z_{kor}(t), t \in [t_0, T]$ – решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_1^0(t), \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_2^0(t), \\ \ddot{z} &= -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - g + \frac{1}{m} v_3^0(t), \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_{voz0}, \quad y(t_0) = y_{voz0}, \quad z(t_0) = z_{voz0}, \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_{voz0}, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_{voz0}, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_{voz0}. \end{aligned}$$

Определение 6. Закон движения $x_{kor}(\cdot), y_{kor}(\cdot), z_{kor}(\cdot)$ называется откорректированным законом движения точки.

Откорректированный закон движения динамического объекта приближается к базовому закону движения в момент времени $t_1 \in [t_0, T]$ на расстояние $\varepsilon^0(t_0, q_0)$. В случае, когда эта величина мала, дальнейший полет точки будет происходить в малой окрестности базового закона движения. Таким образом, требования к кинематике полета будут выполнены, и управление $\begin{pmatrix} v_1^0(\cdot) \\ v_2^0(\cdot) \\ v_3^0(\cdot) \end{pmatrix}$ будет решеном задачи, поставленной в пункте 1.

6. Численный эксперимент

Изложенная выше теория иллюстрируется на следующих числовых данных:

$$k = 0.45, m = 100 \text{ кг}, g = 9.8 \frac{\text{М}}{\text{сек}^2}, \varepsilon = 30 \text{ м},$$

$$t_0 = 0, T = 10 \text{ сек}, \varphi(x, y) = 50 \cdot \sin(0.00005 \cdot x \cdot y) \text{ м},$$

$$x_0 = -40 \text{ м}, y_0 = 20 \text{ м}, z_0 = 40 \text{ м},$$

$$x_T = 3000 \text{ м}, y_T = 100 \text{ м},$$

$$z_T = \varphi(x_T, y_T) = 32.51 \text{ м},$$

$$\dot{x}_0 = 310 \frac{\text{М}}{\text{сек}}, \dot{y}_0 = -10 \frac{\text{М}}{\text{сек}}, \dot{z}_0 = -12.75 \frac{\text{М}}{\text{сек}},$$

$$s = 100, t^* = 5 \text{ сек} \Rightarrow s_c = 50, n = 15,$$

$$a_1 = 2050 \text{ н}, a_2 = 2050 \text{ н}, a_3 = 2050 \text{ н}.$$

Здесь $\varepsilon^0(t_0, p_0) = 0.38 \text{ м} > 0$ и, следовательно, задача обнуления возмущений не разрешима. Этот факт подтверждается и путем вычисления величин

$$u_{\text{энер}i}^* = \max_{t \in [t_0, t_1]} |u_{\text{энер}i}^0(t)|,$$

$$u_{\text{сил}i}^0 = \max_{t \in [t_0, t_1]} |u_{\text{сил}i}^0(t)|, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $u_{\text{энер}}^0(\cdot), u_{\text{сил}}^0(\cdot)$ – оптимальные управления, решающие задачу обнуления возмущений, полученные в работах [5], [6] соответственно. Имеют место неравенства

$$u_{\text{энер}1}^* = 2293, 7 \text{ н} > 2050 \text{ н},$$

$$u_{\text{сил}1}^* = 2172, 1 \text{ н} > 2050 \text{ н} \quad (i = 1, j = 1),$$

которые означают нарушение геометрических ограничений $u \in P$ для управлений $u_{\text{энер}}^0(\cdot), u_{\text{сил}}^0(\cdot)$.

На рис. 2–4 приведены покомпонентные графики управления $u^0(\cdot)$, вычисленного по формулам (4.3). На них мелким пунктиром нарисован график компоненты управления, а крупным – граница области ее изменения.

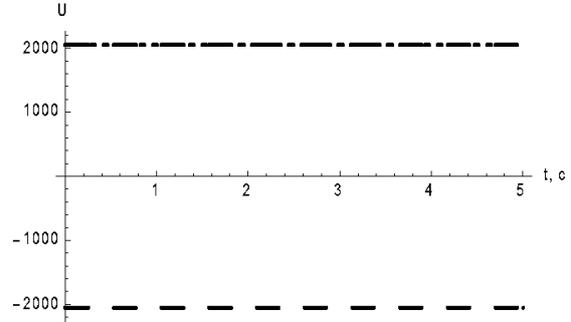


Рис. 2. Первая компонента управления

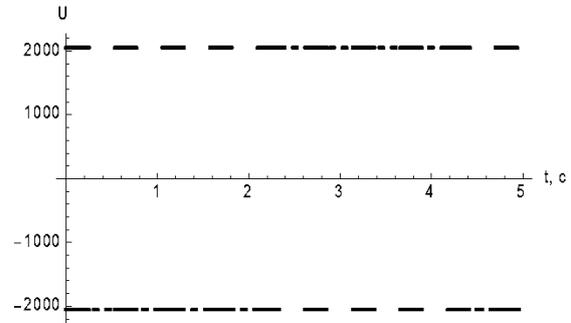


Рис. 3. Вторая компонента управления

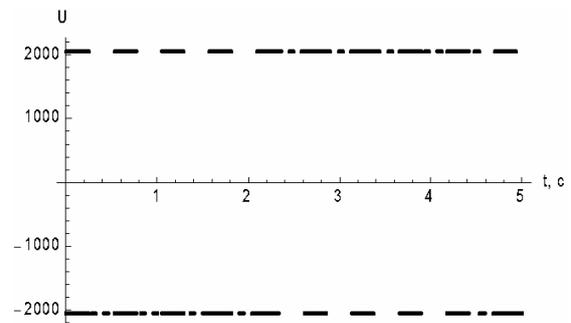


Рис. 4. Третья компонента управления

Таким образом, управление $u^0(\cdot)$ удовлетворяет включению $u^0(t) \in P, t \in [t_0, t_1]$ и представляет собой кусочно-постоянную функцию, принимающую значения на границе своей области изменения. Непосредственно убеждаемся, что

