УДК 519.95

Полиномиальное соотношение для представления полной реакции одного класса двоичных 4D-модулярных динамических систем

Ф. Г. Фейзиев
Сумгаитский государственный университет
AZ5008, Азербайджан, г. Сумгаит, квартал 43, ул. Баку, 1
FeyziyevFG@mail.ru; (+994018) 6448906

Н. Б. Абаева
Сумгаитский государственный университет
AZ5008, Азербайджан, г. Сумгаит, квартал 43, ул. Баку, 1

Рассматривается вопрос представления полной реакции одного класса двоичных 4D-модулярных динамических систем в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры. Приводится рекуррентное соотношение для определения неизвестных коэффициентов этого полинома при известных входной и выходной последовательностей рассматриваемой системы.

Ключевые слова: *4D-модулярные динамические системы; фиксированная память; ограниченная связь; двухзначный аналог полинома Вольтерры; неизвестные коэффициенты; рекуррентное соотношение.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-2-46-54

Введение

Модулярные динамические системы (МДС) [1–5] являются одним из важных классов дискретных динамических систем (понятие модулярной динамической системы суть синоним – понятия конечные последовательностные машины, двоичные системы, последовательностные схемы и т.д. [6, 7]). Входные, выходные последовательности и последовательности состояния МДС принимают значения из конечного кольца или поля. Если конечное поле является полем $GF(p)$, тогда функция перехода и функция выхода МДС строится с помощью операции сложения и умножения по $\bmod p$ (p – простое число).

К настоящему времени исследованы однопараметрические и многопараметрические классы МДС [1–14]. Однопараметрические МДС находят широкое применение в различных областях (см. монография [3, 4, 6, 9, 15]). Многопараметрические МДС (короче nD-МДС, $n \geq 2$) суть системы с пространственной структурой и имеют более широкую возможность применения, чем однопараметрическая МДС. Однако к настоящему времени исследованы в основном линейные классы nD-МДС.

Для развития теории и приложения нелинейных МДС (НМДС) прежде всего необходимо найти формулу для их общего представления. К настоящему времени в работах [1, 6, 7, 9, 10, 14, 15] получены формулы в виде двухзначных аналогов полинома Вольтерры для представления одно- и двухпараметрических НМДС. А для нелинейных nD-МДС (nD-НМДС), где $n \geq 3$, формула общего представления получена лишь для одного класса 3D-НМДС [7].

Из-за отсутствия общей формулы представления классов nD-НМДС при $n \geq 3$ они в общем виде не исследовались. Представляют несомненный интерес исследования различных классов $3D-$НМДС, $4D-$НМДС и т.д.

В данной работе рассматривается вопрос аналитического представления полной реакции одного класса $4D$-НМДС, заданного входно-выходными соотношениями, в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры и определения неизвестных коэффициентов этого полинома в случае известных входной и выходной последовательностей рассматриваемых систем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим МДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2 \times P_3$, которая задается формулой

$$y[n, c_1, c_2, c_3] = G\{u[\tau, c_1 + p_1, c_2 + p_2, c_3 + \\ + p_3] \| n - n_0 \le \tau \le n,\ p_\alpha \in P_\alpha, \\ \alpha = \overline{1,3}\},\ GF(2). \tag{1}$$

Здесь n суть временной, c_1, c_2 и c_3 соответственно 1-й, 2-й и 3-й клеточный аргумент [5] и

$n \in \{0,1,2,...\}$, $c_\alpha \in \{...,-1,0,1,...\}$, $\alpha = \overline{1,3}$; $y[n, c_1, c_2, c_3] \in GF(2)$ и $u[n, c_1, c_2, c_3] \in \in GF(2)$ являются выходной и входной последовательностями МДС соответственно $P_\alpha = \{p_\alpha(1),..., p_\alpha(r_\alpha)\}$, $p_\alpha(1) < ... < p_\alpha(r_\alpha)$, $p_\alpha(j) \in \{...,-1,0,1...\}$, $j = 1,..., r_\alpha$, кроме того, $p_\alpha(1)$ и $p_\alpha(r_\alpha)$ конечные целые числа, где через $p_\alpha(j)$ обозначен j-й элемент множества P_α $(\alpha = \overline{1,3})$.

Можно записать функциональные соотношения (1) в более компактном виде. Для этого введем обозначения $c = (c_1, c_2, c_3)$ и $p = (p_1, p_2, p_3)$, где $p_\alpha \in P_\alpha, \alpha = \overline{1,3}$. Тогда соотношение (1) можно записать в виде

$$y[n, c] = \\ = G\{u[\tau, c + p] \| n - n_0 \le \tau \le n,\ p \in P\}, \\ GF(2). \tag{2}$$

Задача аналитического представления полной реакции $4D$-МДС (1) или (2) состоит в представлении отображения $G\{...\}$ в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры и определении неизвестных коэффициентов этого полинома при известных входной и выходной последовательностей рассматриваемых систем.

2. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции 4D-МДС

Рассмотрим вопрос вывода полиномиального соотношения для представления полной реакции $4D$-МДС, заданной по формуле (2). Для этого через $p(j)$ обозначим j-й элемент множества P. Число элементов множества P определяется выражением $r = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$. Отображения $G\{...\}$ можно записать в виде отображений, зависящих от $(n_0 + 1) \cdot r$ аргументов:

$$G\{...\} = \\ = f(u[n - n_0, c + p(1)], u[n - n_0, c + p(2)],... \\ ..., u[n - n_0, c + p(r)],..., u[n, c + p(r)]), \tag{3}$$

где $f(...)$ суть модулярная функция над конечным полем Галуа $GF(2)$. Ясно, что в каждой точке (n, c) модулярную функцию f можно представить в виде полинома над конечным полем $GF(2)$ с помощью произведения элементов множества U в разных возможных комбинациях [16], где

$$U = \{u[n, c + p(1)],..., u[n, c + p(r)],..., u[n - n_0, c + \\ + p(1)],..., u[n - n_0, c + p(r)]\}.$$

Во всевозможных комбинациях произведений элементов из U количество множителей, т.е. степеней нелинейности может быть от 0 до $(n_0 + 1)r$. Каждое такое произведение можно представить как элементарное произведение. Выберем произвольное $i \in \{1,..., (n_0 + 1)r\}$ и рассмотрим те произведения элементов из (3) в разных комбинациях которых степень нелинейности равна i. Пусть в произвольно выбранном произведении для каждого $\alpha \in \{1,..., r\}$ из множества $U_\alpha = \{u[n - \xi,\ c + p(\alpha)] \| \xi = 0,1,..., n_0\}$ участвуют множители количеством m_α, где $\alpha = 1,..., r$.

