ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2019 Математика. Информатика. Механика Вып. 2 (45)

УДК 519.2

Схема вычисления ковариационных функций векторов состояния нестационарных линейных стохастических дифференциальных систем с запаздыванием

И. Е. Полосков
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

В статье описана методика и алгоритм исследования во временно́й области систем линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) с переменными коэффициентами и постоянным запаздыванием, предназначенные для получения ковариационных функций векторов состояния. В предположении, что стохастические возмущения являются гауссовскими нестационарными случайными шумами, предложена схема, состоящая из многих шагов, каждый из которых состоит из трех этапов. На первом, основанном на классическом методе шагов, производится расширение пространства состояний, что в конечном счете позволяет получить цепочку систем линейных СОДУ без запаздывания; на втором, использующем корреляционнную теорию, строятся системы линейных ОДУ для векторных функций математического ожидания и матричных функций ковариации с необходимыми начальными условиями; на третьем этапе, также применяющем корреляционнную теорию и результаты второго этапа, достигается требуемый результат очередного шага.

Ключевые слова: *линейное уравнение*; *стохастическое обыкновенное дифференциальное уравнение*; *запаздывание*; *моментные функции*; *ковариационная функция.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-2-36-45

Введение

Динамические системы с наличием запаздывания (или последействия, или лага, или задержки, или ретардации) широко представлены в технике, природе и обществе. Они встречаются в самых разнообразных физических, химических, инженерных, экономических и биологических системах и т.д. Можно привести много примеров, когда запаздывание играет важную роль.

Среди таких примеров отметим [1, 2]:

1°. Хлопки зрителей, сидящих на футбольном стадионе. Несмотря на то, что они хлопают в ладоши синхронно, те, кто сидит в противоположных концах стадиона, не слышат синхронного с их собственным хлопания из-за задержки распространения звука с одного конца стадиона до другого.

2°. Течения Эль-Ниньо/Ла-Нинья или Южная осцилляция, где запаздывающая обратная связь представляет собой эффект океанских волн: распространяющиеся на запад волны Россби на океаническом слое скачка, которые после отражения от западной границы становятся бегущими на восток волнами Кельвина, которые вновь входят в связанную систему атмосфера–океан после временной задержки, равной их времени прохождения.

3°. Работа оператора системы управления, наблюдающего за состоянием системы и корректирующего параметры функционирования системы на основе поступающих данных. Поскольку эти корректировки никогда не могут быть выполнены мгновенно, между наблюдением и управляющим действием возникает запаздывание.

4°. Задержки соединений в сетях связанных динамических систем из-за запаздывания потока информации между ними, которые могут привести к появлению множества новых типов поведения: бифуркации с фазовым переворотом, бифуркации Неймарка–Сакера и др. Было доказано, что запаздывания в соединениях улучшают синхронизацию сетей.

5°. Наличие времени запаздывания (времени, необходимого для превращения топливной смеси в продукты сгорания) отрицательно влияет на процессы горения в жидкостных ракетных двигателях.

Обилие приложений стимулирует бурное развитие теории дифференциальных уравнений с запаздыванием (ДУсЗ), которые являются основными математическими моделями систем с ретардацией и представляют собой важнейший подкласс привлекающего в последнее время значительный и все увеличивающийся интерес с различных точек зрения класса функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) и различных частных форм ФДУ, таких как дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом обыкновенные и в частных производных, в том числе дифференциальные уравнения с запаздыванием (дифференциально-разностные, ДРУ) и нейтральные, а также интегро-дифференциальные уравнения [1, 3–16] и др., а сама теория ДУсЗ в настоящее время принадлежит к числу наиболее быстро развивающихся разделов теории ДУ.

В последнее время значительный интерес уделяется стохастическим ФДУ (СФДУ) различных типов [17–28], разработки методов исследования которых, как это случилось ранее для детерминированных систем, стали важными для теории и практики. Анализ таких ФДУ вызывает существенные трудности, так как СФДУ, возникающие во многих приложениях, не могут быть решены точно. Поэтому актуальной задачей является разработка эффективных как прямых (получение реализаций случайных процессов как решений СФДУ), так и косвенных (вероятностных характеристик, в основном, моментных функций) приближенных численных алгоритмов анализа систем СФДУ.

К настоящему времени разработан достаточно широкий класс методов решения детерминированных ФДУ [29, 30], а также их программных реализаций, которые включают и процедуры из математических пакетов *Maple* [31], *Matlab* [32, 33] и *Mathematica* [34]. На основе этих процедур и методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) [35–38] интенсивно развиваются приближенные алгоритмы прямого численного интегрирования СФДУ различных классов [39–42] в связке с процедурами статистического моделирования (метод Монте-Карло) [43, 44] и др.

