УДК 512.544

О группах с циклическими пересечениями неинцидентных (максимальных) подгрупп

Я. Д. Половицкий, Т. М. Коневских

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

alg@psu.ru; 8(342) 239-63-21

В работе рассматриваются группы с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп (C_N-группы). Описаны конечные разрешимые и бесконечные бинарно конечные C_N-группы на базе полученного в [1] описания конечных разрешимых *CIM*-групп. Изучение конечных неразрешимых *CIM*-групп сведено к описанию простых и некоторых квазипростых групп с этим условием.

Ключевые слова: *группа; максимальная подгруппа; циклическая подгруппа; инцидентный.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-3-23-31

Введение

В работе Я.Д. Половицкого [1] введен класс *CIM*-групп и описаны конечные разрешимые *CIM*-группы.

Определение 1 (см. [1]). Группу, в которой либо пересечение любых двух максимальных подгрупп является циклической группой, либо имеется не более одной максимальной подгруппы, назовем *CIM-группой* (или группой с *CIM-условием*).

В § 1 настоящей работы рассмотрены конечные *CIM*-группы, каждая подгруппа которых также является *CIM*-группой. Оказалось, что это в точности конечные группы с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп (C_N-группы). В работе найдены все конечные разрешимые C_N-группы.

В § 2 описаны бесконечные бинарно конечные C_N-группы.

В § 3 изучение конечных неразрешимых *CIM*-групп сведено к изучению таких простых групп и квазипростых групп с циклическим центром Z, совпадающим с подгруппой Фраттини, таких, что C/Z – простая *CIM*-группа.

Обозначения в работе стандартные: конец доказательства обозначается символом □.

§ 1. Конечные разрешимые C_N-группы

Определение 2. Группу, в которой пересечение любых двух неинцидентных подгрупп является циклической группой или неинцидентных подгрупп нет, назовем *C_N-группой*, или группой с *C_N-условием*.

Легко видеть, что C_N-условие переносится на подгруппы и фактор группы. Очевидно, C_N-группы – подкласс класса *CIM*-групп. В класс C_N-групп по определению входят группы с условием инцидентности для нециклических подгрупп. Локально ступенчатые группы с этим условием описаны в [2].

Лемма 1. Пусть G – конечная *CIM*-группа, и $G = \langle A, B\rangle$ (1), где $1 < A < G$ (2), $B < G$ (3). Тогда $A \cap B$ – циклическая группа.

Доказательство. Из конечности G, (2) и (3) следует, что существуют такие максимальные подгруппы M_1 и M_2 группы G, что $A \le M_1$ (4), $B \le M_2$ (5). Если $M_1 = M_2$, то из (4), (5) и (1) следует, что $G \le M_1$, в противоречие с определением M_1. Значит, $M_1 \ne M_2$, и в силу *CIM*-условия $M_1 \cap M_2$ – циклическая группа. Так как ввиду (4) и (5) $(A \cap B) \subset (M_1 \cap M_2)$, то $A \cap B$ – циклическая группа. □

Следствие. Пусть G – конечная непримарная *CIM*-группа, $M <\cdot G$ (6) и $p \big| (|M|, |G:M|)$ (7). Тогда всякая силовская p-подгруппа B группы M циклическая.

Доказательство. Подгруппа B содержится в некоторой силовской p-подгруппе P группы G, $1<P<G$. В силу (7) $P \not\subset M$, а тогда ввиду (6) $G = <M, P>$. По лемме 1 $P \cap M$ – циклическая группа. Так как $B = P \cap M$, то B – циклическая группа. □

Теорема 1. Для конечной группы G равносильны условия: 1. G является C_N-группой; 2. G и все ее истинные подгруппы являются *CIM*-группами.

Доказательство. Импликация $1 \to 2$ очевидна.

Пусть G удовлетворяет условию 2, и A, B – ее неинцидентные подгруппы. Рассмотрим $S=<A, B>$. В силу условия 2 S является *CIM*-группой, а по лемме 1 $A \cap B$ – циклическая группа. Значит, G есть C_N-группа. □

Легко устанавливается справедливость следующего предложения:

Лемма 2. Если в группе G имеется единственная минимальная нециклическая подгруппа N и G/N – циклическая p-группа, то G – C_N-группа.

Доказательство. Действительно, все нециклические подгруппы такой группы содержат N и инцидентны ввиду условия для G/N. □

Теорема 2. Для конечной нильпотентной группы G *CIM*-условие и C_N-условие равносильны.

Доказательство. Если G является C_N-группой, то в силу определений 1 и 2 G есть *CIM*-группа.

Пусть теперь G является нильпотентной *CIM*-группой. Все типы таких групп перечислены в теореме 1 из [1]. Если G циклическая, то она – C_N-группа. Группы типов 2 и 3 теоремы 1 из [1] являются C_N-группами в силу леммы 2. В p-группе G типа 4 этой теоремы одна из максимальных подгрупп циклическая, и потому как показано в лемме 7 из [1], G является C_N-группой.

Если $|\mathrm{G}| \big| p^3$, то G, очевидно, C_N-группа.

Наконец, пусть G – группа типа 6 теоремы 1 из [1], то есть G – p-группа, $|G/\Phi(G)| = p^2$ и $\Phi(G)$ – максимальная циклическая подгруппа группы G. Тогда для любой максимальной подгруппы M группы G $|M/\Phi(G)| = p$, то есть M – группа типа 4 теоремы 1 из [1] и, как отмечено выше, M является C_N-группой. Пусть A и B – неинцидентные подгруппы группы G. Если они содержатся в одной максимальной подгруппе группы G, то, как показано выше, $A \cap B$ – циклическая группа.