Таким образом, должно удовлетворяться следующее соотношение: пусть $m_1 + ... + m_r = i$

$$\Phi(i)=\{\overline{m}=(m_1,...,m_r)\big|m_\ell\in\{0,...,n_0+1\},\quad \ell=\overline{1,r},\quad m_1+...+m_r=i\},\tag{4}$$

$$Q(i,\overline{m})=\{\alpha\big|m_\alpha \text{ есть компонента } \overline{m} \text{ и } m_\alpha\neq 0,\quad \alpha=\overline{1,r}\}.\tag{5}$$

Ясно, что рассмотренное произведение со степенью нелинейности i в общем виде можно записать следующим образом:

$$\prod_{\alpha\in Q(i,\overline{m})}\prod_{\eta_\alpha=1}^{m_\alpha}u[n-\tau(\alpha,\eta_\alpha),c+p(\alpha)].\tag{6}$$

Фиксируем $i\in\{1,...,(n_0+1)r\}$ и $\overline{m}\in\Phi(i)$.

Для всех $(\alpha,\beta)\in Q(i,\overline{m})$ введем обозначение

$$\Gamma_1(m_\alpha)=\{\overline{\tau}_\alpha=(\tau(\alpha,1),...,\tau(\alpha,m_\alpha))\big|0\leq \leq\tau(\alpha,1)<...<\tau(\alpha,m_\alpha)\leq n_0\}.\tag{7}$$

Для всех $\alpha\in Q(\overline{m},i)$ образуем из векторов $\overline{\tau}_\alpha$ блочный вектор $\overline{\overline{\tau}}$. Множество всех блочных векторов (наборов) $\overline{\overline{\tau}}$ обозначим через $\Gamma(i,\overline{m})$. Очевидно, что каждому $\overline{\overline{\tau}}\in\Gamma(i,\overline{m})$ соответствует произведение вида (6) и

$$\Gamma(i,\overline{m})=\underset{\alpha\in Q(i,\overline{m})}{\mathrm{X}}\Gamma_1(m_\alpha),\tag{8}$$

где знак X есть знак операции Декартового произведения множеств.

Используя обозначения (4), (5), (7), (8) можем записать $f(...)$ в виде:

$$f(...)=K_0+\sum_{i=1}^{(n_0+1)r}\sum_{\overline{m}\in\Phi(i)}\sum_{\overline{\overline{\tau}}\in\Gamma(i,\overline{m})}K_{i,\overline{m}}[\overline{\overline{\tau}}]\times$$
$$\times\prod_{\alpha\in Q(i,\overline{m})}\prod_{\eta_\alpha=1}^{m_\alpha}u[n-\tau(\alpha,\eta_\alpha),c+p(\alpha)],GF(2),$$

где K_0, $K_{i,\overline{m}}[\overline{\overline{\tau}}]$, $\overline{\overline{\tau}}\in\Gamma(i,\overline{m})$, $\overline{m}\in\Phi(i)$ $i\in\{1,...,(n_0+1)r\}$, есть коэффициенты этого полинома.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть имеют место соотношения (4)–(5), (7), (8). Тогда полная реакция $4D$-МДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью P, характеризующаяся соотношением (2), может быть представлена в виде следующего двузначного аналога полинома Вольтерры:

$$y[n,c]=K_0+\sum_{i=1}^{(n_0+1)r}\sum_{\overline{m}\in\Phi(i)}\sum_{\overline{\overline{\tau}}\in\Gamma(i,\overline{m})}K_{i,\overline{m}}[\overline{\overline{\tau}}]\times$$
$$\times\prod_{\alpha\in Q(i,\overline{m})}\prod_{\eta_\alpha=1}^{m_\alpha}u[n-\tau(\alpha,\eta_\alpha),c+p(\alpha)],\ GF(2).\tag{9}$$

Теперь рассмотрим вопрос вывода полиномиального соотношения для представления полной реакции $4D$-МДС, заданной по формуле (1). В (1) отображения $G\{...\}$ можно записать в виде отображений, зависящих от $(n_0+1)\cdot r$ аргументов:

$$\begin{aligned}G\{...\}=f(&u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+p_2(1),c_3+\\&+p_3(1)],u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+p_2(1),c_3+\\&+p_3(2)],...,u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+p_2(1),c_3+\\&+p_3(r_3)],u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+p_2(2),c_3+\\&+p_3(1)],...,u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+p_2(2),\\&,c_3+p_3(r_3)],...,u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+\\&+p_2(r_2),c_3+p_3(r_3)],...,u[n,c_1+p_1(r_1),c_2+\\&+p_2(r_2),c_3+p_3(r_3)]).\end{aligned}\tag{10}$$

Ясно, что в каждой точке (n,c_1,c_2,c_3) модулярную функцию f можно представить в виде полинома над конечным полем $GF(2)$ с помощью произведения элементов множества U в разных возможных комбинациях, где

$$\begin{aligned}U=\{&u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+p_2(1),c_3+\\&+p_3(1)],u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+p_2(1),c_3+\\&+p_3(2)],...,u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+p_2(1),c_3+\\&+p_3(r_3)],u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+p_2(2),c_3+\\&+p_3(1)],...,u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+p_2(2),c_3+\\&+p_3(r_3)],...,u[n-n_0,c_1+p_1(1),c_2+p_2(r_2),c_3+\\&+p_3(r_3)],...,u[n,c_1+p_1(r_1),c_2+p_2(r_2),c_3+p_3(r_3)]\}.\end{aligned}\tag{11}$$

Во всевозможных комбинациях произведений элементов из U количество множителей, может быть от 0 до $(n_0+1)r$. Каждое такое произведение можно представить как элементарное произведение. Выберем произвольное $i\in\{1,...,(n_0+1)r\}$ и рассмотрим те произведения элементов из множества (11) в разных комбинациях, степень нелинейности которых равна i. Пусть в произвольно выбранном произведении для каждой пары (α,β,γ) из множества

$$U_{\alpha,\beta,\gamma}=\{u[n-\xi,\ c_1+p_1(\alpha),c_2+p_2(\beta),c_3+ +p_3(\gamma)]\big|\xi=0,1,...,n_0\}$$

участвуют множители количеством $m_{\alpha,\beta,\gamma}$, где $\alpha=1,...,r_1$, $\beta=1,...,r_2$, $\gamma=1,...,r_3$.

