ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Математика. Механика. Информатика Вып. 3(46)

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

Периодические решения дифференциальных уравнений

Г. Г. Иванов, Г. В. Алфёров, В. С. Королёв, Е. А. Селицкая
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский проспект, 35
g.alferov@spbu.ru; +7-911-246-57-87

Сформулированы и доказаны теоремы об оценке числа периодических решений дифференциальных уравнений первого порядка.

Ключевые слова: *производное число; периодические решения, почти периодические решения; негладкий анализ, производные Дини-Гёльдера.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-3-5-15

Введение

В работе развивается основанный на идеях функционального анализа метод исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Изучению периодических решений посвящено большое количество работ. Основы теории периодических решений дифференциальных уравнений разрабатывали Анри Пуанкаре для задачи трех тел [1] и А.М. Ляпунов для задачи о движении любой механической системы [2]. Периодические решения играют существенную роль в качественной теории дифференциальных уравнений и в прикладных задачах [3]. Необходимость анализа периодических решений дифференциальных уравнений возникает в классической и небесной механике [4–11], космической робототехнике [12–18], а также при моделировании экономических процессов [23–35]. Однако общего подхода изучения периодических решений дифференциальных уравнений не существует. Имеется несколько методов и способов для решения данной задачи. Так, основным методом доказательства существования периодических решений дифференциальных уравнений являются: метод точечных отображений Пуанкаре–Андронова, метод направляющих функций, вариационные методы, топологический метод, усреднение Крылова–Боголюбова и т.д. Отметим, что перечисленные методы достаточно сложно применять на практике.

В данной работе, опираясь на результаты работ [19–21] и используя аппарат производных чисел [22], решается задача оценки числа периодических решений дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Верхняя оценка числа периодических решений

Пусть правая часть уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (1)$$

есть непрерывная по совокупности аргументов и ω-периодическая по t функция.

Теорема 1. Если правая часть уравнения (1) при каждом фиксированном t есть возрастающая по x функция, причем существует момент $t^* \in [0, \omega]$ такой, что $f(t^*, x)$ строго возрастает, то уравнение (1) может иметь не более одного периодического решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-08-00419.

Доказательство. Предположим, что вопреки утверждению теоремы, уравнение (1) имеет два периодических решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Покажем, что эти решения не имеют общих точек.

Поскольку $x_1(t) \not\equiv x_2(t)$, то существует точка t_0 такая, что $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$. Не нарушая общности, можно считать, что $t_0 = 0$ и

$$x_1(0) < x_2(0). \tag{2}$$

Допустим противное, а именно, что решения x_1 и x_2 пересекаются. Это означает, что существует такое $T > 0$, что $x_1(T) = x_2(T)$. Обозначим через t' точную нижнюю границу множества $\{t: x_1(t) = x_2(t), t > 0\}$. В силу непрерывности функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ и условия (2) заключаем, что $t' > 0$.

Из неравенства (2) и выбора точки t' следует, что при $t \in [0, t']$ $x_1(t) \le x_2(t)$. По условию теоремы функция $f(t, x)$ возрастает по x при каждом фиксированном t, и, следовательно, для $t \in [0, t']$ будет иметь место неравенство

$$f(t, x_1(t)) \le f(t, x_2(t)). \tag{3}$$

Разность $x_2(t') - x_1(t')$ представим в виде:

$$x_2(t') - x_1(t') = x_2(0) - x_1(0) + \int_0^{t'} [f(t, x_2(t)) - f(t, x_1(t))]dt.$$

Из (3) следует, что

$$\int_0^{t'} [f(t, x_2(t)) - f(t, x_1(t))]dt \ge 0,$$

но тогда, учитывая (2), получим

$$x_1(t') < x_2(t'),$$

что противоречит выбору точки t'.

Таким образом, при $t \ge 0$ решения x_1 и x_2 не пересекаются. Отсутствие у этих решений общих точек при $t < 0$ следует из ω-периодичности.

Итак, если уравнение (1) имеет два ω-периодических решения, и выполнено неравенство (2), то при всех t будет $x_1(t) < x_2(t)$, и, следовательно, при всех t будет иметь место неравенство (3). Но тогда и

$$\int_0^{\omega} [f(t, x_2(t)) - f(t, x_1(t))]dt \ge 0.$$

Более того, поскольку $f(t, x)$ непрерывна и $f(t^*, x)$ строго возрастает по x, то в некоторой окрестности точки $t^* \in [0, \omega]$ будет иметь место строгое неравенство $f(t, x_1(t)) < f(t, x_2(t))$, и потому мы вправе утверждать, что

$$\int_0^{\omega} [f(t, x_2(t)) - f(t, x_1(t))]dt > 0.$$

Учитывая последнее неравенство, приходим к следующей противоречивой цепочке соотношений:

$$0 = [x_2(\omega) - x_2(0)] - [x_1(\omega) - x_1(0)] = \int_0^{\omega} [f(t, x_2(t)) - f(t, x_1(t))]dt > 0.$$

Полученное противоречие и опровергает предположение о том, что в условиях теоремы уравнение (1) может иметь два различных ω-периодических решения.

Теорема 2. Если правая часть уравнения (1) при каждом фиксированном t есть выпуклая функция, причем для некоторого $t^* \in [0, \omega]$ $f(t^*, x)$ строго выпуклая по x, то уравнение (1) может иметь не более двух различных ω-периодических решений.