Важной теоретической и практической задачей является построение схем расчета ковариационных функций векторов состояния систем СФДУ различных типов. Даже для простых линейных систем ОДУ с одним постоянным запаздыванием использование схем, не связанных с применением статистического моделирования, далеко не прост (см., например, алгоритм из работы [45]).

В статье описана методика и алгоритм исследования во временно́й области систем линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) с переменными коэффициентами и постоянным запаздыванием, предназначенные для получения ковариационных функций векторов состояния. В предположении, что стохастические возмущения являются гауссовскими нестационарными случайными шумами, предложена схема, состоящая из трех этапов. Первый, основанный на классическом методе шагов и расширении пространства состояний (см. [46–48]), позволяет получить цепочку систем линейных СОДУ без запаздывания; второй, использующий корреляционнную теорию, дает возможность построить системы линейных ОДУ для векторных функций математического ожидания и матричных функций ковариации, и, наконец, третий этап дает требуемый результат.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую систему линейных СОДУ в смысле Стратоновича с запаздыванием (в нестрогой форме):

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{c}_0(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \tag{1.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(t)\,\boldsymbol{X}(t-\tau) + \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \quad t_0 + \tau < t, \tag{1.3}$$

где t – время; t_0 и T – начальное и конечное время, $t_0 < t \leqslant T < +\infty$; $\tau > 0$ – постоянное запаздывание;

$$\boldsymbol{X}(t) = \big(X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\big)^{\intercal} \in \mathbb{R}^n$$

– вектор состояния. Начальное условие

$$\boldsymbol{X}^0 = \big(X_1^0, X_2^0, ..., X_n^0\big)^{\intercal}$$

– нормальный случайный вектор второго порядка с плотностью вероятности $p^0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Его среднее значение равно $\boldsymbol{m}_X^0 = \mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$, а ковариационная матрица –

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}^0 = \mathbb{E}\big[(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0)(\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{m}_X^0)^{\intercal}\big]\,,$$

т.е. $p^0(\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}\big(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{m}_X^0, \boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}^0\big)$. Вход

$$\big\{\boldsymbol{V}(t) = \big(V_1(t), V_2(t), ..., V_m(t)\big)^{\intercal},\ t \geqslant t_0\big\}$$

– m-мерный гауссовским случайный белый шум, который не зависит от $\boldsymbol{X}^0$ и состоит из независимых компонент, так, что

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{V}(t)] = 0,$$
$$\mathbb{E}\big[\boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{V}^{\intercal}(t')\big] = \boldsymbol{\mathcal{I}}_m\,\delta(t-t').$$

В уравнениях (1.1), (1.3) $\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t) = \{a_{0ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}}(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}(t) = \{q_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(t) = \{g_{ij}(t)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}(t) = \{g_{ij}(t)\}$ – детерминированные вещественные матрицы, $\boldsymbol{c}_0(t) = \{c_{0i}(t)\}$ и $\boldsymbol{c}(t) = \{c_i(t)\}$ – детерминированные действительные векторные функции в $\mathbb{R}^n$. Предполагается, что элементы всех этих матриц и векторов являются непрерывными функциями аргумента t. Кроме того, символами $\mathbb{E}[...]$, $\boldsymbol{\mathcal{I}}_m$, $\delta(...)$ и $\intercal$ обозначены оператор математического ожидания, единичная матрица m-го порядка, дельта-функция Дирака и символ транспонирования матрицы соответственно, а точка сверху указывает на производную по времени.

Заметим, что определение вектора состояния на начальном множестве $[t_0, t_0 + \tau]$ в форме $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}^0$ или $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{\phi}(t)$, где $\boldsymbol{\phi}(t)$ – заданная детерминированная векторная функция, легко сводится к формулировке задачи, приведенной выше.

Условия существования и единственности для сильных и слабых решений линейных и нелинейных стохастических систем с запаздыванием рассматриваются в [21, 22, 26, 27]. Поскольку уравнения (1.1), (1.3) являются линейными, вектор $\boldsymbol{X}^0$ является нормальным случайным вектором второго порядка, то в соответствии с [26], $\{\boldsymbol{X}(t),\ t \in [t_0, T]\}$, т.е. решение уравнений (1.1), (1.3), является гауссовским непрерывным в среднем квадратичном случайным процессом второго порядка.

Если взглянуть на уравнения (1.1), (1.3) с точки зрения теории случайных процессов, то можно сделать вывод, что вследствие наличия запаздывания случайный векторный процесс $\boldsymbol{X}(t)$, являющийся решением этих уравнений, в общем случае не будет случайным марковским векторным процессом [21]. Поэтому классическая корреляционная теория и известный аналитический аппарат теории марковских процессов, основанный на использовании уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнения) для плотностей вероятности $p(\boldsymbol{x}, t)$ и переходных плотностей $\pi(\boldsymbol{x}, t\,|\,\boldsymbol{y}, \theta)$ векторов состояний линейных или нелинейных динамических систем, не может использоваться для получения статистических характеристик $\boldsymbol{X}(t)$, таких как функции математического ожидания, ковариационные функции и т.д.