Таким образом, должно удовлетворяться равенство $\sum_{\alpha=1}^{r_1}\sum_{\beta=1}^{r_2}\sum_{\gamma=1}^{r_3} m_{\alpha,\beta,\gamma} = i$.

Пусть

$$\Phi(i)=\{\overline{m}=(m_{1,1,1},...,m_{1,1,r_3},m_{1,2,1},...,m_{1,2,r_3},... \\ ...,m_{1,r_2,r_3},...,m_{r_1,r_2,r_3})\Big| \sum_{\alpha=1}^{r_1}\sum_{\beta=1}^{r_2}\sum_{\gamma=1}^{r_3} m_{\alpha,\beta,\gamma}=i, \tag{12}$$

$$m_{\alpha,\beta,\gamma}\in\{0,...,n_0+1\}, \\ \alpha=\overline{1,r_1},\ \beta=\overline{1,r_2},\ \gamma=\overline{1,r_3}\},$$

$$Q(i,\overline{m})=\{(\alpha,\beta,\gamma)\big| m_{\alpha,\beta,\gamma}\ \textit{есть компонента}\ \overline{m} \\ \textit{и}\ m_{\alpha,\beta,\gamma}\neq 0,\ \alpha=\overline{1,r_1},\ \beta=\overline{1,r_2},\gamma=\overline{1,r_3}\}. \tag{13}$$

Каждое произведение со степенью i в общем виде можно записать следующим образом:

$$\prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q(i,\overline{m})}\ \prod_{\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} u[n-\tau(\alpha,\beta,\gamma,\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}),c_1+ \\ +p_1(\alpha),c_2+p_2(\beta),c_3+p_3(\gamma)]. \tag{14}$$

Фиксируем $i\in\{1,...,(n_0+1)r\}$ и $\overline{m}\in\Phi(i)$. Для всех $(\alpha,\beta,\gamma)\in Q(i,\overline{m})$ введем обозначение

$$\Gamma_1(m_{\alpha,\beta,\gamma})=\{\overline{\tau}_{\alpha,\beta,\gamma}=(\tau(\alpha,\beta,\gamma,1),... \\ ...,\tau(\alpha,\beta,\gamma,m_{\alpha,\beta,\gamma}))\big|0\le\tau(\alpha,\beta,\gamma,1))<... \\ ....<\tau(\alpha,\beta,\gamma,m_{\alpha,\beta,\gamma})\le n_0\}. \tag{15}$$

Для всех $(\alpha,\beta,\gamma)\in Q(i,\overline{m})$ из векторов $\overline{\tau}_{\alpha,\beta,\gamma}$ образуем блочный вектор $\overline{\overline{\tau}}$. Множество всех блочных векторов (наборов) $\overline{\overline{\tau}}$ обозначим через $\Gamma(i,\overline{m})$.

Очевидно, что

$$\Gamma(i,\overline{m})=\mathop{\mathrm{X}}_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q(i,\overline{m})}\Gamma_1(m_{\alpha,\beta,\gamma}) \tag{16}$$

и каждому $\overline{\overline{\tau}}\in\Gamma(i,\overline{m})$ соответствует произведение вида (14).

Используя обозначения (12), (13), (15), (16) можем записать $f(...)$ в виде следующего полинома:

$$f(...)=K_0+\sum_{i=1}^{(n_0+1)r}\ \sum_{\overline{m}\in\Phi(i)}\ \sum_{\overline{\overline{\tau}}\in\Gamma(i,\overline{m})} K_{i,\overline{m}}[\overline{\overline{\tau}}]\times \\ \times\prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q(i,\overline{m})}\ \prod_{\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} u[n-\tau(\alpha,\beta,\gamma,\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}),c_1+ \\ +p_1(\alpha),c_2+p_2(\beta),c_3+p_3(\gamma)\big],GF(2).$$

Таким образом,

$$y[n,c_1,c_2,c_3]=K_0+\sum_{i=1}^{(n_0+1)r}\ \sum_{\overline{m}\in\Phi(i)}\ \sum_{\overline{\overline{\tau}}\in\Gamma(i,\overline{m})} K_{i,\overline{m}}[\overline{\overline{\tau}}]\times \\ \times\prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q(i,\overline{m})}\ \prod_{\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} u[n-\tau(\alpha,\beta,\gamma,\sigma_{\alpha,\beta,\gamma}),\ c_1+ \\ +p_1(\alpha),c_2+p_2(\beta),c_3+p_3(\gamma)\big],GF(2). \tag{17}$$

Полиномиальное представление (17) является общим представлением для $4D$-МДС (1). Однако путем упорядочения слагаемых из этого представления можно получить другое, которое удобно при решении задачи синтеза МДС [6, 7, 9, 10, 14]. Рассмотрим упорядочение представления (17).