Если же A и B содержатся в разных максимальных подгруппах M_1 и M_2 группы G, то, так как G – *CIM*-группа, $M_1 \cap M_2$ – циклическая группа, и, так как $(A \cap B) \subset (M_1 \cap M_2)$, то $A \cap B$ – циклическая группа. Значит, G является C_N-группой.

Таким образом, каждый из возможных типов такой *CIM*-группы G является C_N-группой. □

Теорема 3. Пусть конечная группа G удовлетворяет одному из следующих условий: 1. нильпотентна; 2. ненильпотентна и имеет дополняемую инвариантную циклическую подгруппу. Для такой группы *CIM*-условие и C_N-условие равносильны.

Доказательство. Как следует из определений 1 и 2, достаточно доказать, что если такая группа G является *CIM*-группой, то она – C_N-группа.

Пусть *CIM*-группа G удовлетворяет одному из условий 1 или 2 теоремы 3.

1. Покажем, что любая максимальная подгруппа M группы G также является *CIM*-группой и удовлетворяет одному из условий 1 или 2 теоремы 3. Возможны 2 случая:

1.1. G нильпотентна. Тогда по теореме 2 она является C_N-группой, и потому M – нильпотентная *CIM*-группа.

1.2. G удовлетворяет условию 2 теоремы 3.

Такие группы описаны в теореме 2 из [1]. Это группы одного из типов I–VII, приведенных в этой теореме. Из доказательства достаточности теоремы 2 из [1] видно, что каждая максимальная подгруппа такой группы G либо группа одного из типов этой теоремы, либо нильпотентная группа одного из типов теоремы 1 из [1]. В силу этих теорем M является *CIM*-группой и удовлетворяет одному из условий 1 или 2 теоремы 3. Мы доказали утверждение пункта 1.

2. Докажем, что G – C_N-группа.

Пусть A и B – любые неинцидентные подгруппы группы G. Докажем, что либо $A \cap B$ – циклическая группа, либо таких A и B нет.

Доказательство проведем индукцией по числу n, где $n = |G|$.

При $n = 1$ таких A и B нет, и наше утверждение верно.

Пусть наше утверждение об A и B верно для всех конечных групп, удовлетворяющих одному из условий 1 или 2 теоремы 3, порядок которых меньше n – порядка G. Докажем, что тогда оно верно и для группы G порядка n.

Если A и B содержатся в разных максимальных подгруппах M_1 и M_2 группы G, то $(A \cap B) \subset (M_1 \cap M_2)$ и, так как последнее пересечение по определению *CIM*-группы является циклической группой, то $A \cap B$ – циклическая группа. Пусть A и B содержатся в одной максимальной подгруппе M группы G. Как показано в пункте 1, M – *CIM*-группа и удовлетворяет одному из условий 1 или 2 теоремы 3, и потому, так как $|M| < |G|$, по предположению индукции $A \cap B$ – циклическая группа.

Этим доказано что G является C_N-группой. □

Теперь мы можем получить описание конечных разрешимых C_N-групп.

Теорема 4. Конечная разрешимая группа G тогда и только тогда является C_N-группой, когда она – одна из следующих групп:

1. *CIM*-группа, удовлетворяющая хотя бы одному условию теоремы 3 (такие группы описаны в теоремах 1 и 2 из [1]).
2. $G = P \leftthreetimes Q$ (1), где P – p-группа, $Q \cong Z_{q^n}$ (2) и выполняется одно из следующих условий:

2.1. $P \cong E_{p^2}$ (3) или $P \cong E_{p^3}$ (4) и для любой Q_0, такой, что $1 < Q_0 \leq Q$ (5), в P нет собственных Q_0-допустимых подгрупп;

2.2. $P \cong E_{p^2}$, в P хотя бы для одной отличной от 1 подгруппы Q_0 группы Q есть собственная Q_0-допустимая подгруппа; если Q_2 – подгруппа максимального порядка из таких Q_0, то $|Q_2/Q_2 \cap Z(G)| = q$ (6);

2.3. $Z_1 = Z(P)$ – циклическая группа, $P/Z_1 \cong E_{p^2}$ (7), $Z_1 = \Phi(P)$ (8), $P \not\cong Q_8$ (9), при $|P| \neq p^3$ (10) Z_1 – максимальная циклическая подгруппа группы P, для $Q_1 <\cdot Q$ выполняется: $Z_1 \subset C(Q_1)$ (11); для любой подгруппы Q_2, такой, что $1 < Q_2 \leq Q$, всякая собственная Q_2-допустимая подгруппа группы P содержится в Z_1.

2.4. $P \cong Q_8$, $Q \cong Z_{3^n}$, $|Q/Q \cap Z(G)| = 3$.

Необходимость. Пусть G является конечной разрешимой C_N-группой. Тогда она и *CIM*-группа. Такие *CIM*-группы описаны в [1]. Если G удовлетворяет хотя бы одному из условий теоремы 3, то она – группа типа 1 теоремы 4.

Пусть G не удовлетворяет ни одному из условий теоремы 3. Тогда по теореме 4 из [1] G – группа одного из типов VIII или IX этой теоремы, и нам требуется лишь выделить из них C_N-группы. В обоих этих случаях G имеет вид (1), где P – p-группа, и выполняется (2).