С другой стороны, попытки построения других математических моделей явлений, описываемых такими уравнениями, на основе этих уравнений, то есть моделей, более удобных для дальнейшего анализа, возникают вполне естественно.

Принимая во внимание предыдущие определения и обозначения, можно утверждать, что проблема, решаемая в этой статье, состоит в построении схемы для вычисления векторной функции

$$\boldsymbol{m}_X(t) \equiv \{m_{X_i}(t)\} = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]\,,$$

а также матричных функций

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}(t) = \{\mathcal{D}_{ij}(t)\} \equiv \mathbb{E}\Big[\mathring{\boldsymbol{X}}(t)\,\mathring{\boldsymbol{X}}^{\mathsf{T}}(t)\Big]$$

и

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2) = \{\mathcal{C}_{ij}(t_1,t_2)\} \equiv \mathbb{E}\Big[\mathring{\boldsymbol{X}}(t_1)\,\mathring{\boldsymbol{X}}^{\mathsf{T}}(t_2)\Big]$$

для всех t, t_1 and t_2 in $(t_0, T]$, где

$$\mathring{X}(t) = \boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{m}_X(t).$$

Поэтому предлагаемая схема состоит из трех этапов: 1) построение цепочки систем линейных СОДУ без запаздывания; 2) расчет зависимости $\boldsymbol{m}_X(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}(t)$ от времени; 3) вычисление $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t_1,t_2)$.

2. Уравнения для расширенного вектора состояния и первых моментных функций

Чтобы получить ОДУ для необходимых статистических характеристик вектора $X(t)$ для любого $t > t_0$, расширим пространство состояний исследуемой системы путем преобразования немарковской системы в марковскую. Чтобы сделать такое преобразование, воспользуемся следующими обозначениями:

$$\begin{gathered}
s \in [0,\tau], \quad t_k = t_0 + k\,\tau, \quad k = 0,1,2,...,N+1,\\
t_{N+1} \geqslant T,\ s_k = s + t_k,\ \Delta_k = (t_k, t_{k+1}],\\
\boldsymbol{X}_k(s) = \boldsymbol{X}(s+t_k), \quad \boldsymbol{X}_k(0) = \boldsymbol{X}_{k-1}(\tau)\ \text{п.н.},\\
\boldsymbol{W}_k(s) = \boldsymbol{W}(s+t_k),\ \boldsymbol{W}_k(0) = \boldsymbol{W}_{k-1}(\tau)\,\text{п.н.},\\
\boldsymbol{Y}(s) \equiv \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{Z}_0(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s)\big),\\
\boldsymbol{Z}_1(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Y}(s), \boldsymbol{X}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big) \equiv\\
\equiv \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(s), \boldsymbol{X}_1(s)\big),\\
\boldsymbol{Z}_2(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_1(s), \boldsymbol{X}_2(s)\big), \quad ...\\
\boldsymbol{Z}_N(s) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(s), \boldsymbol{X}_N(s)\big).
\end{gathered}$$

Теперь используя пошаговую процедуру, построим цепочку систем линейных СОДУ без запаздывания для расширенных векторных случайных процессов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, $\boldsymbol{Z}_2(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$, принадлежащих семейству вложенных пространств состояний $\mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{3n} \subset ... \subset \mathbb{R}^{n(N+2)}$.

0°. Рассмотрим полуинтервал Δ_0. Компоненты случайного векторного процесса $\boldsymbol{Z}_0(s)$, определенного на Δ_0, удовлетворяют следующей системе СОДУ:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) +\\
&\qquad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s), \qquad (2.1)\\
&\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0
\end{aligned}$$

(здесь и далее точка над символом обозначает производную по s).

Если объединить уравнения (2.1) в виде

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Z}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s)\,\boldsymbol{Z}_0(s) + \boldsymbol{c}_0^+(s) +\\
&\qquad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s)\,\boldsymbol{V}_0(s), \qquad (2.2)\\
&\boldsymbol{Z}_0(0) = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{X}^0, \boldsymbol{X}^0\big), \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{c}_0(s_0)\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\end{bmatrix},$$

где $\boldsymbol{O}_\nu$ и $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\nu\times\mu}$ – нулевые вектор и матрица соответствующей размерности, и сравнить структуру систем СОДУ (2.2), (2.3) и (A.1), (A.2), можно заключить, что эти системы будут одинаковы в случае, когда

$$\begin{gathered}
r = 2\,n, \quad q = m, \quad s_* = 0, \quad s^* = \tau,\\
\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0^+(s),\ \underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_0^+(s),\ \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_0^+(s).
\end{gathered}$$

Кроме того, этот факт дает нам возможность построить явную форму уравнений (A.3), (A.4), определить начальные условия для $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$ и $\mathcal{D}_{Z_0Z_0}(s)$ в форме

$$\boldsymbol{m}_{Z_0}(0) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_X^0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{Z_0Z_0}(0) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}^0\\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}^0 & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}^0\end{bmatrix}$$

соответственно, а затем вычислить $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{Z_0Z_0}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{ZZ}(s)$, причем рассчитывать $\boldsymbol{m}_{Z_0}(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{Z_0Z_0}(s)$ как функции s можно как одновременно, так и последовательно, что одновременно даст $\boldsymbol{m}_X(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}(t)$ для $t_0 < t \leqslant t_1$.