Пусть $i\in\{1,...,r(n_0+1)\}$, $\overline{m}\in\Phi(i)$ и

$$A(\overline{m})=\{m_{\alpha,\beta,\gamma}\big|\alpha=\overline{1,r_1},\ \beta=\overline{1,r_2},\gamma=\overline{1,r_3}\}.$$

Множество $A(\overline{m})$ представляет собой трехмерный массив размерностью $r_1\times r_2\times r_3$. По (17) индексы α, β и γ соответствуют клеточным аргументам c_1, c_2 и c_3. Рассмотрим трехмерное дискретное пространство. Пусть в этом пространстве выбрана прямоугольная система координат и ось абсцисс, ординат и аппликат суть $0c_1$, $0c_2$ и $0c_3$ соответственно. Пусть точка с координатами (α,β,γ), $\alpha=\overline{1,r_1}$, $\beta=\overline{1,r_2}$, $\gamma=\overline{1,r_3}$, отмечена числом $m_{\alpha,\beta,\gamma}$, $\alpha=\overline{1,r_1}$, $\beta=\overline{1,r_2}$, $\gamma=\overline{1,r_3}$. Все эти точки суть геометрическое представление массива $A(\overline{m})$ в трехмерном пространстве.

Рассмотрим матрицы $A_\alpha(\overline{m})$, $A_\beta(\overline{m})$ и $A_\gamma(\overline{m})$ размерности соответственно $r_2\times r_3$, $r_1\times r_3$ и $r_1\times r_2$, где

$$A_\alpha(\overline{m})=(m_{\alpha,\beta,\gamma}),\ \beta=\overline{1,r_2},\gamma=\overline{1,r_3};$$

$$A_\beta(\overline{m})=(m_{\alpha,\beta,\gamma}),\ \alpha=\overline{1,r_1},\gamma=\overline{1,r_3};$$

$$A_\gamma(\overline{m})=(m_{\alpha,\beta,\gamma}),\ \alpha=\overline{1,r_1},\beta=\overline{1,r_2}.$$

Все элементы каждой матрицы $A_\alpha(\overline{m})$, $A_\beta(\overline{m})$ и $A_\gamma(\overline{m})$ в отдельности образуют слой в массиве $A(\overline{m})$ $(\alpha=\overline{1,r_1},\ \beta=\overline{1,r_2},\ \gamma=\overline{1,r_3})$.

Отметим, что слои $A_\alpha(\overline{m})$, $A_\beta(\overline{m})$ и $A_\gamma(\overline{m})$ параллельны плоскостям $c_2 0 c_3$, $c_1 0 c_3$ и $c_1 0 c_2$ соответственно. Если в каком-то слое все точки отмечены нулем, то этот слой следует называть *нулевым слоем.* Ясно, что в зависимости от $\overline{m} \in \Phi(i)$ для некоторых α, β и γ некоторые из соответствующих слоев $A_\alpha(\overline{m})$, $A_\beta(\overline{m})$ и $A_\gamma(\overline{m})$ могут быть нулевые. Удалим все нулевые слои массива $A(\overline{m})$, которые параллельны хотя бы одной из плоскостей $c_2 0 c_3$, $c_1 0 c_3$, $c_1 0 c_2$ и построим массив $B(\overline{m})$. Обозначим размерность массива $B(\overline{m})$ через $\ell_1(\overline{m}) \times \ell_2(\overline{m}) \times \ell_3(\overline{m})$. Ясно, что размерность массива $B(\overline{m})$ не превышает размерности массива $A(\overline{m})$, т.е. $\ell_1(\overline{m}) \le r_1$, $\ell_2(\overline{m}) \le r_2$, $\ell_3(\overline{m}) \le r_3$. Таким образом, для всех элементов $\overline{m}$ множества $\Phi(i)$ построим соответствующий массив $B(\overline{m})$.

Из элементов множества $\Phi(i)$ построим специальные подмножества следующим образом: 1) любой элемент из множества $\Phi(i)$ входит только и только в одно специальное подмножество; 2) если для элементов $\overline{m}_1$ и $\overline{m}_2$ из множества $\Phi(i)$, соответствующие им массивы $B(\overline{m}_1)$ и $B(\overline{m}_2)$, совпадают, тогда оба элемента входят в одно и то же специальное подмножество. Обозначим через λ_i количество специальных подмножеств множества $\Phi(i)$. i_1-е специальное подмножество обозначим через $\Phi_1(i,i_1)$. Ясно, что

$$\Phi_1(i,j) \bigcap \Phi_1(i,\ell) = \varnothing,\ j \ne \ell;$$

$$\bigcup_{j=1}^{\lambda_i} \Phi_1(i,j) = \Phi(i).$$

Рассмотрим какое-либо подмножество $\Phi_1(i,i_1)$ множества $\Phi(i)$. Пусть этому подмножеству соответствует массив B размерностью $\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3$:

$$B = (m'_{\alpha,\beta,\gamma}),\quad \alpha = \overline{1,\ell_1},\quad \beta = \overline{1,\ell_2},\quad \gamma = \overline{1,\ell_3}.$$

Тогда элементы множества $\Phi_1(i,i_1)$ можно представить в следующем виде:

$$m_{j_\alpha,\sigma_\beta,\rho_\gamma} = m'_{\alpha,\beta,\gamma},$$
$$\alpha = \overline{1,\ell_1},\quad \beta = \overline{1,\ell_2}, \gamma = \overline{1,\ell_3},$$
$$m_{\alpha,\beta,\gamma} = 0, \alpha \notin \{j_1,\dots,j_{\ell_1}\},$$
$$\beta \notin \{\sigma_1,\dots,\sigma_{\ell_2}\}, \gamma \notin \{\rho_1,\dots,\rho_{\ell_3}\}.$$