Пусть для Q_0 с условием (5) в P есть нециклическая собственная Q_0-допустимая подгруппа P_1. Тогда $P \cap (P_1 \leftthreetimes Q_0) = P_1$ – нециклическая группа, в противоречие с C_N-условием. Значит, в P могут быть только циклические собственные Q_0-допустимые подгруппы. Отметим также, что P, как подгруппа C_N-группы G, также является C_N-группой.

Дальнейшее рассмотрение C_N-групп типов VIII и IX продолжим отдельно.

1. G – группа типа VIII.

Тогда по определению такой группы (в теореме 4 из [1]) $P \cong E_{p^n}$, где $n \geq 2$. Ввиду того, что P есть C_N-группа, легко видеть, что $n = 2$ или $n = 3$, то есть справедливо (3) или (4). Если для любой подгруппы Q_0 с условием (5) в P нет собственных Q_0-допустимых подгрупп, то G одна из групп типа 2.1 теоремы 4.

Пусть для некоторой такой Q_0 в P есть собственная Q_0-допустимая подгруппа P_1. Тогда в силу теоремы Машке $P = P_1 \times P_2$ (12), где P_2 также Q_0-допустима. Если $|P| = p^3$, то хотя бы одна из подгрупп P_i $(i = 1,2)$ нециклическая, в противоречие с тем, что доказано перед пунктом 1. Значит, выполняется (3).

Пусть Q_2 – максимальная из подгрупп Q_0 группы Q, для которых в P есть собственная Q_0-допустимая подгруппа и $Q_3 <\cdot Q_2$ (13). Тогда справедливо (12), где P_i $(i=1,2)$ являются Q_2-допустимыми, и потому P_i также Q_3-допустимы. В силу C_N-условия для любого $i = 1,2$ $(P \leftthreetimes Q_3) \cap (P_i \leftthreetimes Q_2) = P_i \leftthreetimes Q_3$ – циклическая группа, и потому $Q_3 \subset C(P_i)$, а тогда в силу (12) $Q_3 \subset C(P)$. Отсюда и из (13) вытекает справедливость (6). Этим доказано, что G – группа типа 2.2 теоремы 4.

2. G – группа типа IX.

Тогда, по определению такой группы (в теореме 4 из [1]) для G справедливы (1), (2), $Z_1 = Z(P)$ – циклическая группа и справедлив изоморфизм $P/Z_1 \cong E_{p^m}$ (14); $Z_1 \le \Phi(G)$, а для подгруппы $Q_1 <\cdot\, Q$ выполняется (11). Отметим, что из (14) следует, что $\Phi(P) \subset Z_1$ (15).

Так как P является C_N-группой и в силу (14) неабелева, то из теоремы 1 из [1] следует, что P – группа одного из следующих типов:

a) порядка p^3, $P' \ne 1$;

b) хотя бы одна из максимальных подгрупп группы P циклическая $|P| \ge p^4$, $P' \ne 1$;

c) $|P/\Phi(P)| = p^2$ (16), $\Phi(P)$ – максимальная циклическая подгруппа группы P и $|P| \ge p^4$, $P' \ne 1$.

Для группы типа *a*) ввиду (14) и (15) выполняется (7) и (8). Для таких групп типа *c*) из (15) и (16) следует справедливость (7) и (8).

Пусть P – группа типа *b*). Тогда из известного описания таких групп (см., напр. [3], задачи 17.19–17.22) и (14) следует, что $P \cong M_{p^n}$, $n \ge 4$. Но в такой группе единственная максимальная нециклическая подгруппа $M \triangleleft P$, а тогда $M \triangleleft G$, вопреки доказанному перед пунктом 1. Значит, случай *b*) невозможен.

Мы показали, что при условии (10) Z_1 – максимальная циклическая подгруппа группы P.

Пусть Q_2 – отличная от 1 подгруппа группы Q. Рассмотрим $H = P \rtimes Q_2$ (17). Так как G – C_N-группа, то H является *CIM*-группой.

Возможны два подслучая:

2.1. $P \not\cong Q_8$.

Тогда в силу теоремы 1 из [1] для любой Q_2, где $1 < Q_2 \le Q$, подгруппа H ненильпотентна.

Если бы H имела дополняемую в ней инвариантную циклическую подгруппу, то, так как она удовлетворяет условиям теоремы 2 из [1], H была бы одной из групп типов I–VII, перечисленных в этой теореме. Но во всех этих типах, кроме типа IV, нет неабелевых силовских подгрупп (а P по условию неабелева). А группа H типа IV имела бы вид $H = A \rtimes Q_8$, где $|A| = q$. Сравнивая это с (17), мы получаем противоречие (ибо в H вида (17) инвариантная силовская подгруппа P нециклическая и потому не может совпадать с A). Значит, H не является группой ни одного типа теоремы 2. Тогда по теореме 4 из [1], H – группа одного из типов VIII или IX этой теоремы. Так как P неабелева, то H – группа типа IX, и по теореме 4 из [1] P/Z_1 – абелева группа и является минимальной нормальной подгруппой группы H/Z_1. Пусть P_1 – собственная Q_2-допустимая подгруппа группы P.