1°. Теперь обратимся к сегментам Δ_0 и Δ_1. Система СОДУ для вычисления расширенного вектора состояния $\boldsymbol{Z}_1(s)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) +\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\,X_0(s) +\\
&\quad + \boldsymbol{c}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\,V_1(s),\\
&\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0,\ \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0,\ \boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Действуя как на шаге **0°**, мы можем написать краткую форму уравнений (2.4):

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{Z}}_1(s) &= \boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s)\,\boldsymbol{Z}_1(s) + \boldsymbol{c}_1^+(s) +\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s)\,\boldsymbol{V}_1^+(s),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{Z}_1(0) = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{Z}_0(0), \boldsymbol{X}_0(\tau)\big), \tag{2.6}$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1) & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_n\\ \boldsymbol{c}_0(s_0)\\ \boldsymbol{c}(s_1) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_0(s)\\ \boldsymbol{V}_1(s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1) \end{bmatrix}.$$

Как и выше, сравниваем структуры уравнений (2.5), (2.6) и (A.1), (A.2) и находим, что эти системы будут идентичны, если

$$r = 3n, \quad q = 2m, \quad s_* = 0, \quad s^* = \tau,$$
$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_1^+(s),\ \underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_1^+(s),\ \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_1^+(s).$$

Из этого следует, что и в этом случае мы имеем возможность построить подобную шагу **0°** форму систем ОДУ на основе уравнений (A.3), (A.4), зафиксировать начальные условия для $\boldsymbol{m}_{Z_1}(s)$ и $\mathcal{D}_{Z_1Z_1}(s)$ в виде:

$$\boldsymbol{m}_{Z_1}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_X^0\\ \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_{Z_1Z_1}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{YX_0}(\tau)\\ \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{XX}^0 & \mathcal{D}_{YX_0}(\tau)\\ \mathcal{D}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{D}_{X_0Y}(\tau) & \mathcal{D}_{X_0X_0}(\tau) \end{bmatrix},$$

и вычислить $\boldsymbol{m}_{Z_1}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{Z_1Z_1}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{ZZ}(s)$, что позволит одномоментно получить $\boldsymbol{m}_X(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}(t)$ как $\boldsymbol{m}_{X_1}(s)$ и $\mathcal{D}_{X_1X_1}(s)$ соответственно для $t_1 < t \leqslant t_2$.

... ...

N°. На последнем шаге рассматриваем временные полуинтервалы Δ_0, Δ_1, ..., Δ_N и строим систему СОДУ для вектора состояния $\boldsymbol{Z}_N(s)$ в следующей форме:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{Y}}(s) = \boldsymbol{O}_n,\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_0(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s_0)\,\boldsymbol{X}_0(s) + \boldsymbol{c}_0(s_0) +\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_0(s_0)\,\boldsymbol{V}_0(s),\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_1(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_1)\,\boldsymbol{X}_1(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_1)\,X_0(s) +\\
&\quad + \boldsymbol{c}(s_1) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_1)\,V_1(s),\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&\dot{\boldsymbol{X}}_N(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N)\,\boldsymbol{X}_N(t) + \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)\,X_{N-1}(s) +\\
&\quad + \boldsymbol{c}(s_N) + \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N)\,V_N(s),\\
&\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{X}^0, \quad \boldsymbol{X}_0(0) = \boldsymbol{X}^0,\\
&\boldsymbol{X}_1(0) = \boldsymbol{X}_0(\tau),\ \dots\ \boldsymbol{X}_N(0) = \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Дальнейшие действия аналогичны тем, которые выполнены в рамках шагов **0°**, **1°**, ..., **(N-1)°**:

1) запись уравнений (2.7) в сжатой форме:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{Z}}_N(s) &= \boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s)\,\boldsymbol{Z}_N(s) + \boldsymbol{c}_N^+(s) +\\
&\quad + \boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s)\,\boldsymbol{V}_N^+(s),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{Z}_N(0) = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(0), \boldsymbol{X}_{N-1}(\tau)\big), \tag{2.9}$$

где используемые матрицы и векторы рассчитываются так:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{N-1}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(N+1)n\times n}\\ [\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times Nn}\ \ \boldsymbol{\mathcal{Q}}(s_N)] & \boldsymbol{\mathcal{A}}(s_N) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{N-1}^+(s)\\ \boldsymbol{c}(s_N) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{W}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_{N-1}^+(s)\\ \boldsymbol{W}_N(s) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{G}}_{N-1}^+(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(N+1)n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times Nm} & \boldsymbol{\mathcal{G}}(s_N) \end{bmatrix};$$