Ясно, что каждой тройке $(\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho})$ соответствует элемент из множества $\Phi_1(i,i_1)$. Здесь $\overline{j} = (j_1,\dots,j_{\ell_1})$, $\overline{\sigma} = (\sigma_1,\dots,\sigma_{\ell_2})$ и $\overline{\rho} = (\rho_1,\dots,\rho_{\ell_3})$ являются наборами соответственно в $L_1(\ell_1)$, $L_2(\ell_2)$ и $L_3(\ell_3)$, где

$$\begin{aligned} &L_1(\ell_1) = \{(j_1,\dots,j_{\ell_1}) \big| 1 \le j_1 < \dots < j_{\ell_1} \le r_1\}, \\ &L_2(\ell_2) = \{(\sigma_1,\dots,\sigma_{\ell_2}) \big| 1 \le \sigma_1 < \dots,\sigma_{\ell_2} \le r_2\}, \\ &L_3(\ell_2) = \{(\rho_1,\dots,\rho_{\ell_3}) \big| 1 \le \rho_1 < \dots < \rho_{\ell_3} \le r_2\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} &F(i) = \{(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\overline{m}) \big| \overline{m} = (m_{1,1,1},\dots,m_{1,1,\ell_3}, \\ &m_{1,2,1},\dots,m_{1,2,\ell_3},\dots\dots,m_{1,\ell_2,\ell_3},\dots,m_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}), \\ &\sum_{\alpha=1}^{\ell_1}\sum_{\beta=1}^{\ell_2}\sum_{\gamma=1}^{\ell_3} m_{\alpha,\beta,\gamma} = i;\ m_{\alpha,\beta,\gamma} \in \{0,\dots,n_0+1\}, \\ &\alpha = \overline{1,\ell_1},\ \beta = \overline{1,\ell_2}, \gamma = \overline{1,\ell_3}; \\ &(\forall \alpha \in \{1,\dots,\ell_1\})(\exists \beta \in \{1,\dots,\ell_2\})(\exists \gamma \in \{1,\dots,\ell_3\}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (m_{\alpha,\beta,\gamma} \ne 0), \\ &(\forall \beta \in \{1,\dots,\ell_2\})(\exists \alpha \in \{1,\dots,\ell_1\})(\exists \gamma \in \{1,\dots,\ell_3\}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (m_{\alpha,\beta,\gamma} \ne 0), \\ &(\forall \gamma \in \{1,\dots,\ell_3\})(\exists \alpha \in \{1,\dots,\ell_1\})(\exists \beta \in \{1,\dots,\ell_3\}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (m_{\alpha,\beta,\gamma} \ne 0);\quad \ell_\sigma \in \{1,\dots,r_\sigma\}, \sigma = \overline{1,3}\}; \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\ell_3,\overline{m}) = \\ &= \{(\alpha,\beta,\gamma) \big| m_{\alpha,\beta,\gamma}\ \textit{есть компонента}\ \overline{m}\quad \textit{и} \\ &m_{\alpha,\beta,\gamma} \ne 0, \alpha = \overline{1,\ell_1},\ \beta = \overline{1,\ell_2}, \gamma = \overline{1,\ell_3}\}. \end{aligned} \tag{20}$$

Каждому $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\overline{m}) \in F(i)$ соответствует подмножество множества $\Phi(i)$. Пусть

$$\overline{m} = (m_{1,1,1},\dots,m_{1,1,\ell_3},m_{1,2,1},\dots,m_{1,2,\ell_3},\dots,m_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}), \tag{21}$$

$$\overline{\overline{\tau}} = (\overline{\tau}_{1,1,1},\dots,\overline{\tau}_{1,1,\ell_3},\overline{\tau}_{1,2,1},\dots,\overline{\tau}_{1,2,\ell_3},\dots,\overline{\tau}_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}), \tag{22}$$

$$L(\ell) = L_1(\ell_1) \times L_2(\ell_2) \times L_3(\ell_3). \tag{23}$$

При $\overline{\tau}_{\alpha,\beta,\gamma} \in \Gamma_1(m_{\alpha,\beta,\gamma})$, $\alpha = \overline{1,\ell_1}$, $\beta = \overline{1,\ell_2}$, $\gamma = \overline{1,\ell_3}$, где $(\alpha,\beta,\gamma) \in Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\ell_3,\overline{m})$, множество всех блочных векторов (наборов) $\overline{\overline{\tau}}$ обозначим через $\Gamma(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\overline{m})$.

Очевидно, что каждой четверке $<\overline{j},\overline{\sigma},\overline{\rho},\overline{\overline{\tau}}>$ соответствует произведение вида

$$\prod_{(\alpha,\beta,\gamma)\in Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\ell_3,\overline{m})} \prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} u[n-\tau(\alpha,\beta,\gamma,\xi_{\alpha,\beta,\gamma}),c_1+$$
$$+p_1(j_\alpha),c_2+p_2(\sigma_\beta),c_3+p_3(\rho_\gamma)],$$

$\bar{\bar{\tau}} \in \Gamma(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \overline{m})$, $\bar{j} \in L_1(\ell_1)$, $\bar{\sigma} \in L_2(\ell_2)$, $\bar{\rho} \in L_3(\ell_3)$.

Таким образом, справедлива теорема:

Теорема 2. Пусть имеют место соотношения (18)–(23). Тогда полная реакция $4D$-МДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2 \times P_3$, характеризующаяся соотношением (1), может быть представлена в виде следующего двухзначного аналога полинома Вольтерры:

$$y[n, c_1, c_2, c_3] = h_0 + \sum_{i=1}^{(n_0+1)r} \sum_{(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\overline{m}) \in F(i)} \sum_{(\bar{j},\bar{\sigma},\bar{\rho}) \in L(\ell)} \sum_{\bar{\bar{\tau}} \in \Gamma(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\overline{m})} h_{i,\ell_1,\ell_2,\ell_3,\overline{m}}[\bar{j}, \bar{\sigma}, \bar{\rho}, \bar{\bar{\tau}}] \times \tag{24}$$
$$\times \prod_{(\alpha,\beta,\gamma) \in Q_0(i,\ell_1,\ell_2,\ell_3,\overline{m})} \prod_{\xi_{\alpha,\beta,\gamma}=1}^{m_{\alpha,\beta,\gamma}} u[n - \tau(\alpha, \beta, \gamma, \xi_{\alpha,\beta,\gamma}),$$
$$, c_1 + p_1(j_\alpha), c_2 + p_2(\sigma_\beta), c_3 + p_3(\rho_\gamma)], GF(2).$$

3. Определение неизвестных коэффициентов полиномиальных представлений

Пусть при заданных значениях входной последовательности $u[n - \tau, c + p]$, $0 \le \tau \le n_0$, $p \in P$ известны значения выходной последовательности $y[n, c]$.