Предположим, что $P_1 \not\subset Z_1$ (18). Тогда, учитывая (17) и (7), $P_1Z_1/Z_1 \triangleleft H/Z_1$ и из минимальности нормальной подгруппы P/Z_1 группы H/Z_1 получаем: $P = P_1Z_1$ (19). Но, как показано перед пунктом 1, P_1 и Z_1 – циклические группы (ибо P_1 и Z_1 – Q_2-допустимы) и из (19) следует, что P абелева, вопреки определению группы типа IX. Значит, (17) не выполняется, то есть $P_1 \subset Z_1$.

Так как в силу 2.1 справедливо (9), то из доказанного в пункте 2.1 следует, что G – одна из групп типа 2.3 теоремы 4.

2.2. $P \cong Q_8$.

Известно (см., напр., [3], задача 18.18), что $AutQ_8 \cong S_4$, то есть $|AutQ_8| = 3 \cdot 2^3$ (20). Так как $G/C(P) \cong F \le AutP$, то отсюда и из 2.2 (1), (2) и (20) следует, что $q = 3$, то есть $Q \cong Z_{3^n}$ и $|Q/Q \cap C(P)| = 3$, то есть $|Q/Q \cap Z(G)| = 3$. Из доказанного в 2.2 следует, что G – группа типа 2.4 теоремы 4. Необходимость доказана.

Достаточность.

Покажем, что группа каждого из типов теоремы 4 является C_N-группой.

1. Всякая группа типа 1 является C_N-группой по теореме 3.

2. G – группа типа 2.

Так как в силу (1) и (2) G/P – примарная циклическая группа, то любые две подгруппы группы G, содержащие P, инцидентны.

В силу теоремы 1 из [1] во всех подтипах 2.1–2.4 типа 2 P является *CIM*-группой, а тогда ввиду теоремы 1 P есть C_N-группа.

Значит, учитывая (1) и цикличность Q, для проверки C_N-условия в каждом из этих подтипов достаточно рассмотреть пары неинцидентных подгрупп, хотя бы одна из которых не содержит P и является непримарной нециклической.

2.1. В группе G подтипа 2.1 таких подгрупп нет, и потому такая группа – C_N-группа.

2.2. G – группа подтипа 2.2.

В G все упомянутые выше нециклические подгруппы имеют вид $B = P_1 \rtimes Q_2^X$ (21), где $|P_1| = p$ (22), ибо в силу (6) для любой Q_3, такой, что $Q_3 < Q_2$, подгруппы вида $P_2 \rtimes Q_3^Y = P_2 \times Q_3^Y$ циклические для любой P_2, такой, что $|P_2| = p$ (ибо $Q_3 \subset Z(G)$). Из (21), (6) и (22) следует, что все собственные подгруппы группы B циклические, а тогда пересечение B с любой неинцидентной ей подгруппой циклическое. Значит, G является C_N-группой.

2.3. G – группа подтипа 2.3.

Всякая не содержащая P непримарная подгруппа такой группы имеет вид $H = Z_2 \leftthreetimes Q_2^X$ (23), где $Z_2 \le Z_1$ (24) и $1 < Q_2 \le Q$. Если $Q_2 < Q$, то $Q_2 \le Q_1$ и из (23) и определения группы типа 2.3 следует, что H – циклическая группа (ибо в силу (11) $Q_2 \subset C(Z_2)$, и потому $Q_2^X \subset C(Z_2)$, так как $Z_2 \lhd G$). Значит, $Q_2 = Q$ и $H = Z_2 \leftthreetimes Q^X$ (25).

Пусть $H_1 = Z_3 \leftthreetimes Q^Y$ (26) – вторая подгруппа такого вида ($Z_3 \le Z_1$ (27)).

Найдем их пересечение $S = H_1 \cap H_2$. Если S содержит силовскую q- подгруппу Q^Z группы G, то из (25) и (26) следует, что $H = Z_2 \leftthreetimes Q^Z$ и $H_1 = Z_3 \leftthreetimes Q^Z$, а тогда ввиду (24), (27) и того, что Z_1 – циклическая p-группа, H и H_1 инцидентны. Значит, если H и H_1 не инцидентны, то силовская q- подгрупа Q_3 группы S содержится в Q_1^t ($t \in G$).

Тогда, так как Z_2 и Z_3 инцидентны (например, $Z_2 \le Z_3$), $S = Z_2 \leftthreetimes Q_3$ (28). Но по определению группы типа 2.3. $Z_2 \subset C(Q_1)$ (29) и, так как $Z_2 \lhd G$, то $Z_2 \subset C(Q_1^t)$, и потому $Q_3 \subset C(Z_2)$. Отсюда и из (28), так как Z_2 и Q_1 – циклические группы, следует, что S – циклическая группа.

Наконец, рассмотрим пересечения R подгруппы H с собственными непримарными подгруппами группы G, содержащими P – это подгруппа вида $F = P \leftthreetimes Q_4$, где $Q_4 \le Q_1$ (29). Тогда $R = Z_2 \leftthreetimes Q_5$, где $Q_5 \le Q_1^g$ $(g \in G)$. Как и выше, из (29) получаем, что $R = Z_2 \times Q_5$ – циклическая группа.

Этим доказано, что G – C_N-группа.