2) сравнение уравнений (2.8), (2.9) с уравнениями (A.1), (A.2) и вывод о том, что эти системы будут подобны, если

$$r = (N+2)\,n, \quad q = (N+1)\,m, \quad s_* = 0,$$
$$s^* = \tau, \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{A}}_N^+(s),$$
$$\underline{\boldsymbol{c}}(s) = \boldsymbol{c}_N^+(s), \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \boldsymbol{\mathcal{G}}_N^+(s);$$

3) построение явной формы уравнений (A.3), (A.4);

4) установка начальных условий для $\boldsymbol{m}_{Z_N}(s)$ и $\mathcal{D}_{Z_N Z_N}(s)$ в виде:

$$\boldsymbol{m}_{Z_N}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{Z_{N-1}}(0) \\ \boldsymbol{m}_{X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{Z_N Z_N}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{Z_{N-1}Z_{N-1}}(0) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{Z_N Z_N}^{[12]}(0) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{Z_N Z_N}^{[21]}(0) & \mathcal{D}_{X_{N-1}X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{Z_N Z_N}^{[12]}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{D}_{YX_{N-1}}(\tau) \\ \mathcal{D}_{X_0X_{N-1}}(\tau) \\ \ldots \\ \mathcal{D}_{X_{N-2}X_{N-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{Z_N Z_N}^{[21]}(0) = \big[\mathcal{D}_{X_{N-1}Y}(\tau) \;\; \mathcal{D}_{X_{N-1}Y}(\tau) \;\; \mathcal{D}_{X_{N-1}X_0}(\tau) \;\; \ldots \;\; \mathcal{D}_{X_{N-1}X_{N-2}}(\tau)\big];$$

5) расчет $\boldsymbol{m}_{Z_N}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{Z_N Z_N}(s)$ как $\underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{ZZ}(s)$, что позволит одномоментно получить $\boldsymbol{m}_X(t)$ и $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{XX}(t)$ как $\boldsymbol{m}_{X_N}(s)$ и $\mathcal{D}_{X_N X_N}(s)$ соответственно для $t_{N-1} < t \leqslant t_N$.

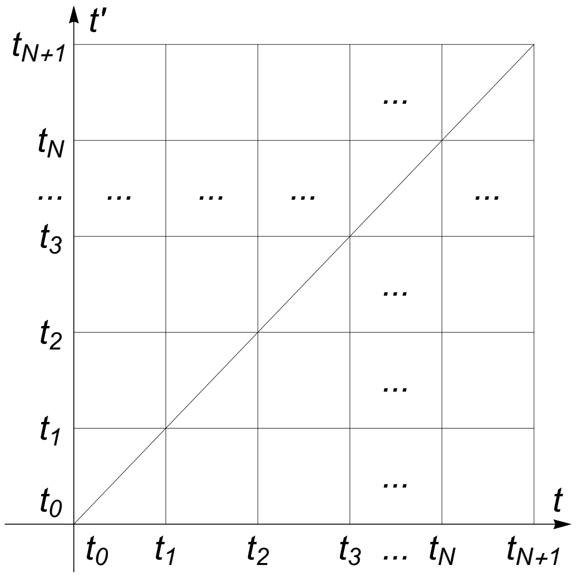

Рис. 1

3. Уравнения для ковариационных функций

Расчет матрицы ковариационных функций $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t')$ представляет собой более сложную задачу. Дело в том, что наличие запаздывания приводит к необходимости использования нестандартных инструментов для вычисления значений $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t')$ в верхних треугольниках, примыкающих к прямой $t = t'$ при переходе от области к области по горизонтали, и в нижних треугольниках, примыкающих к прямой $t = t'$ при переходе от области к области по вертикали (см. рис. 1). Получение же значений $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t')$ в остальных областях хорошо подстраивается под схему, представленную в предыдущем разделе.

Ниже опишем необходимую пошаговую процедуру, но сначала укажем необходимые соотношения для вычисления $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t')$ в диагональных областях (рис. 1). Стандартные ОДУ для вычисления этой матрицы в нижнем и верхнем треугольниках при движении по горизонтали и вертикали соответственно на основе применения корреляционной теории [49, 50] можно представить так:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(t,t')}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(t,t'), \tag{3.1}$$

$$t_0 \leqslant t' < t \leqslant t_1;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_i}(t,t')}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_i}(t,t'), \tag{3.2}$$

$$t_i \leqslant t' < t \leqslant t_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., N;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(t,t')}{\partial t'} = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(t,t')\,\boldsymbol{\mathcal{A}}_0^{\mathsf{T}}(t'), \tag{3.3}$$

$$t_0 \leqslant t < t' \leqslant t_1;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_i}(t,t')}{\partial t'} = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_i}(t,t')\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathsf{T}}(t'), \tag{3.4}$$

$$t_i \leqslant t < t' \leqslant t_{i+1}, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