Доказательство. Прежде всего покажем, что в условиях теоремы уравнение (1) обладает свойством существования и единственности решения, для чего установим, что если f выпукла и непрерывна, то она является Липшицевой.

Действительно, пусть (t_0, x_0) – произвольная точка плоскости, а τ и δ – некоторые положительные числа. Покажем, что для области

$$D = \{(t, x): t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau], x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\}$$

существует такое L, что для любых $x', x'' \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и сразу для всех $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ будет

$$| f(t, x'') - f(t, x') | \le L | x'' - x' |.$$

При доказательстве теоремы 14 [22] мы отмечали, что при каждом фиксированном t функция f имеет ограниченную правую производную, которая является возрастающей функцией от x. Покажем, что существует такое K, что для всех $(t, x) \in D$ будет

$$| f'^{+}(t, x) | \le K.$$

Поскольку при каждом фиксированном t функция $f^{'+}(t,x)$ монотонно возрастает, то свои экстремальные значения она может принимать только на концах интервала. Следовательно, чтобы доказать требуемое неравенство, достаточно показать, что ограничены функции $f^{'+}(t,x_0-\delta)$ и $f^{'+}(t,x_0+\delta)$ при $t\in[t_0-\tau,t_0+\tau]$.

Покажем, что $f^{'+}(t,x_0+\delta)$ ограничена сверху. Выберем некоторое $m>x_0+\delta$. Тогда для всех $y\in(x_0+\delta,m]$, учитывая тот факт, что при любом фиксированном t функция $\dfrac{f(t,y)-f(t,x_0+\delta)}{y-x_0-\delta}$ возрастает по y, будем иметь

$$\frac{f(t,y)-f(t,x_0+\delta)}{y-x_0-\delta}\le\frac{f(t,m)-f(t,x_0+\delta)}{m-x_0-\delta}\le\frac{|f(t,m)|+|f(t,x_0+\delta)|}{m-x_0-\delta}.$$

Функция f непрерывна, и, следовательно, $|f(t,m)|$ и $|f(t,x_0+\delta)|$ ограничены на $[t_0-\tau,t_0+\tau]$. Таким образом, приходим к заключению, что существует некоторая константа K, такая, что для всех $y\in(x_0+\delta,m]$ и всех $t\in[t_0-\tau,t_0+\tau]$ будет

$$\frac{f(t,y)-f(t,x_0+\delta)}{y-x_0-\delta}\le K.$$

Но тогда для всех $t\in[t_0-\tau,t_0+\tau]$ будет и $f^{'+}(t,x_0+\delta)\le K.$ Аналогично доказы-вается, что $f^{'+}(t,x_0-\delta)$ ограничена снизу.

Объединяя эти два результата и учитывая, что при каждом t $f^{'+}$ является возрастающей по x функцией, убеждаемся в справедливости утверждения об ограниченности функции $f^{'+}$ на D.

Выберем в $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ две произвольные точки $x^{'}$ и $x^{''}$, а в $[t_0-\tau,t_0+\tau]$ произвольный момент $t^{'}$. Функция $f(t^{'},x)$ на $[x^{'},x^{''}]$ непрерывна и имеет конечную правую производную, что, в силу теоремы 12 [22], влечет существование точек $x_1,x_2\in(x^{'},x^{''})$ таких, что

$$f^{'+}(t^{'},x_1)\le\frac{f(t^{'},x^{''})-f(t^{'},x^{'})}{x^{''}-x^{'}}\le f^{'+}(t^{'},x_2).$$

Откуда, с учетом ограниченности на D функции $f^{'+}$ и произвольности выбора $x^{'}$, $x^{''}$ и $t^{'}$, следует, что для любого $L\ge K$ и произвольных $x^{'},x^{''}\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ будет

$$|f(t,x^{''})-f(t,x^{'})|\le L|x^{''}-x^{'}|,$$
$$t\in[t_0-\tau,t_0+\tau],$$

что и означает, что f – Липшицева.

Пусть выполнены условия теоремы. Покажем, что тогда уравнение (1) не может иметь более двух ω-периодических решений. Предположим противное, т.е. что уравнение (1) имеет три ω-периодических решения y_1, y_2 и y_3. Как показано выше, функция f удовлетворяет условию Липшица, и, следовательно, уравнение (1) обладает свойством существования и единственности решений, а потому, если при $t=0$

$$y_1(0)<y_2(0)<y_3(0),$$

то и при любом t будет

$$y_1(t)<y_2(t)<y_3(t). \qquad (4)$$

Выпишем два очевидных тождества, которые ввиду (4) имеют смысл при всех t:

$$\frac{\dot y_3-\dot y_2}{y_3-y_2}=\frac{f(t,y_3)-f(t,y_2)}{y_3-y_2}$$

и

$$\frac{\dot y_2-\dot y_1}{y_2-y_1}=\frac{f(t,y_2)-f(t,y_1)}{y_2-y_1}.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\frac{\dot y_3-\dot y_2}{y_3-y_2}-\frac{\dot y_2-\dot y_1}{y_2-y_1}=\frac{f(t,y_3)-f(t,y_2)}{y_3-y_2}-\frac{f(t,y_2)-f(t,y_1)}{y_2-y_1}. \qquad (5)$$

Представим решение уравнения (1) y_2 в виде

$$y_2(t)=\alpha(t)y_1(t)+(1-\alpha(t))y_3(t). \qquad (6)$$

В силу (4) очевидно, что при всех t $\alpha(t)\in(0,1)$.