2.4. G – группа подтипа 2.4.

Как показано в [2], в такой группе Q_8 – единственная минимальная нециклическая подгруппа, и, так как G/Q_8 – примарная циклическая, любые две нециклические подгруппы группы G инцидентны. Значит, G – C_N-группа. □

Замечание

Из теоремы 4 и теоремы 4 из [1] видно, что в классе конечных разрешимых групп *CIM*-группа и C_N-группа отличается лишь теми группами типов VIII и IX теоремы 4 из [1], которые не являются группами типов 2.1–2.4 теоремы 4.

§ 2. Бесконечные бинарно конечные C_N-группы

Определение 3. Группу, в которой либо пересечение любых двух неинцидентных бесконечных подгрупп конечно, либо любые две бесконечные подгруппы инцидентны, назовем *F_N-группой* или группой с *F_N-условием*.

Очевидно, что среди периодических групп C_N-группы – подкласс класса F_N-групп.

Определение 4. *Нижним слоем* периодической абелевой группы A называется подгруппа, порожденная всеми элементами простых порядков группы A.

Лемма 3. Пусть G – бесконечная бинарно конечная группа. Если нижний слой A_1 каждой ее абелевой подгруппы A является F_N-группой, то группа G черниковская и для ее полной части P выполняется либо $P = C_{p^\infty}$ (1), либо $P = C_{p^\infty} \times C_{q^\infty}$ (2), где возможно и $p = q$, и $p \ne q$.

Доказательство. Докажем сначала, что $|A_1| < \infty$ (3) для любой абелевой подгруппы A группы G. Предположим противное. Тогда для некоторой абелевой A выполняется $|A_1| = \infty$ (4). Так как G периодическая, то $A_1 = \prod_{i \in J} B_i$ (5), где B_i – конечные циклические группы, причем ввиду (4) множество J бесконечно. Поэтому оно представимо в виде $J = J_1 \bigcup J_2$, где $(J_1 \cap J_2)$, J_1 и J_2 бесконечные. Рассмотрим подгруппы $C = \prod_{i \in J_1} B_i$ и $D = \prod_{i \in J_2} B_i$ группы A_1. Ввиду бесконечности $J_1 \cap J_2$ $|C \bigcap D| = \infty$, в противоречие с F_N-условием для A_1. Значит, выполняется (2). Отсюда и из леммы 1.10 из [4] следует, что группа A черниковская, то есть G удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Как показано в [5], G – черниковская группа. В силу F_N-условия выполняется (1) или (2). □

Следствие. Всякая бесконечная бинарно конечная C_N-группа G черниковская, а для ее полной части P выполняется одно из двух условий:

1. $P \cong C_{p^\infty}$;

2. $P = R_1 \times R_2$ (6), где $R_1 \cong C_{p^\infty}$ (7), $R_2 \cong C_{q^\infty}$ (8) и $p \neq q$ (9).

Доказательство. Так как G есть и F_N-группа, то в силу леммы 3 группа G черниковская. Если P не является группой типа 1, то из леммы 3 следует, что выполняются (6)–(8). Пусть (9) неверно, то есть $p = q$ (10). Тогда нижний слой P_1 группы P имеет вид: $P = S_1 \times S_2$, где $|S_i| = p$, $S_i < R_i$, $(i=1,2)$. Пересечение $(R_1 \times S_2) \cap (S_1 \times R_2) = S_1 \times S_2 = P_1$ – нециклическая группа, вопреки C_N-условию. Значит, (10) неверно, то есть выполняется (9).□

Лемма 4. Пусть в бесконечной бинарно конечной группе G существует инвариантная квазициклическая подгруппа A: $A \cong C_{p^\infty}$ (1). Такая G является F_N-группой тогда и только тогда, когда она – группа одного из следующих типов:

1. $G = C_{p^\infty} \times C_{q^\infty}$;
2. $G = C_{p^\infty} \times C_{p^\infty}$;
3. $G = C_{p^\infty} \times Z_{q^n}$;
4. $G = C_{p^\infty} \leftthreetimes Z_{q^n}$; $Z(G) \cap C_{p^\infty} = 1, p \neq 2$;
5. $G = C_{p^\infty} \times Z_{p^n}$;
6. $G / A \cong Z_{2^n}$, $A \cong C_{2^\infty}$, $|Z(G) \cap A| = 2$;
7. $G \cong C_{p^\infty}$.

Необходимость. Пусть в G существует такая подгруппа A. Так как $|A| = \infty$, то из определения F_N-группы следует, что в G/A любые две подгруппы инцидентны, и потому, как нетрудно видеть, выполняется одно из условий: 1. $G / A \cong C_{q^\infty}$; 2. $G / A \cong C_{p^\infty}$; 3. $G / A \cong Z_{q^n}$; 4. $G / A \cong Z_{p^n}$; 5. $G = A$.

Введем обозначение: $Z = Z(G)$. В случаях 1 и 2 группа G – типа 1 или 2 леммы 4. В случае 3 при $A \subset Z$ G – группа типа 3, а при $A \not\subset Z$ в силу следствия 1.12 леммы 1.17 из [4] $p \neq 2$ $|Z \cap A| = 1$ и G – группа типа 4. В случае 4 при $p \neq 2$ ввиду следствия 1.13 леммы 1.17 из [4] $A \subset Z$ и потому G – группа типа 5; при $p = 2$ в силу леммы 1.16 из [4] при $|Z \cap A| \geq 4$ G – одна из групп типа 5, а в противном случае $|Z \cap A| = 2$ и G – группа типа 6. В случае 5 G – группа типа 7.

Необходимость доказана.