Рассмотрим вопрос определения коэффициентов K_0, $K_{i,\overline{m}}[\bar{\bar{\tau}}]$ в полиноме (9) для всех $\bar{\bar{\tau}} \in \Gamma(i, \overline{m})$, $\overline{m} \in \Phi(i)$, $i \in \{1, ..., (n_0 + 1)r\}$ в соответствии с известными входной и выходной последовательностями. Введем следующее обозначение:

$$x(\alpha, \tau) = u[n - \tau, c + p(\alpha)],\ \tau = \overline{0, n_0},\ \alpha = \overline{1, r}, \tag{25}$$

с помощью которого получим

$$y[n, c] =$$
$$= f(x(1,0), ..., x(1, n_0), ..., x(r, 0), ..., x(r, n_0)).$$
$$K_0 = f(0, ..., 0, ..., 0, ..., 0). \tag{26}$$

Положим

$$X = \{x(\alpha, \tau) | \tau = 0, ..., n_0;\ \alpha = 1, ..., r\}. \tag{27}$$

Пусть $x(\alpha, \tau)$ является единственной переменной из множества X, принимающей значение 1, а остальные переменные из X принимают значения 0, где $\tau \in \{0, ..., n_0\}$, $\alpha \in \{1, ..., r\}$.

В этом случае обозначим значение функции $f(...)$ через $f(x(\alpha, \tau) = 1)$. Учитывая значения переменных множества X, из (9) получаем

$$K_{1,(1_\alpha)}[((\tau))] = K_0 + f(x(\alpha, \tau) = 1), GF(2), \tag{28}$$

где через (1_α) обозначен элемент $\overline{m} \in \Phi(1)$, в котором $m_\alpha = 1$, а остальные компоненты этого элемента суть 0.

Пусть $x(\alpha_\nu, \tau(\nu, \xi)) = 1$, $\xi = \overline{1, \ell_\nu}$, $\nu = \overline{1, \theta}$, где $\theta \le r$, $\ell_\nu \le n_0 + 1$, $\tau(\nu, \xi) \in \in \{0, ..., n_0\}$, $\alpha_\nu \in \{1, ..., r\}$, а остальные переменные из X принимают значения 0. При этом через

$$f(x(\alpha_\nu, \tau(\nu, \xi))) = 1 | \xi = \overline{1, \ell_\nu}, \nu = \overline{1, \theta})$$

обозначено значение функции $f(...)$.

Пусть

$$S = \ell_1 + ... + \ell_\theta. \tag{29}$$

Построим полином, образованный из элементов множества D, где

$$D = \{x(\alpha_\nu, \tau(\nu, \xi))) = 1 | \xi = \overline{1, \ell_\nu}, \nu = \overline{1, \theta}\}.$$

Ясно, что этот полином имеет степень, равную числу S.

Пусть $\eta \in \{0, ..., S\}$. Рассмотрим произведения элементов из множества D в различных комбинациях, степень нелинейности которых равна η. Пусть в произвольно выбранном произведении для каждых $\nu \in \{1, ..., \theta\}$ из множества

$$\{x(\alpha_\nu, \tau(\nu, \xi))) = 1 | \xi = \overline{1, \ell_\nu},\}$$

участвуют множители, число которых суть β_ν. Тогда: $\beta_1 + ... + \beta_\theta = \eta$.

Пусть

$$\bar{\ell} = (\ell_1, ..., \ell_\theta),$$
$$F_1(\eta, \theta, \bar{\ell}) = \{(b, \bar{\beta}, \bar{\rho}) | 1 \le b \le \theta,\ \bar{\beta} = (\beta_{\rho_1}, ..., \beta_{\rho_b}),$$
$$1 \le \beta_{\rho_\alpha} \le \ell_{\rho_\alpha},\ \nu = \overline{1, b},\ \bar{\rho} = (\rho_1, ..., \rho_b) \in N_b(\theta),$$
$$\beta_{\rho_1} + ... + \beta_{\rho_b} = \eta\},$$
$$N_b(\theta) = \{\bar{\rho} = (\rho_1, ..., \rho_b) | 1 \le \rho_1 < ... < \rho_b \le \theta\}, \tag{30}$$
$$\Omega_{b,\bar{\beta},\bar{\rho}}(\bar{\ell}) = \mathop{\times}_{\nu=1}^{b} \Omega_{\beta_{\rho_\nu}}(\ell_{\rho_\nu}),$$

где

$$\Omega_{\beta_{\rho_\nu}}(\ell_{\rho_\nu}) =$$
$$= \{\bar{\pi}_\nu = (\pi_{\nu,1}, ..., \pi_{\nu,\beta_{\rho_\nu}}) | 1 \le \pi_{\nu,1} < ... < \pi_{\nu,\beta_{\rho_\nu}} \le \ell_{\rho_\nu}\}.$$

Тогда полином, образованный из элементов множества D, можно записать в виде

$$f(x(\alpha_\nu,\tau(\nu,\xi)))=1\Big|\xi=\overline{1,\ell_\nu},\nu=\overline{1,\theta})=$$
$$=K_0+\sum_{\eta=1}^{S}\sum_{(b,\bar\beta,\bar\rho)\in F_1(\eta,\theta,\bar\ell)}$$
$$\sum_{\bar{\bar\pi}\in\Omega_{b,\bar\beta,\bar\rho}(\bar\ell)}K_{\eta,(\beta_{\sigma_{\rho_1}},\dots,\beta_{\sigma_{\rho_b}})}[((\tau(\rho_1,\pi_{1,1}),\dots \tag{31}$$
$$,\tau(\rho_1,\pi_{1,\beta_{\rho_1}})),\dots,(\tau(\rho_b,\pi_{b,1}),\dots,\tau(\rho_b,\pi_{b,\beta_{\rho_b}})))]\times$$
$$\times\prod_{\nu=1}^{b}\prod_{\xi_{\rho_\nu}=1}^{\beta_{\rho_\nu}}x(\alpha_{\rho_\nu},\tau(\rho_\nu,\pi_{\nu,\xi_{\rho_\nu}})),GF(2),$$

где через $(\beta_{\sigma_{\rho_1}},\dots,\beta_{\sigma_{\rho_b}})$ обозначен элемент $\overline{m}\in\Phi(\eta)$, в которой $m_{\sigma_{\rho_\xi}}=\beta_{\sigma_{\rho_\xi}}$, $\xi=\overline{1,b}$, а остальные компоненты этого элемента суть 0.