Подставляя в правую часть (5) представление (6), получим

$$\frac{f(t,y_3)-f(t,y_2)}{y_3-y_2}-\frac{f(t,y_2)-f(t,y_1)}{y_2-y_1}=$$

$$= \frac{f(t,y_3) - f(t,\alpha y_1 + (1-\alpha)y_3)}{\alpha(y_3 - y_1)} -$$
$$- \frac{f(t,\alpha y_1 + (1-\alpha)y_3) - f(t,y_1)}{(1-\alpha)(y_3 - y_1)} =$$
$$= \frac{\alpha f(t,y_1) + (1-\alpha) f(t,y_3) - f(t,\alpha y_1 + (1-\alpha)y_3)}{\alpha(1-\alpha)(y_3 - y_1)}$$
$$= g(t).$$

Функция $g(t)$ непрерывна, так как непрерывны функции f и α и из неравенства (4) и определения α следует, что существует такое число $\beta > 0$, что при всех t будет

$$\alpha(t)(1-\alpha(t))(y_3(t) - y_1(t)) \geq \beta.$$

Более того, учитывая выпуклость функции f, т.е. что при всех t

$$\alpha f(t,y_1) + (1-\alpha) f(t,y_3) \geq f(t,\alpha y_1 + (1-\alpha)y_3),$$

заключаем, что при всех t

$$g(t) \geq 0.$$

Но при $t = t^* \in [0,\omega]$ по условию теоремы $f(t^*,x)$ строго выпукла, из чего следует, что как в самой точке t^*, так и в некоторой ее окрестности, в силу непрерывности, будет выполняться строгое неравенство $g(t) > 0.$

Таким образом, окончательно функция g непрерывна, неотрицательна и существует промежуток, на котором она принимает только положительные значения.

Принимая во внимание эти соображения, проинтегрируем тождество (5) в пределах от 0 до ω. Поскольку функции y_1, y_2 и y_3 ω-периодические, то получим

$$0 < \int_0^\omega g(t)dt = \int_0^\omega \frac{\dot y_3 - \dot y_2}{y_3 - y_2} - \frac{\dot y_2 - \dot y_1}{y_2 - y_1} dt =$$
$$\ln\left(\frac{y_3(\omega) - y_2(\omega)}{y_3(0) - y_2(0)}\right) - \ln\left(\frac{y_2(\omega) - y_1(\omega)}{y_2(0) - y_1(0)}\right) = 0.$$

Это противоречие и показывает, что при выполнении условий теоремы уравнение (1) не может иметь трех ω-периодических решений.

Теорема 3. Если правая часть уравнения (1) имеет непрерывную по совокупности аргументов производную $\frac{d}{dx} f(t,x) = f'(t,x)$, которая при каждом t является выпуклой по x функцией, причем существует момент $t^* \in [0,\omega]$ такой, что $f'(t^*,x)$ строго выпукла, то уравнение (1) не может иметь более трех ω-периодических решений.

Доказательство. Обозначим через $\phi(t,x)$ решение уравнения (1), начинающееся в точке x при $t = 0$. Тогда $\phi(\omega,x)$ есть точка, в которую попадет это решение при $t = \omega$. Введем вспомогательную функцию $\psi(x)$, положив $\psi(x) = \ln \phi'(\omega,x),$ где штрих означает $\frac{d}{dx}$.

Поскольку функция f' определена и непрерывна, то и функция ϕ' определена и непрерывна, а из уравнения в вариациях следует, что при любых x и t

$$\phi'(t,x) > 0.$$

Таким образом, функция $\psi(x)$ задана корректно.

Если дополнительно известно, что $\psi(x)$ строго выпукла, то теорему очень просто доказать.

Действительно, пусть уравнение (1) имеет четыре ω-периодических решения $\phi(t,x_i)$, начинающиеся в точках x_i, $i = 1,2,3,4$. Пусть, для определенности,

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4.$$

Построим функцию $\phi(\omega,x) - x$. Она непрерывна на каждом интервале $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1,2,3,$ принимает на концах интервала равные значения, поскольку, ввиду ω-периодичности, $\phi(\omega,x_i) = x_i$, $i = 1,2,3,4$ и, наконец, имеет производную в каждой точке x.

Таким образом, для функции

$$g(x) = \phi(\omega,x) - x$$

выполнены все условия теоремы Ролля, и, следовательно, существуют точки

$z_1 \in (x_1,x_2),$ $z_2 \in (x_2,x_3),$ $z_3 \in (x_3,x_4)$ такие, что

$$g'(z_j) = 0, \qquad j = 1,2,3.$$

Отсюда следует, что

$$\phi'(\omega,z_j) = 1, \qquad j = 1,2,3,$$

и окончательно получаем

$$\psi(z_j) = 0, \qquad j = 1,2,3.$$

Итак, если уравнение (1) имеет четыре ω-периодических решения, то функция $\psi(x)$ принимает равные значения в трех различных точках, что противоречит предположению о ее выпуклости. Следовательно, для того чтобы доказать теорему, нам достаточно показать, что функция $\psi(x)$ строго выпукла на $[x_1, x_4]$.