Достаточность. В группах всех типов леммы 4 кроме 1 и 2, все бесконечные подгруппы инцидентны, и потому такие группы являются F_N-группами.

В группе типа 1 всякая бесконечная подгруппа содержит либо единственную квазициклическую p-подгруппу R, либо единственную квазициклическую q-подгруппу Q. Так как в G/R и G/Q любые две подгруппы инцидентны, то из неинцидентных бесконечных подгрупп C и D одна содержит Q, а вторая R, и потому $|C \cap D| < \infty$. Значит, группа типа 1 является F_N-группой.

В p-группе G типа 2 всякая собственная бесконечная подгруппа почти квазициклическая. Пусть C и D – две такие подгруппы и $|C \cap D| = \infty$. Тогда $(C \cap D)$ содержит квазициклическую подгруппу S и из определения группы типа 2 следует, что $G = S \times T$, где $T \equiv C_{p^\infty}$. Но тогда C/S и D/S инцидентны, то есть инцидентны C и D. Значит, для неинцидентных бесконечных C и D $|C \cap D| < \infty$, и потому группа типа 2 является F_N-группой. □

Теорема 5. Бесконечная бинарно конечная группа G является F_N-группой тогда и только тогда, когда она – одна из следующих групп: 1. Группа одного из типов 1–7 леммы 4; 2. В G существует $P = (C_{p^\infty} \times C_{p^\infty}) \lhd G$, G/P – примарная циклическая группа и для любой примарной циклической подгруппы S, не содержащейся в P, в P нет собственных бесконечных S-допустимых подгрупп.

Необходимость. Пусть G является F_N-группой. В силу леммы 3 группа G черниковская, а ее полная часть P есть группа типа (1) или (2) этой леммы. Если P – группа типа (2) при $p \neq q$ или типа (1), то G удовлетворяет условиям леммы 4 и потому она – группа одного из типов 1–7 этой леммы.

Пусть P – группа типа (2) леммы 3 при $p = q$, то есть $P = C_{p^\infty} \times C_{p^\infty}$. Если в P существует квазициклическая подгруппа N, инвариантная в G, то в силу леммы 4 $G = P$, то есть G –группа типа 2 леммы 4.

Пусть в P нет собственных бесконечных подгрупп, инвариантных в G. Ввиду F_N-условия G/P – примарная циклическая группа, то есть либо $G / P \cong Z_{p^n}$ и G – p-группа, либо $G / P \cong Z_{q^n}$.

Пусть S – любая циклическая подгруппа группы G, не принадлежащая P.

Если в P есть собственная бесконечная S-допустимая подгруппа P_1, то $(P \cap (P_1 S)) \supset P_1$, в противоречие с F_N-условием. Значит, в P нет собственных S-допустимых подгрупп. Очевидно, достаточно считать S примарной циклической. Необходимость доказана.

Достаточность.

Для групп типа 1 – то есть групп всех типов леммы 4 – достаточность доказана в этой лемме. Пусть G –группа типа 2 теоремы 5. Все ее подгруппы, содержащие P, инцидентны. Пусть R – истинная бесконечная группа G, не входящая в P и не содержащая P. Тогда $R = AK$, где $A \cong C_{p^\infty}$, $A \triangleleft R$, $K < G$, $K \notin P$, $|K| < \infty$. Подгруппа A K-допустима, а потому она S-допустима и для некоторой примарной циклической подгруппы S, не содержащейся в P, в противоречие с определением группы G. Значит, таких R нет, и потому всякая бесконечная подгруппа группы G либо содержится в P, либо содержит P. Так как P – группа типа 2 леммы 4, то она – F_N-группа.

Из доказанного следует, что G – F_N-группа. □

Теорема 6. Бесконечная бинарно конечная группа G является C_N-группой тогда и только тогда, когда она – группа одного из следующих типов (ниже $Z = Z(G)$):

1. типов 1, 3 и 7 леммы 4;
2. $G = N \leftthreetimes Q$, $N \cong C_{p^\infty}$, $p \neq 2$, $Q \cong Z_{q^n}$, $(Z \cap Q) <\cdot Q$;
3. $|G/N| = 2$; $N \cong C_{2^\infty}$, $|Z \cap N| = 2$;
4. $G = C_{p^\infty} \times Z_p$.

Необходимость. Пусть G является C_N-группой. Тогда она и F_N-группа и в силу теоремы 5 G либо группа одного из типов 1–7 леммы 4, либо группа типа 2 теоремы 5, содержащая подгруппу $P = A \times B$, где $A \cong B \cong C_{p^\infty}$.

Покажем, что такая группа P не является C_N-группой.

Пусть $A_1 < A$, $B_1 < B$ и $|A_1| = |B_1| = p$.

Тогда $(A \times B_1) \cap (A_1 \times B) = A_1 \times B_1$ – нециклическая группа, в противоречие с C_N-условием.

Значит, G не может быть группой типа 2 теоремы 5 и группой типа 2 леммы 4.

Остаются следующие случаи (ниже указаны типы леммы 4).

1. G – группа типа 1, 3, 7 – это группы типа 1 теоремы 6.

2. G – группа типа 4.

Тогда $G = N \leftthreetimes Q$, где $N \cong C_{p^\infty}$, $p \neq 2$, $Q \cong Z_{q^n}$.