Ясно, что в правой части формулы (31) слагаемое со степенью S имеет коэффициент
$K_{S,(\ell_1,\dots,\ell_\theta)}[((\tau(1,1),\dots,\tau(1,\ell_1)),\dots,(\tau(\theta,1),\dots,\tau(\theta,\ell_\theta)))]$
Поэтому, учитывая, что $x(\alpha_\nu,\tau(\nu,\xi))=1$, $\xi=\overline{1,\ell_\nu}$, $\nu=\overline{1,\theta}$, из формулы (31) получим:

$$K_{S,(\ell_1,\dots,\ell_\theta)}[((\tau(1,1),\dots,\tau(1,\ell_1)),\dots,(\tau(\theta,1),\dots,\tau(\theta,\ell_\theta)))]=$$
$$=f(x(\alpha_\nu,\tau(\nu,\xi)))= \tag{32}$$
$$=1\Big|\xi=\overline{1,\ell_\nu},\nu=\overline{1,\theta})+K_0+$$
$$+\sum_{\eta=1}^{S-1}\sum_{(b,\bar\beta,\bar\rho)\in F_1(\eta,\theta,\bar\ell)}$$
$$\sum_{\bar{\bar\pi}\in\Omega_{b,\bar\beta,\bar\rho}(\bar\ell)}K_{\eta,(\beta_{\sigma_{\rho_1}},\dots,\beta_{\sigma_{\rho_b}})}[((\tau(\rho_1,\pi_{1,1}),\dots,\tau(\rho_1,\pi_{1,\beta_{\rho_1}})),$$
$$\dots,(\tau(\rho_b,\pi_{b,1}),\dots,\tau(\rho_b,\pi_{b,\beta_{\rho_b}})))],\ GF(2).$$

Таким образом, справедлива

Лемма 1. Пусть $x(\alpha_\nu,\tau(\nu,\xi))=1$, $\xi=\overline{1,\ell_\nu}$, $\nu=\overline{1,\theta}$, где $\theta\le r$, $\ell_\nu\le n_0+1$, $\tau(\nu,\xi)\in\{0,\dots,n_0\}$, $\alpha_\nu\in\{1,\dots,r\}$, а остальные переменные из X принимают значения 0. При этом через

$$f(x(\alpha_\nu,\tau(\nu,\xi)))=1\Big|\xi=\overline{1,\ell_\nu},\nu=\overline{1,\theta})$$

обозначено значение функции $f(\dots)$.

Пусть имеет место (29), (30). Тогда справедлива формула (32).

Формулы (28), (32) основываются на обозначении (25). Эти формулы можно привести к виду, в котором обозначения (25) не используются. Ясно, что формулу (28) можно записать в виде

$$K_{1,(1_\alpha)}[((\tau))]=K_0+$$
$$+f(u[n-\tau,c+p(\alpha)]=1),GF(2). \tag{33}$$

Формулу (32) можно записать в виде

$$K_{S,(\ell_1,\dots,\ell_\theta)}[((\tau(1,1),\dots,\tau(1,\ell_1)),\dots,(\tau(\theta,1),\dots,\tau(\theta,\ell_\theta)))]=$$
$$=f(u[n-\tau(\nu,\xi),c+p(\alpha_\nu)]=1\Big|\xi=\overline{1,\ell_\nu},\nu=\overline{1,\theta})+$$
$$+K_0+\sum_{\eta=1}^{S-1}\sum_{(b,\bar\beta,\bar\rho)\in F_1(\eta,\theta,\bar\ell)}$$
$$\sum_{\bar{\bar\pi}\in\Omega_{b,\bar\beta,\bar\rho}(\bar\ell)}K_{\eta,(\beta_{\sigma_{\rho_1}},\dots,\beta_{\sigma_{\rho_b}})}[((\tau(\rho_1,\pi_{1,1}),\dots,\tau(\rho_1,\pi_{1,\beta_{\rho_1}})),$$
$$\dots,(\tau(\rho_b,\pi_{b,1}),\dots,\tau(\rho_b,\pi_{b,\beta_{\rho_b}})))],\ GF(2). \tag{34}$$

Для установления общей формулы определения любых коэффициентов в полиноме (9) рассмотрим коэффициент $K_{i,\overline{m}}[\bar{\bar\tau}]$, где $\bar{\bar\tau}\in\Gamma(i,\overline{m})$, $\overline{m}\in\Phi(i)$ и $i\in\{2,\dots,(n_0+1)r\}$.

Пусть:

$1'$. $\overline{m}\in\Phi(i)$, где $i=\overline{2,(n_0+1)r}$;

$2'$. Ненулевые элементы набора $\overline{m}$ есть m_α, где $\alpha\in Q(i,\overline{m})=\{\alpha_1,\dots,\alpha_\theta\}$ и $\theta\le r$;

$3'$. Множества $\Gamma_1(m_{\alpha_\nu})$, $\nu=\overline{1,\theta}$, есть следующие множества

$$\Gamma_1(m_{\alpha_\nu})=\{\bar\tau_\nu=(\tau(\nu,1),\dots,\tau(\nu,m_{\alpha_\nu}))\Big|0\le\tau(\nu,1)<\dots$$
$$\dots<\tau(\nu,m_{\alpha_\nu})\le n_0\};$$

$4'$. $\ell_\nu=m_{\alpha_\nu}$, $\nu=\overline{1,\theta}$;

$5'$. $u[n-\tau(\nu,\xi),c+p(\alpha_\nu)]=1$, $\xi=\overline{1,\ell_\nu}$, $\nu=\overline{1,\theta}$, а остальные переменные из множества U принимают значения 0 и в этом случае через

$$f(u[n-\tau(\nu,\xi),c+p(\alpha_\nu)]=1\Big|\xi=\overline{1,\ell_\nu},\nu=\overline{1,\theta})$$

обозначено значение функции $f_\nu(\dots)$.