Из уравнения в вариациях находим

$$\psi(x) = \int_0^{\omega} f'(t, \phi(t, x))dt.$$

Функция $f'(t, x)$ по условию выпукла по x и, следовательно, в силу теоремы 14 [22], при каждом фиксированном t имеет в любой точке x конечную правую производную. Функция $\phi(t, x)$, в силу существования и единственности решений уравнения (1), строго возрастает по x при каждом фиксированном t. Из чего следует, что правую производную функции $f'(t, \phi(t, x))$, которую мы обозначим через $(f'(t, \phi(t, x)))'^{+}$, можно записать в виде

$$(f'(t, \phi(t, x)))'^{+} = (f')'^{+}(t, \phi(t, x))\phi'(t, x),$$

где через $(f')'^{+}(t, \phi(t, x))$ обозначена правая производная функции $f'(t, \phi)$ по переменной ϕ в точке $\phi = \phi(t, x)$. С учетом сказанного имеем

$$\psi'^{+}(x) = \int_0^{\omega} (f')'^{+}(t, \phi(t, x))\phi'(t, x)dt. \quad (7)$$

На множестве

$$D = \{(t, x): t \in [0, \omega], x \in [x_1, x_4]\}$$

функция $\phi(t, x)$ ограничена, так как в силу существования и единственности решений уравнения (1) она возрастает по x, и, следовательно, $\phi(t, x_1) \le \phi(t, x) \le \phi(t, x_4)$, а $\phi(t, x_1)$ и $\phi(t, x_4)$ ограничены на $[0, \omega]$ как непрерывные ω-периодические решения уравнения (1). Тогда на D ограничена, как непрерывная по совокупности аргументов, и функция $f'(t, \phi(t, x))$, а это влечет за собой ограниченность на D функции

$$\phi'(t, x) = e^{\int_0^t f'(\tau, \phi(\tau, x))d\tau}.$$

Далее, из доказательства теоремы 2 следует, что на D ограничена функция $(f')'^{+}(t, \phi(t, x))$, поскольку она является правой производной выпуклой по x и непрерывной по совокупности аргументов функции.

Таким образом, все функции, входящие в правую часть (7), ограничены, и, следовательно, функция ψ'^{+} ограничена на $[x_1, x_4]$.

Итак, ψ – непрерывная на $[x_1, x_4]$ функция, обладающая на этом интервале ограниченной правой производной. Тогда, согласно теореме 14 [22], чтобы доказать строгую выпуклость функции ψ на $[x_1, x_4]$, достаточно показать, что ψ'^{+} строго возрастает на $[x_1, x_4]$.

Пусть $\lambda^{+}[\psi'^{+}](x)$ произвольное правое производное число функции ψ'^{+} в точке $x \in [x_1, x_4]$, и $\{h_n\}$ – последовательность, на которой это число реализуется, $h_n \to 0$ при $n \to \infty$, $h_n > 0$. Покажем, что

$$\lambda^{+}[\psi'^{+}](x) \ge 0.$$

Действительно, учитывая, что функция $(f')'^{+}(t, \phi(t, x))$ возрастает по x, а $\phi'(t, x) > 0$, и используя уравнение в вариациях, получим:

$$\lambda^{+}[\psi'^{+}](x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}\Big(\int_0^{\omega} (f')'^{+}(t, \phi(t, x + h_n))\phi'(t, x + h_n) - (f')'^{+}(t, \phi(t, x))\phi'(t, x)\, dt\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}\int_0^{\omega} \phi'(t, x + h_n)[(f')'^{+}(t, \phi(t, x + h_n)) - (f')'^{+}(t, \phi(t, x))]dt +$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\omega} (f')'^{+}(t, \phi(t, x)) \frac{\phi'(t, x + h_n) - \phi'(t, x)}{h_n} dt \ge$$

$$\int_0^{\omega} (f')'^{+}(t, \phi(t, x))(\phi')'^{+}(t, x)\, dt =$$

$$\int_0^{\omega} [(f')'^{+}(t, \phi(t, x))\phi'(t, x)] \frac{(\phi')'^{+}(t, x)}{\phi'(t, x)} dt = \int_0^{\omega} \frac{d}{dt}\left[\psi'^{+}(t, x)\right]\psi'^{+}(t, x)dt$$

$$= \frac{1}{2}\psi'^{+2}(x) \ge 0.$$

Здесь мы положили

$$\psi^{'+}(t,x) = \frac{(\phi^{'})^{'+}(t,x)}{\phi^{'}(t,x)} =$$

$$\int_0^t (f^{'})^{'+}(\tau,\phi(\tau,x))\phi^{'}(\tau,x)d\tau$$

и учли, что $\psi^{'+}(\omega,x) = \psi^{'+}(x)$.

Предельный же переход под знаком интеграла допустим, поскольку правая производная $(\phi^{'})^{'+}$ функции $\phi^{'}$ существует и конечна на $[x_1,x_4]$.