К этим уравнениям необходимо добавить начальные условия в следующей форме:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_i}(t',t') = \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_iX_i}(t'), \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_i}(t,t) = \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_iX_i}(t), \tag{3.6}$$

$$i = 0, 1, 2, ..., N.$$

Теперь обратимся к формулам для вычисления матрицы $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t')$ в нижнем и верхнем треугольниках, но при движении по вертикали и горизонтали соответственно на основе применения корреляционной теории [49], которые можно записать так:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(t,t') = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0(t,t_0)\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0X_0}(t')\,\boldsymbol{\mathcal{R}}_0^{\mathsf{T}}(t,t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t'} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_0(t,\theta)\,\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_0^{\mathsf{T}}(t',\theta)\,d\theta, \quad t > t', \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_i}(t,t') = \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t_0)\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_iX_i}(t')\,\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathsf{T}}(t,t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t'} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t,\theta)\,\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}^{\mathsf{T}}(t',\theta)\,d\theta, \quad t > t', \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_0X_0}(t,t') = \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t_0)\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0X_0}(t')\,\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathsf{T}}(t,t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_0(t,\theta)\,\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_0^{\mathsf{T}}(t',\theta)\,d\theta, \quad t < t', \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_i}(t,t') = \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t_0)\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_iX_i}(t')\,\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\mathsf{T}}(t,t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t} \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t,\theta)\,\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}^{\mathsf{T}}(t',\theta)\,d\theta, \quad t < t', \tag{3.10}$$

$$i = 1, 2, ..., N,$$

где $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(t,t')$, $\boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t')$ – матричные функции Грина, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{R}}_0(t,t')}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(t)\,\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(t,t'), \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t')}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{R}}(t,t'), \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(t',t') = \boldsymbol{\mathcal{I}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{R}}(t',t') = \boldsymbol{\mathcal{I}};$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}_0(t,\theta) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_0(t,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}_0(\theta),$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{R}}}(t,\theta) = \boldsymbol{\mathcal{R}}(t,\theta)\,\boldsymbol{\mathcal{G}}(\theta).$$

С учетом этого в остальных областях уравнения для $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{XX}(t,t')$ будут выглядеть так:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_j}(t,t')}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_j}(t,t') + \\ + \boldsymbol{\mathcal{G}}(t)\,\boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_{i-1}X_j}(t,t'), \\ t > t', \quad 0 \leqslant j < i \leqslant N; \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_j}(t,t')}{\partial t'} = \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_j}(t,t')\,\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathsf{T}}(t') + \\ + \boldsymbol{\mathcal{C}}_{X_iX_{j-1}}(t,t')\,\boldsymbol{\mathcal{G}}^{\mathsf{T}}(t'), \\ t < t', \quad 0 \leqslant i < j \leqslant N, \tag{3.14}$$

$$t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}, \quad t_j \leqslant t' \leqslant t_{j+1}.$$

Заключение

В работе была представлена многошаговая трехэтапная схема расчета моментных функций векторов состояния систем линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и одним постоянным запаздыванием. Основное предназначение схемы – получение матриц ковариационных функций для этих векторов. Основной проблемой для практической реализации метода является расчет ковариационных функций по формулам (3.7)–(3.10) в небольшом числе подобластей, где невозможно применять стандартную форму уравнений для этих функций. В рамках вычисления присутствующих в формулах (3.7)–(3.10) интегралов можно рекомендовать аппроксимацию матричной функции Грина итерационным методом [51].

Несложно установить, что изложенный алгоритм может быть перенесен на область анализа подобных систем, но с кратными постоянными запаздываниями.

Приложение A. Общие ОДУ для первых моментных функций

Построим общую систему ОДУ, управляющую во времени поведением векторной функции математических ожиданий

$$\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s) = \{\underline{m}_i(s)\} = \mathbb{E}[\underline{\boldsymbol{Z}}(s)],$$

матрицы функций ковариации

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{ZZ}(s) = \{\underline{\mathcal{D}}_{ij}(s)\} = \mathbb{E}\Big[\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}(s)\,\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}^{\mathsf{T}}(s)\Big]$$

и матрицы ковариационных функций

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}_{ZZ}(s,s') = \{\underline{\mathcal{C}}_{ij}(s,s')\} = \mathbb{E}\Big[\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}(s)\,\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}^{\mathsf{T}}(s')\Big]$$