При выполнения условия 1^0-5^0 ясно, что $\overline{m}=(\ell_1,\dots,\ell_\theta)=(m_{\alpha_1},\dots,m_{\alpha_\theta})$ и множества $\Gamma(i,\overline{m})$ содержат следующий единственный элемент

$$\bar{\bar\tau}=((\tau(1,1),\dots,\tau(1,\ell_1)),\dots,(\tau(\theta,1),\dots,\tau(\theta,\ell_\theta)))=$$
$$=((\tau(1,1),\dots,\tau(1,m_{\alpha_1})),\dots,(\tau(\theta,1),\dots,\tau(\theta,m_{\alpha_\theta}))).$$

На основе леммы 1 можно доказать

Теорема 3. Пусть выполняются условия $1'-5'$ и имеют место соотношения (30). Тогда для коэффициента $K_{i,\overline{m}}[\bar{\bar\tau}]$ полинома (9) справедлива следующая формула:

$$
\begin{aligned}
&K_{i,\overline{m}}[\overline{\overline{\tau}}] = \\
&= f(u[n-\tau(\nu,\xi), c+p(\alpha_\nu)] = \\
&= 1 \big| \xi = \overline{1, m_{\alpha_\nu}}, \nu = \overline{1,\theta}) + \\
&+ K_0 + \sum_{\eta=1}^{i-1} \sum_{(b,\overline{\beta},\overline{\rho}) \in F_1(\eta,\theta,\overline{\ell})} \\
&\sum_{\overline{\overline{\pi}} \in \Omega_{b,\overline{\beta},\overline{\rho}}(\overline{\ell})} K_{\eta,(\beta_{\sigma_{\rho_1}},\ldots,\beta_{\sigma_{\rho_b}})}[((\tau(\rho_1,\pi_{1,1}),\ldots,\tau(\rho_1,\pi_{1,\beta_{\rho_1}})), \\
&\ldots,(\tau(\rho_b,\pi_{b,1}),\ldots,\tau(\rho_b,\pi_{b,\beta_{\rho_b}})))], \quad GF(2).
\end{aligned} \tag{35}
$$

Ясно, что формулы (35), (26), (33)–(34) определяют рекуррентное соотношение для нахождения коэффициентов полинома (9) при известных значениях входных и выходных последовательностей.

Заключение

Двухзначный аналог полинома Вольтерры в виде (9), (17) и (24) является общим представлением для $4D$-МДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ и может быть использован при исследовании ее различных свойств, постановке и решении различных математических и прикладных задач для них и т.д. Полученное рекуррентное соотношение для определения коэффициентов полиномиальных представлений (9) при известных значениях входной и выходной последовательностей может быть использовано при разработке алгоритмов и программ для вычисления значений этих коэффициентов. Аналогично получению формулы для определения коэффициентов полиномиальных представлений (9) можно вывести формулы также для определения коэффициентов полиномиальных представлений (17) и (24).

Список литературы

1. *Бернштейн А.С., Пышкин И.В., Попков Ю.С., Фараджев Р.Г.* Аналитическое описание двоичных нелинейных последовательностных машин // Автоматика и телемеханика. 1971. № 12. С. 69–77.
2. *Цыпкин Я.З., Попков Ю.С.* Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973. 416 с.
3. *Гилл А.* Линейные последовательностные машины. М.: Наука, 1974. 288 с.
4. *Фараджев Р.Г.* Линейные последовательностные машины. М.: Сов. радио, 1975. 248 с.
5. *Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г.* Линейные клеточные машины: Подход пространства состояний (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125–163.
6. *Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р.* Модулярные последовательностные машины: Основные результаты по теории и приложению. Баку: Изд-во ЭЛМ, 2006. 234 с.
7. *Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А.* Полиномиальное соотношение для представления полной реакции $3D$-нелинейных модулярных динамических систем // Электронное моделирование. 2011. Т. 33, № 2. С. 33–50.
8. *Байбатшаев М.Ш., Попков Ю.С.* Об одной задаче квадратичной оптимизации двоичных нелинейных последовательностных машин // Автоматика и телемеханика. 1978. № 12. С. 37–47.
9. *Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г.* Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. Баку: Изд-во ЭЛМ, 1996. 180 с.
10. *Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Фейзиев Ф.Г.* Аналитическое описание и квадратичная оптимизация двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Докл. РАН. 1998. Т. 360, № 6. С. 750–752.
11. *Haci Yakup.* Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system // Applied and computational mathematics. 2009. Vol. 8, №. 2. P. 263–269.
12. *Haci Yakup., K. Özen.* Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multiparametric binary dynamical system // Control and cybernetics. 2009. Vol. 38, № 3. P. 625–633.
13. *Haci Y., Candan M., Or A.* On the Principle of Optimality for Linear Stochastic Dynamical System // International Journal in Foundations of Computer Science and Technology. 2016. Vol. 6, № 1. P. 57–63.
14. *Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А.* Задача синтеза двоичных $3D$-нелинейных модулярных динамических систем // Известия НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук: Информатика и проблемы управления. 2009. Т.XXIX, № 6. С. 126–133.
15. *Блюмин С.Л., Корнеев А.М.* Дискретное моделирование систем автоматизации и управления: монография. Липецк: Липецкий эколого-гуманитарный институт, 2005. 124 с.
16. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2003. 384 с.

The polynomial ratio for description of full reaction of one classes binary 4D-multidimensional modular dynamic systems

F. G. Feyziyev
Sumgait State University; 1, Baku st., 43 bloc, Sumgait, AZ5008, Azerbaijan
FeyziyevFG@mail.ru; (+994018) 6448906

N. B. Abayeva
Sumgait State University; 1, Baku st., 43 bloc, Sumgait, AZ5008, Azerbaijan

The question of the representation of full reaction of one class of binary 4D-modular dynamical systems in form two-valued analogue of the Volterra's polynomial is considered. To determine the unknown coefficients of this polynomial with known input and output sequences of the system under consideration a recurrence ratio is given.

Keywords: 4D-*Multidimensional modular dynamic system; fixed memory; limited connection; two-valued analogue of the Volterra's polynomial; unknown coefficients; recurrence ratio.*