Повторяя эти рассуждения, для произвольного левого производного числа функции $\psi^{'+}$ в точке x получим оценку

$$\lambda^{-}[\psi^{'+}](x) \geq \int_0^{\omega}(f^{'})^{'+}(t,\phi(t,x))(\phi^{'})^{'-}(t,x)dt.$$

Поскольку функция $(\phi^{'})^{'-}$ ограничена на

$$D = \{(t,x): t\in[0,\omega], x\in[x_1,x_4]\},$$

то функция $\lambda^{-}[\psi^{'+}]$ ограничена на $[x_1,x_4]$ снизу.

Итак, на $[x_1,x_4]$ все правые производные функции $\psi^{'+}$ неотрицательны, а все ее левые производные числа равномерно ограничены снизу. Следовательно, согласно теореме 9 [22], функция $\psi^{'+}$ возрастает на $[x_1,x_4]$.

Покажем, что $\psi^{'+}$ строго возрастает на $[x_1,x_4]$. Прежде всего отметим, что из полученной выше оценки

$$\lambda^{+}[\psi^{'+}](x) \geq \frac{1}{2}\psi^{'+^2}(x)$$

следует, что если точка x_0 не является корнем функции $\psi^{'+}$, то $\lambda^{+}[\psi^{'+}](x_0) > 0,$ и если в окрестности точки x_0 нет корней функции $\psi^{'+}$, то в этой окрестности функция $\psi^{'+}$ строго возрастает.

Предположим, что $\psi^{'+}$ возрастает, но не строго. Тогда найдется сегмент $[y_1,y_2]$, на котором функция $\psi^{'+}$ постоянна. Но, как следует из сделанного выше замечания, на этом сегменте $\psi^{'+}$ может быть только нулевой, так как, если существует окрестность, где $\psi^{'+}\neq 0$, то в ней $\psi^{'+}$ строго возрастает.

Таким образом,

$$\psi^{'+}(x) \equiv 0, \qquad x\in[y_1,y_2].$$

Тогда для правой производной функции $\psi^{'+}$ в произвольной точке $x\in[y_1,y_2]$ имеем:

$$0 = (\psi^{'+})^{'+}(x) =$$

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^{\omega}(f^{'})^{'+}(t,\phi(t,x+h))\phi^{'}(t,x+h)$$

$$-(f^{'})^{'+}(t,\phi(t,x))\phi^{'}(t,x)dt =$$

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_0^{\omega}\phi^{'}(t,x+h)[(f^{'})^{'+}$$

$$(t,\phi(t,x+h)) - (f^{'})^{'+}(t,\phi(t,x))]dt +$$

$$\int_0^{\omega}(f^{'})^{'+}(t,\phi(t,x))\left[\lim_{h\to+0}\frac{\phi^{'}(t,x+h)-\phi^{'}(t,x)}{h}\right]dt.$$

Как было показано выше, второе слагаемое есть $\frac{1}{2}\psi^{'+^2}(x) = 0$, следовательно, равно нулю и первое слагаемое, которое мы обозначим через $I(x)$.

Оценивая $I(x)$ снизу, получим:

$$0 = I(x) \geq \lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^{\omega} m[(f^{'})^{'+}(t,\phi(t,x+h))$$

$$-(f^{'})^{'+}(t,\phi(t,x))]dt \geq 0,$$

где

$$m = \min_{t\in[0,\omega], x\in[x_1,x_4], h\in[0,\delta]}\phi^{'}(t,x+h).$$

Покажем, что $m > 0$.

В силу теоремы об интегральной непрерывности для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ такое, что при $|x_1 - x| \leq \delta$ будет $|\phi(t,x_1) - \phi(t,x)| < \varepsilon$ сразу для всех $t\in[0,\omega]$. Можно считать, что выбранные ε и δ подходят и для решения $\phi(t,x_4)$. Решения уравнения (1) $\phi(t,x_1)$ и $\phi(t,x_4)$ ограничены на $[0,\omega]$ как периодические. Учитывая, что при каждом фиксированном $t\in[0,\omega]$ $\phi(t,x)$ возрастает по x, получим, что $\phi(t,x)$ ограничена на d. И следовательно, для выбранного выше δ $\phi(t,x)$ ограничена на

$$D^{'} = \{(t,x): t\in[0,\omega], x\in[x_1, x_4+\delta]\}.$$

Далее, функция $f^{'}$ по условию непрерывна по совокупности аргументов и, следовательно, также ограничена на $D^{'}$. Но тогда существует такое A, что для любых $t\in[0,\omega]$, $x\in[x_1,x_4]$ и $h\in[0,\delta]$ будет

$$\left|\int_0^t f^{'}(\tau,\phi(\tau,x+h))d\tau\right| \leq A.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\phi(t,x)=e^{\int_0^t f'(\tau,\phi(\tau,x))d\tau},$$

находим, что $m \geq e^{-A} > 0.$

Из положительности m и справедливости равенства

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^{\omega} m[(f')'^{+}(t,\phi(t,x+h)) - (f')'^{+}(t,\phi(t,x))]dt = 0$$

следует, что

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^{\omega} [(f')'^{+}(t,\phi(t,x+h)) - (f')'^{+}(t,\phi(t,x))]dt = 0.$$

Введем в рассмотрение функцию $r(x)$, положив

$$r(x)=\int_0^{\omega}(f')'^{+}(t,\phi(t,x))dt.$$

Из полученного выше равенства следует, что $r' = 0.$

Легко видеть, что левые производные функции r неотрицательны, причем, находя левую производную функции ψ'^{+} и повторяя для нее те же рассуждения, которые были приведены при рассмотрении правой производной этой функции, убеждаемся, что левая производная функции r ограничена еще и сверху. Таким образом, на основании теоремы 1 [22] заключаем, что функция r непрерывна на $[y_1, y_2]$, а тогда, в силу теоремы 13 [22], следует, что r постоянна на $[y_1, y_2]$.