вектора состояния $\underline{\boldsymbol{Z}}(s) = \{\underline{Z}_i(s)\} \in \mathbb{R}^r$, для которого $\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}(s) = \underline{\boldsymbol{Z}}(s) - \underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$, линейной стохастической дифференциальной системы с аддитивными шумами в форме Стратоновича:

$$\dot{\underline{\boldsymbol{Z}}}(s) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)\,\underline{\boldsymbol{Z}}(s) + \underline{\boldsymbol{c}}(s) + \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s)\,\underline{\boldsymbol{V}}(s),\quad s_* < s \leqslant s^*, \tag{A.1}$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}}(s_*) = \underline{\boldsymbol{Z}}_*, \tag{A.2}$$

где основная часть обозначений аналогична введенным в первых разделах статьи, а точка сверху обозначает производную по s. Пусть начальный вектор $\underline{\boldsymbol{Z}}_* = \big(\underline{Z}_{*1}, \underline{Z}_{*2}, \ldots, \underline{Z}_{*r}\big)$ является случайным и имеет математическое ожидание $\underline{\boldsymbol{m}}^*_Z = \mathbb{E}[\underline{\boldsymbol{Z}}_*]$ и матрицу ковариаций $\underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^*_{ZZ} = \mathbb{E}\Big[\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}_*\,\mathring{\underline{\boldsymbol{Z}}}^{\mathsf{T}}_*\Big]$. Вход $\{\underline{\boldsymbol{V}}(s) = \{\underline{V}_i(s)\},\ s_* \leqslant s \leqslant s^*\}$ – q–мерный векторный гауссовский белый шум с независимыми компонентами. В уравнениях (A.1) $\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s) = \{\underline{a}_{ij}(s)\}$, $\underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s) = \{\underline{g}_{ij}(s)\}$ и $\underline{\boldsymbol{c}}(s) = \{\underline{c}_i(s)\}$ – детерминированные матрицы и вектор соответственно. Предполагается, что элементы этих матриц и вектора являются непрерывными функциями аргумента s.

Применяя корреляционную теорию (см., например, [49, 50]), мы можем получить необходимые системы ОДУ для $\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s)$ и $\underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{ZZ}(s)$ в следующей форме:

$$\dot{\underline{\boldsymbol{m}}}_Z(s) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)\,\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s) + \underline{\boldsymbol{c}}(s), \tag{A.3}$$

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}_{ZZ}(s) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{ZZ}(s) + \big[\underline{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(s)\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{ZZ}(s)\big]^{\mathsf{T}} + \underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(s)\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{G}}}^{\mathsf{T}}(s), \tag{A.4}$$

$s_* < s' <\leqslant s^*$

с начальными условиями

$$\underline{\boldsymbol{m}}_Z(s_*) = \underline{\boldsymbol{m}}^*_Z, \tag{A.5}$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{ZZ}(s_*) = \underline{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^*_{ZZ} \tag{A.6}$$

соответственно.

Список литературы

1. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
2. *Lakshmanan M., Senthilkumar D.V.* Dynamics of nonlinear time-delay systems. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. XVII, 313 p.
3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
4. *Мышкис А.Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи математических наук. 1949. Т. 4, вып. 5 (33). С. 99–141.
5. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
6. *Baker C.T.H.* Retarded differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. Vol. 125, № 1–2. P. 309–335.
7. *Breda D., Maset S., Vermiglio R.* Stability of linear delay differential equations: A numerical approach with MATLAB. New York: Springer, 2015. XI, 158 p.
8. *Erneux T.* Applied delay differential equations. New York: Springer, 2009. XII, 204 p.
9. *Fridman E.* Introduction to time-delay systems: Analysis and control. Basel: Birkhäuser, 2014. XVIII, 362 p.
10. *Guglielmi N.* Delay differential equations // Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics / B. Engquist (ed.). Berlin, Heidelberg: Springer, 2015. P. 334–338.
11. *Hale J.K., Lunel S.M.V.* Introduction to functional differential equations. New York: Springer, 1993. X, 447 p.
12. *Kim A.V., Ivanov A.V.* Systems with delays: Analysis, control, and computations. Hoboken: John Wiley, 2015. 184 p.
13. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Dordrecht: Springer, 1999. XVI, 648 p.