Пусть $Q_1 <\cdot Q$ и $|A_1| = p$, $A_1 < N$. В силу C_N-условия $(N \leftthreetimes Q_1) \cap (A_1 \leftthreetimes Q) = A_1 \leftthreetimes Q_1$ – циклическая группа, то есть $A_1 \subset C(Q_1)$. Тогда в силу леммы 1.16 из [4] $N \subset C(Q_1)$, то есть $Q_1 < Z$. Так как по определению группы типа 4 $Q \not\subset Z$, то G – группа типа 2 теоремы 6.

3. G – группа типа 6.

Тогда $G/N \cong Z_{2^n}$ (1), $N \cong C_{2^\infty}$ (2), $|Z \cap N| = 2$ (3). В силу (2) $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ (4), $|N_k| = 2^k$ (5). В силу (1) $G/N = \langle gN \rangle$ (6). Если $g^2 = a \notin N$, то $N\langle a \rangle \cap N_k \langle g \rangle = N_k\langle a \rangle$ – циклическая 2-группа (в силу C_N-условия) при любом k. Но при некотором $k = m$ $|N_m| > |a|$, а тогда $a \subset N$. Поэтому в силу (6) $|G/N| = 2$. Этим доказано, что G – группа типа 3 теоремы 6.

4. G – группа типа 5.

Тогда $G = N \times B$, где $N \cong C_{p^\infty}$, $B \cong Z_{p^n}$. Пусть $N_1 < N$, $B_1 < B$ и $|N_1| = |B_1| = p$. Если $B_1 \neq B$, то $(N \times B_1) \cap (N_1 \times B) = N_1 \times B_1 \cong E_{p^2}$ – нециклическая группа, в противоречие с C_N-условием. Значит, $B_1 = B$ и G – группа типа 4 теоремы 6. Необходимость доказана.

Достаточность. Проверим, что группы типов 1-4 теоремы 6 являются C_N-группами.

1. G – группа типа 1, то есть группа одного из типов 1, 3 или 7 леммы 4.

Группы всех этих типов в силу леммы 4 являются F_N-группами и в то же время локально циклические, и потому они – C_N-группы.

2. G – группа типа 2.

Все ее истинные бесконечные подгруппы содержатся в подгруппе $H = N \times Z_1$, где $Z_1 = Z \cap Q$, и потому они локально циклические. Поэтому их пересечения со всеми конечными подгруппами циклические. Конечные примарные подгруппы группы G – циклические.

Пусть T_1 и T_2 – две нециклические конечные непримарные подгруппы группы G. Тогда $T_1 = N_k \leftthreetimes Q^X$ (7), $T_2 = N_e \leftthreetimes Q^Y$ (8), где $N_k < N_e$ (9). Если $T_1 \cap T_2$ содержит силовскую q-подгруппу Q^Z, то $T_1 = N_k \leftthreetimes Q^Z$, $T_2 = N_e \leftthreetimes Q^Z$, и, так как N_k и N_e инцидентны, то T_1 и T_2 инцидентны. Значит, если T_1 и T_2 не инцидентны, то в силу определения типа 2 $Z_1 <\cdot Q$, и потому имеем: $T_1 \cap T_2 = N_k \times Z_1$ – циклическая группа. Мы показали, что G – C_N-группа.

3. G – группа типа 3.

Единственная бесконечная ее подгруппа – это $N \cong C_{p^\infty}$.

По условию $G = N\langle g\rangle$, где $g^2 \subset N$ (10). Так как N представим в виде (4), то $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$ (11), где $H_k < H_e$ (12) при $k < l$ и $H_k = N_k\langle g\rangle$ (13). В силу (10) $\langle g^2\rangle = N_m$ (14). Из (11) и (12) следует, что $G = \bigcup_{k=m}^{\infty} H_k$ (15). В силу (13) и (14) при $k \geq m$ $g^2 \in N_k$ и $|H_k : N_k| = 2$. Тогда H_k имеет циклическую подгруппу индекса 2, и в силу леммы 7 из [1] H_k являются C_N-группами при любом $k \geq m$.

Если теперь A, B – любые две конечные подгруппы группы G, то в силу (15) существует $n \geq m$, что $A < H_n$ и $B < H_n$. Так как H_n – C_N-группа, то $A \cap B$ – циклическая группа. Значит, G – C_N-группа.

4. G – группа типа 4.

Тогда из ее определения следует, что всякая конечная нециклическая подгруппа группы G содержит ее нижний слой $G_1 \cong E_{p^2}$ и $G/G_1 \cong C_{p^\infty}$. Поэтому все конечные нециклические подгруппы группы G инцидентны. Так как в G истинная бесконечная подгруппа единственная и изоморфна C_{p^∞}, то G – C_N-группа. □

§ 3. О конечных неразрешимых *CIM*-группах

Лемма 5. Если конечная CIM-группа G имеет истинную нециклическую нормальную подгруппу S, то G разрешима.

Доказательство. Так как G – CIM-группа и S нециклическая, то G/S имеет единственную максимальную подгруппу, то есть ввиду конечности $G/S \cong Z_{q^n}$ (1).

Если S нильпотентна, то ввиду (1) G разрешима. Пусть S ненильпотентна. Тогда она имеет неинвариантную силовскую p-подгруппу P и $N(P) \neq G$. Так как $S \lhd G$, то по лемме Фраттини для любой такой P $G = S\cdot N(P)$ (2). В силу леммы 1 $(N(P) \cap S)$ – циклическая группа, и потому P циклическая.