Покажем, что $r(y_1) < r(y_2).$

Рассмотрим разность

$$r(y_2)-r(y_1)= \int_0^{\omega}[(f')'^{+}(t,\phi(t,y_2)) - (f')'^{+}(t,\phi(t,y_1))]dt.$$

$\phi(t,y_2) > \phi(t,y_1)$ в силу единственности. Отсюда,

$$(f')'^{+}(t,\phi(t,y_2)) - (f')'^{+}(t,\phi(t,y_1)) \geq 0,$$

так как по условию функция f' выпукла, и, следовательно, в силу теоремы 14 [22], $(f')'^{+}$ возрастает. Причем, по условию теоремы существует точка t^*, в которой функция f' строго выпуклая, и потому в этой точке

$$(f')'^{+}(t^*,\phi(t^*,y_2)) - (f')'^{+}(t^*,\phi(t^*,y_1)) > 0.$$

более того, это неравенство должно выполняться и в некоторой окрестности точки t^*.

Действительно, если это не так, то существует сходящаяся к t^* последовательность $\{t_k\}$ такая, что для любого k будет

$$(f')'^{+}(t_k,\phi(t_k,y_1)) = (f')'^{+}(t_k,\phi(t_k,y_2)).$$

Но тогда, как нетрудно проверить, для любого $\alpha \in (0,1)$ и сразу для всех k будет иметь место равенство

$$f'(t_k, \alpha\phi(t_k,y_1)+(1-\alpha)\phi(t_k,y_2)) = \alpha f'(t_k,\phi(t_k,y_1))+(1-\alpha)f'(t_k,\phi(t_k,y_2)).$$

Отсюда, в силу непрерывности функций f' и ϕ по совокупности аргументов, следует, что

$$f'(t^*, \alpha\phi(t^*,y_1)+(1-\alpha)\phi(t^*,y_2)) = \alpha f'(t^*,\phi(t^*,y_1))+(1-\alpha)f'(t^*,\phi(t^*,y_2)),$$

а это противоречит строгой выпуклости функции f' в точке t^*.

В силу сказанного приходим к заключению, что $r(y_1) < r(y_2).$

Полученное противоречие показывает, что интервала, на котором ψ'^{+} постоянна, не существует, и, следовательно, ψ'^{+} строго возрастает на $[x_1, x_4]$. Строгое же возрастание функции ψ'^{+}, как отмечалось выше, влечет за собой строгую выпуклость на $[x_1, x_4]$ функции ψ, что, как показано в начале доказательства теоремы, несовместимо с предположением о существовании у уравнения (1) четырех ω-периодических решений.

Пусть $f(t,x)$, как и раньше, непрерывная по совокупности аргументов и ω-периодическая по t функция.

Введем обозначения, положив

$$f^{-1}(t,x)=\int_0^x f(t,y)dy,$$

$$f^0(t,x)=f(t,x), \quad f^1(t,x)=f'(t,x).$$

Тогда все полученные результаты можно записать в единой форме.

Теорема 4. Если при некотором $k = 1,2,3$ функция $f^{k-2}(t,x)$ непрерывна по совокупности аргументов и выпукла по x при каждом фиксированном t, причем существует такой момент t^*, что $f^{k-2}(t^*,x)$ строго выпукла, то уравнение (1) может иметь не более k ω-периодических решений.

2. Нижняя оценка числа периодических решений

В работе [3] В.А. Плисс построил пример, показывающий, что этот ряд теорем не может быть продолжен. Здесь мы изложим другой подход, позволяющий в ряде случаев получить информацию о числе ω-периодических решений уравнения (1).

Теорема 5. Пусть правая часть уравнения (1) такова, что уравнение

$$f(t,\gamma(t)) \equiv 0$$

имеет n решений $\gamma_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,n$, обладающих следующим свойством: для любого $k = 0,1,\ldots,n,$ в области

$$D_k = \{(t,x): t \in (-\infty,+\infty), \gamma_k(t) < x < \gamma_{k+1}(t)\}$$

функция $f(t,x)$ знакопостоянная, причем знак функции меняется при переходе в соседнюю область. Тогда, если

$$\beta_j = \max_t \gamma_j(t) < \min_t \gamma_{j+1}(t) = \alpha_{j+1},$$

$$j = 1,2,\ldots,n-1,$$

то уравнение (1) имеет не менее n ω-периодических решений. Здесь мы считали, что $\gamma_0 = -\infty$, $\gamma_{n+1} = +\infty$.

Доказательство. Выберем произвольное $i = 1,2,\ldots,n$ и, для определенности, будем считать, что в области D_{i-1} $f(t,x) \le 0$, а в D_i $f(t,x) \ge 0$.