14. *Lakshmikantham V., Rao M.R.* Theory of integro-differential equations. Reading: Gordon and Breach, 1995. 384 p.
15. *Smith H.* An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. New York: Springer, 2011. XI, 172 p.
16. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer, 1996. X, 432 p.
17. *Лидский Э.А.* Об устойчивости движений системы со случайными запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 96–101.
18. *Митропольский Ю.А., Ань Н.Д.* Случайные колебания в квазилинейных системах стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием // Украинский математический журнал. 1986. Т. 38, № 2. С. 181–183.
19. *Потапов В.Д.* Устойчивость движения стохастической вязкоупругой системы // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 3. С. 137–145.
20. *Рубаник В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. Мн.: Изд-во "Университетское", 1985. 143 с.
21. *Царьков Е.Ф.* Системы стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ. и техн. наук. 1966. № 2. С. 57–64.
22. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.
23. *Чайковский М.В., Янович Л.А.* О численном нахождении корреляционных функций решения систем линейных интегро-дифференциальных уравнений со случайно возмущенной правой частью // Дифференциальные уравнения. 1987. № 2. С. 328–338.
24. *Kushner H.J.* Numerical methods for controlled stochastic delay systems. Boston: Birkhauser, 2008. XIX, 281 p.
25. *Lafuerza L.F., Toral R.* Stochastic description of delayed systems // Philosophical Transactions of the Royal Society. Ser. A. Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2013. Vol. 371, № 1999. DOI: 10.1098/rsta.2012.0458. P. 1–16.
26. *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. 2nd ed. Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011. XVIII, 422 p.
27. *Mohammed S.E.A.* Stochastic functional differential equations. Boston, London: Pitman Publishing, 1984. IX, 245 p.
28. *Tsokos C.P., Padgett W.J.* Random integral equations with applications to stochastic systems // Lecture Notes in Mathematics, Vol. 233. Berlin: Springer-Verlag, 1971. VIII, 176 p.
29. *Bellen A., Zennaro M.* Numerical methods for delay differential equations. Oxford: Oxford University Press, 2003. XIV, 395 p.
30. *Zhang W.* Numerical analysis of delay differential and integro-differential equations: A thesis. St. John's, NL, Canada: Memorial University of Newfoundland, 1998. VIII, 138 p.
31. *Heck A.* Introduction to Maple. 3rd ed. New York: Springer, 2003. XVI, 828 p.
32. *Shampine L.F., Gladwell I., Thompson S.* Solving ODEs with Matlab. Cambridge: University Press, 2003. 272 p.
33. *Shampine L.F., Thompson S.* Delay differential equations with constant lags // CODEE Journal. 2012. Vol. 9, Art. 10. 5 p.
34. *Mangano S.* Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly, 2010. XXIV, 800 p.
35. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. 4-е изд. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. XXX, 786 с.
36. *Kloeden P.E., Platen E., Schurz H.* Numerical solution of SDE through computer experiments. Berlin: Springer, 2003. XIV, 292 p.
37. *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin: Springer, 2004. XIX, 594 p.
38. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance. Berlin: Springer, 2010. XXVIII, 856 p.
39. *Buckwar E.* Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. Vol. 125, № 1–2. P. 297–307.
40. *Buckwar E., Kuske R., Mohammed S.-E., Shardlow T.* Weak convergence of the Euler scheme for stochastic differential delay equations // London Mathematical Society Journal of Computation and Mathematics. 2008. Vol.11. P. 60–99.
41. *Küchler U., Platen E.* Strong discrete time approximation of stochastic differential equations with time delay // Mathematics and Computers in Simulation. 2000. Vol. 54, № 1–3. P. 189–205.
42. *Mao X., Sabanis S.* Numerical solutions of stochastic differential delay equations under local Lipschitz condition // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2003. Vol. 151. P. 215–227.
43. *Кельтон В., Лоу А.* Имитационное моделирование. Классика CS. 3-е изд. СПб.: Питер; К.: BHV, 2004. 847 с.

44. *Allen E.* Modeling with Itô stochastic differential equations. Dordrecht: Springer, 2007. XII, 230 p.
45. *Разевиг В.Д.* Корреляционный анализ систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1973. № 9. С. 42–48.
46. *Полосков И.Е.* Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 58–73.
47. *Полосков И.Е.* Численно-аналитические схемы анализа динамических систем с последействием // Вестник Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 2 (6). С. 51–58.
48. *Poloskov I.E* Numerical and analytical methods of study of stochastic systems with delay // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230, № 5. P. 746–750.
49. *Астапов Ю.М., Медведев В.С.* Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1982. 304 с.
50. *Полосков И.Е.* Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.
51. *Полосков И.Е.* Об одном методе приближенного анализа линейных стохастических интегро-дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 9. С. 1276–1279.

The scheme for calculating the covariance functions of the state vectors for non-stationary linear stochastic differential systems with delay

I. E. Poloskov
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
polosk@psu.ru; (342) 239 65 60

The paper describes the method and algorithm of analysis in the time domain of linear systems of stochastic ordinary differential equations (SODE) with variable coefficients and constant delays, designed to obtain the covariance functions of state vectors, in the case of assumption that stochastic perturbations are Gaussian non-stationary random noises. To solve the problem, we propose a multi-step scheme. Each of steps consists of three stages. The first based on the classical method of steps, expands the state space which ultimately allows us to obtain a chain of linear SODE systems without delay; on the second step, using the correlation theory, systems of linear ODE are constructed for vector functions of expectation and matrix covariance functions with the necessary initial conditions; at the third stage, we apply the correlation theory too and the results of the second stage and achieve the required result of the current step.

Keywords: *linear equation*; *stochastic ordinaty differential equation*; *delay*; *moment functions*; *covariance function.*