Итак, в S все неинвариантные силовские подгруппы – циклические.

Пусть R – произведение всех инвариантных силовских подгрупп группы S.

Если $R = 1$, то в S все силовские подгруппы циклические, а тогда, как известно, S разрешима, и ввиду (1) G разрешима.

Пусть $R \neq 1$. Тогда $S = R \leftthreetimes T$ (3), где $(|R|, |T|) = 1$, и, по доказанному выше, все силовские подгруппы группы T циклические. Тогда T разрешима, и так как R нильпотентна, в силу (3) S разрешима. Теперь из (1) получаем, что G разрешима. □

Определение 5. Группа G называется *квазипростой*, если $G = G'$ и $G/Z(G)$ – простая группа.

Теорема 7. Конечная непростая CIM-группа G либо разрешима, либо является квазипростой группой с циклическим центром Z, $Z = \Phi(G)$ (1) и G/Z – простая CIM-группа.

Доказательство. Если G имеет истинную нециклическую нормальную подгруппу, то в силу леммы 5 G разрешима.

Пусть все истинные нормальные подгруппы группы G циклические и R – произведение всех таких нормальных подгрупп. В силу непростоты G $R \neq 1$. Если $R = G$, то G разрешима.

Пусть $R \neq G$ (1). Тогда R – истинная нормальная подгруппа группы G и по нашему предположению R – циклическая группа, а из (1) и определения R следует, что G/R – простая группа. Так как G – CIM-группа, то G/R – CIM-группа.

Рассмотрим $C(R)$. Так как $C(R) \lhd G$, то либо $C(R) = G$ (2), либо $C(R) \leq R$ (это видно из определения R). Так как R абелева, то в последнем случае $C(R) = R$ (3).

Пусть выполняется (3). Тогда $G/R \cong R \leq AutR$ (4). Так как R циклическая, то, как известно, $AutR$ – абелева группа. Тогда из (4) следует, что G разрешима.

Пусть выполняется (2). Тогда из простоты *G/R* следует, что R = Z(G) (5).

Для подгруппы G' возможны два случая:

1. $G' = G$.

Тогда G в силу определения 5 является квазипростой группой. Пусть $Z \not\subset \Phi(G)$ (6). Тогда существует такая $M <\cdot G$, что $Z \not\subset M$, и потому $G = MZ$. Отсюда следует, что $M \lhd G$ и G/M абелева, то есть $G' \subset M$, в противоречие с условием 1. Значит, (6) не выполняется, и потому $Z \subset \Phi(G)$. Теперь из простоты G/Z получаем справедливость (1).

Этим доказано, что в случае 1 G – квазипростая группа, удовлетворяющая условиям теоремы 7.

2. $G' \neq G$.

Тогда из определения R следует, что $G' \subset R$, и потому G/R абелева. Так как R циклическая, то G – разрешимая группа. □

Следствие. Пусть G – конечная неразрешимая *CIM*-группа и существует $M <\cdot G$ такая, что для любого $x \in (G \backslash M)$ $\left| M \cap M^x \right| = p$ (7), где p – простое число. Тогда G – простая группа.

Доказательство. Пусть G не простая. Тогда в силу теоремы 7 она квазипростая и $Z = Z(G) = \Phi(G)$. Поэтому $(M \cap M^x) \supset Z$, и в силу (7) $M \cap M^x =$ Z. Отсюда следует, что $(M/Z) \cap (M^x/Z) =$ Z (8) – единица группы G/Z. Так как последняя группа простая, то $N(M/Z) = M/Z$. Отсюда и из (8) следует, что G/Z – группа Фробениуса, и по теореме Фробениуса она не простая, в противоречие с теоремой 7. Значит, G – простая группа. □

Заключение

В § 1 получено описание конечных разрешимых C_N-групп (теорема 4). Оказалось, что этот класс "не очень сильно" отличается от класса конечных разрешимых *CIM*-групп.

В § 2 найдены все бесконечные бинарно конечные C_N-группы (в частности, все они локально разрешимы).

В § 3 описание конечных неразрешимых *CIM*-групп сведено к описанию простых и некоторых квазипростых групп с этим условием. Описание таких групп, по нашему мнению, представляет несомненный интерес.

Список литературы

1. *Половицкий Я.Д.* Конечные разрешимые группы с циклическими пересечениями максимальных подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 2(21). С. 22–35.
2. *Черников Н.С., Половицкий Я.Д., Чечулин В.Л.* Группы с условием инцидентности для нециклических подгрупп // Укр. матем. журнал. 1996. Т. 48, № 4. С. 533–539.
3. *Белоногов В.А.* Задачник по теории групп. М.: Наука, 2000. 240 с.
4. *Черников С.Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 383 с.
5. *Черников Н.С.* Локально конечные $\omega\sigma A$-факторизуемые группы // Исследования по теории групп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. С. 63–110.

On groups with cyclic intersections of nonincident (maximal) subgroups

Ya. D. Polovitsky, T. M. Konevskikh

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia

alg@psu.ru; 8(342) 239−63−21

The paper considers groups with cyclic intersections of nonincident subgroups (C_N-groups). Finite solvable and infinite binary finite C_N-groups are described based on the description of finite solvable *CIM*-groups obtained in [1]. The study of finite unsolvable *CIM*-groups is reduced to the description of simple and some quasisimple groups with this condition.

Keywords: *group; maximal subgroup; cyclic subgroup; incident.*