По условию теоремы

$$\beta_j < \alpha_{j+1}, \qquad j = 1,2,\ldots,n-1.$$

Следовательно, для выбранного i будет при $x = \alpha_i$ $G(x)(t) = \dot{x} - f(t,x) \ge 0,$ а при $x = \beta_i$ $G(x)(t) \le 0.$ Но тогда, как показали H.W. Knobloch в [19] и J. Mawhin в [20, 21], в полосе $\alpha_i \le x \le \beta_i$ существует хотя бы одно ω-периодическое решение уравнения (1).

Поскольку таких полос n, то уравнение (1) имеет не менее n ω-периодических решений.

Комбинируя теорему 5 с предыдущими теоремами п. 1, можно доказать ряд теорем, дающих более точную информацию о числе ω-периодических решений в уравнении (1). Для примера докажем одну такую теорему.

Теорема 6. Пусть правая часть уравнения (1) удовлетворяет всем требованиям теоремы 5, и при любом $i = 1,2,\ldots,n$ $f(t,x)$ является возрастающей или убывающей по x функцией в полосе $\alpha_i \le x \le \beta_i$.

Тогда уравнение (1) имеет n ω-периодических решений.

Доказательство. Выберем произвольное $i = 1,2,\ldots,n$ и, для определенности, будем считать, что в полосе

$$\alpha_i \le x \le \beta_i$$

$f(t,x)$ возрастает по x при каждом фиксированном t. Покажем, что в выбранной полосе располагается только одно ω-периодическое решение уравнения (1).

Пусть, напротив, в полосе

$$\alpha_i \le x \le \beta_i$$

располагаются два ω-периодических решения уравнения (1) $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Как было показано в доказательстве теоремы 1 эти решения нигде не пересекаются, и потому, не нарушая общности, можно считать, что при всех t

$$y_1(t) < y_2(t),$$

что, в силу предположения о монотонности функции $f(t,x)$, влечет за собой выполнение неравенства

$$f(t,y_1(t)) \le f(t,y_2(t)), \qquad t \in [0,\omega].$$

Учитывая это, заключаем, что имеет место неравенство

$$[y_2(\omega) - y_1(\omega)] - [y_2(0) - y_1(0)] =$$

$$\int_0^{\omega} [f(t,y_2(t)) - f(t,y_1(t))]dt \ge 0. \qquad (8)$$

Чтобы быть периодическим, решение $y_1(t)$ из области, расположенной над кривой $\gamma_i(t)$, обязательно должно перейти в область, расположенную под кривой $\gamma_i(t)$. Это значит, что существует момент $t' \in [0,\omega]$ такой, что

$$y_1(t') < \gamma_i(t') < y_2(t').$$

Но по условию теоремы

$$f(t',\gamma_i(t')) = 0,$$

и график функции $\gamma_i(t)$ является границей областей перемены знака функции $f(t,x)$. Следовательно, в точке t' должно выполняться неравенство

$$f(t',y_1(t')) < f(t',y_2(t')).$$

Из этого неравенства, поскольку функция $f(t,x)$ непрерывна, сразу следует, что в (8) имеет место знак строгого неравенства, а это противоречит предположению об ω-периодичности решений $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

Таким образом, полученное противоречие показывает, что в полосе

$$\alpha_i \le x \le \beta_i$$

существует не более одного ω-периодического решения уравнения (1). Но, как следует из теоремы 5, в этой полосе обязательно существует хотя бы одно ω-периодическое решение уравнения (1). Отсюда окончательно заключаем, что в каждой полосе

$$\alpha_i \le x \le \beta_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

располагается только одно ω-периодическое решение уравнения (1). Поскольку таких полос n, то уравнение (1) имеет точно n ω-периодических решений.

В частности, из теоремы 5 следует, что если правая часть уравнения (1) представима в виде

$$f(t,x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(t,x),$$

где $f_i(t,x) \equiv 0$ при $x = \gamma_i(t)$, и $\dfrac{f_i(t,x)}{x - \gamma_i(t)}$ – знакопостоянна при $x \ne \gamma_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то уравнение (1) имеет не менее n ω-периодических решений, если $\gamma_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют требованиям теоремы 5.

Заключение

На основе сформулированных и доказанных теорем показано применение метода производных чисел для оценки числа периодических решений дифференциальных уравнений первого порядка.

Список литературы

1. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 772 с.
2. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 472 с.
3. *Плисс В.А.* О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью. ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 5. С. 965–968.
4. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Исследование структуры предельного инвариантного множества одного класса стационарных систем с векторным управлением // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2016. № 48. С. 93–99.
5. *Иванов Г.Г.* К вопросу устойчивости линейно однородных систем с переключениями // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 33–34.
6. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Условия устойчивости линейных однородных систем с переключениями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. № 3 (34). С. 37–48.
7. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. № 2 (37). С. 25–30.
8. *Иванов Г.Г., Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В.* Исследование структуры предельных инвариантных множеств стационарных управляемых систем с нелинейностями гистерезисного типа // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого): матер. XIII междунар. конф. 2016. С. 63–165.
9. *Алфёров Г.В., Малафеев О.А., Мальцева А.С.* Процесс поиска и захвата объекта // Труды XXXXIV конференции "Процессы управления и устойчивость". 2013. С. 113–118.
10. *Ефимова П.А., Алфёров Г.В., Иванов Г.Г.* Стабилизация программного движения объекта управления с упруго присоединенными элементами // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4, № 1. С. 139–143.
11. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Интегрируемость негладких функций одной переменной // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics / Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы: тезисы докл. междунар. конф., посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова. 2017. С. 149–153.
12. *Алфёров Г.В., Кулаков Ф.М., Нечаев А.И., Чернакова С.Э.* Информационные системы виртуальной реальности в мехатронике и робототехнике: учеб. пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 168 с.
13. *Ефимова П.А., Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Шиманчук Д.В., Шарлай А.С.* Управление многозвенными манипуляционны-

ми роботами при наличии связей у перемещаемых ими объектов // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 121–122.