$$\|P(t_1, t_0, p_0, u^0(\cdot))\| = 0.4 \text{ м} \approx$$

$$\approx 0.38 \text{ м} = \varepsilon^0(t_0, p_0).$$

Следовательно, управление $u^0(\cdot)$ действительно решает задачу минимизации расстояния от фазового вектора линейного объекта в момент времени $t_1 = 5 \text{ сек}$ до начала координат. Величина $\varepsilon^0(t_0, p_0) = 0.38 \text{ м}$ мала по отношению к величине дальности полета, поэтому управление, решающее задачу для исходного нелинейного объекта, можно построить по формуле (5.1).

На рис 5. приведены совместные графики координаты $z = z_{kor}(t), t \in [t_0, T]$ точки в движении по откорректированной траектории (тонкая линия) и рельефа местности $z = \varphi(x_{kor}(t), y_{kor}(t)), t \in [t_0, T]$ (жирная линия).

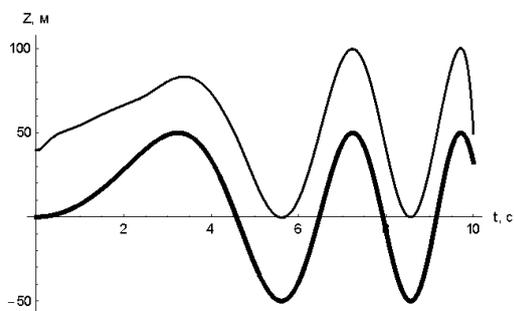


Рис. 5

Из рисунка видно, что для откорректированного движения фазовые ограничения на полет точки выполнены. Заметим, что промах по цели в конечный момент времени для откорректированной траектории составляет величину 2.02 м .

На рис. 6 показаны трехмерные траектории точки в базовом (штриховая линия) полете и откорректированном (сплошная линия) полете.

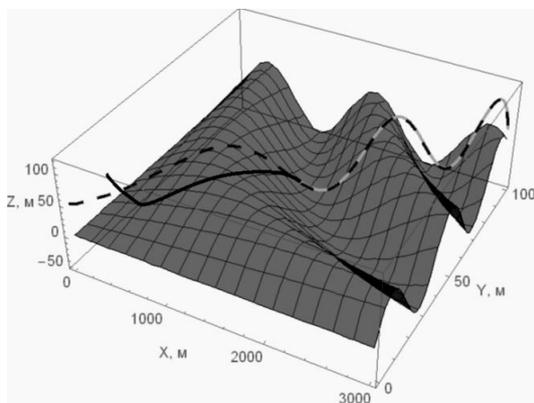


Рис 6

Из рисунка видно, что в момент времени $t_1 = 5 \text{ сек}$ откорректированное движение почти выходит на базовое движение и в дальнейшем с ним практически совпадает.

Заключение

1. В статье ставится и решается задача управления полетом тяжелой материальной точки в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости в условиях неполной информации об ее начальном положении. Эта информация становится полной только в момент старта.

2. Решение поставленной задачи осуществлено путем сближения возмущенного движения точки с базовым законом ее полета.

3. Указанное сближение реализовано в условиях геометрических ограничений на дополнительные управления.

4. В численном эксперименте показана эффективность применяемых алгоритмов управления.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Лутманов С.В. Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие, Перм. ун-т. Пермь, 2010. 200 с.
3. Лутманов С.В. Об одной методике исследования управляемой динамической системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1 (36). С. 13–20.
4. Лутманов С.В., Кучкова Т.Ю., Овчинников В.А. Управление динамической системой, линеаризованной в окрестности базового движения, в условиях геометрических ограничений на вектор дополнительных управляющих параметров // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2018. Вып. 50. С. 12–32.
5. Лутманов С.В. Хотько О.А. Об одной задаче управления тяжелой точкой, движущейся в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3 (42). С. 69–75.
6. Лутманов С.В. Хотько О.А. Оптимальная коррекция полета тяжелой материальной точки в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости // Проблемы

механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2018. Вып. 50. С. 33–45.

7. Лутманов С.В. Коррекция движения управляемого динамического объекта в условиях

воздействия на него неконтролируемой помехи // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 1(44). С. 14–21.

Correction of flight of a heavy material point in an environment with resistance in the presence of geometric constraints on additional controls

S. V. Lutmanov, O. A. Chotko

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
mpu@psu.ru; (342)239-63-09

This work is a continuation of a series of articles, devoted to the correction of a perturbed flight of a controlled heavy material point in order to reach its basic law of motion. Flight perturbation is caused not by exact observance of the initial conditions, and movement correction is performed by additional controls included in the differential equations of motion additively to basic controls. considered here that geometric constraints are imposed on the parameters of the additional control in the form of inclusion in a convex compact set. It is shown that if the geometric constraints are not too burdensome, then the movement correction can be successfully implemented.

Keywords: *basic movement; disturbed movement; program control; flight correction; quality criterion.*