14. *Ефимова П.А., Шиманчук Д.В.* Моделирование движения космического манипуляционного робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2014. № 46. С. 20–30.
15. *Алфёров Г.В., Кулаков Ф.М., Неокесарийский В.Н.* Кинематические и динамические модели исполнительной системы робота. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 80 с.
16. *Алфёров Г.В.* К расчету динамической модели манипуляционных роботов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 1996. Вып. 30. С. 6–13.
17. *Пичугин Ю.А., Малафеев О.А., Алфёров Г.В.* Оценивание параметров в задачах конструирования механизмов роботов-манипуляторов // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 141–142.
18. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В.* Математические модели гибкого робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь, 1995. № 29. С. 92–97.
19. *Knobloch H.W.* Michigan.Math. J. 1962. № 9. P. 303–309.
20. *Mawhin J.* Periodic solutions of nonlinear functional differential equations, J. Differential Equations, 10, 1971. P. 240–261.
21. *Mawhin J.* Periodic solutions of some perturbed differential systems // Boll. Un. Mat. Ital., 1975. 11(4). P. 299–305.
22. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Горовенко П.А.* Производные числа функций одной переменной // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. № 3 (42). С. 5–19.
23. *Неверова Е.Г., Малафеев О.А., Алфёров Г.В.* Нелинейная модель управления антикоррупционными мероприятиями // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 445–446.
24. *Alferov G.V., Malafeyev O.A., Maltseva A.S.* Game-theoretic model of inspection by anticorruption group. 2015. AIP Conference Proceedings, 1648, P. 450009, DOI: 10.1063/1. 49-12668.
25. *Neverova E.G., Malafeyev O.A., Alferov G.V., Smirnova T.E.* Model of interaction between anticorruption authorities and corruption groups. 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. С. 488–490.
26. *Малафеев О.А., Рединских Н.Д., Алфёров Г.В.* Модель аукциона с коррупционной компонентой // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2015. № 1 (28). С. 30–34.
27. *Демидова Д.А., Алфёров Г.В., Колпак Е.П., Смирнова Т.Е.* Нелинейный процесс взаимодействия между коррумпированной фирмой и отделом по борьбе с коррупцией // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2015. №47. С. 17–31.
28. *Малафеев О.А., Рединских Н.Д., Алфёров Г.В., Смирнова Т.Е.* Коррупция в моделях аукциона первой цены // Управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2014). 7-я Российская мультиконф. по проблемам управления: матер. конф. Гнц РФ ОАО "концерн" ЦНИИ "Электроприбор". 2014. С. 141–146.
29. *Малафеев О.А., Алфёров Г.В., Мальцева А.С., Парфенов А.П.* Модель распределения заданий антикоррупционным группам, оперирующим в коррупционной среде // Управление социально-экономическим развитием регионов: проблемы и пути их решения: сб. науч. статей 4-й Междунар. науч.-практ. конф. 2014. С. 189–192.
30. *Алфёров Г.В., Малафеев О.А., Мальцева А.С* Модель проведения антикоррупционных инспекций // Управление социально-экономическим развитием регионов: проблемы и пути их решения: сб. науч. статей 4-й Междунар. науч.-практ. конф. 2014. С. 20–24.
31. *Malafeyev O.A., Redinskikh N.D., Alferov G.V.* Electric circuits analogies in economics modeling: corruption networks // 2nd International Conference on Emission Electronics (ICEE). Selected papers. 2014. С. 28–32.
32. *Малафеев О.А., Алфёров Г.В., Рединских Н.Д.* Оптимальное управление антикоррупционными ресурсами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. № 4(27). С. 49–52.

33. *Малафеев О.А., Алфёров Г.В., Рединских Н.Д.* Многоагентное управление в модели аукциона при возможной коррупции // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2014. № 46. С. 99–106.
34. *Alferov G.V., Malafeyev O.A., Maltseva A.S.* Game-theoretic model of inspection by anti-corruption group // (2015) AIP Conference Proceedings, 1648, P. 450009. doi: 10.1063/1.4912668.
35. *Алфёров Г.В., Малафеев О.А., Мальцева А.С.* Динамическая модель проведения инспекций // Процессы управления и устойчивость: тр. 45-й междунар. науч. конф. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014. С. 434–440.

Periodic solutions of differential equations

G. G. Ivanov, G. V. Alferov, V. S. Korolev, E. A. Selitskaya
Saint Petersburg State University; 35, Universitetsky prospekt, Peterhof, St. Petersburg, 199034, Russia
alferovgv@gmail.com; +7-911-246-57-87

In the paper, the authors formulate and prove theorems on the estimation for the number of periodic solutions of first-order differential equations.

Keywords: *derived number; periodic solutions; almost periodic solutions; nonsmooth analysis, Dini-Holder derived numbers.*