

МЕХАНИКА МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 551.4.03

Фрактальный анализ данных рельефа местности на основе метода минимального покрытия

В. Ю. Митин

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
victormitin@ya.ru; 8 (342) 229-15-35

Представлена попытка применения фрактального анализа к исследованию рельефа местности как одного из важнейших факторов при моделировании различных процессов и явлений. Получены оценки индекса фрактальности рельефа поверхности окрестностей крупных городов России и мира, а также участков с различными типами рельефа (горы, возвышенности, низменности, плоскогорья, дно океана) на основе метода минимального покрытия. Установлено, что для равнинной местности индекс фрактальности выше, чем для горной. В качестве примера применения фрактального анализа установлен характер корреляции фрактальных характеристик рельефа со средним количеством грозových дней в году и с лесистостью местности.

Ключевые слова: *фрактальная размерность; рельеф местности; метод минимального покрытия.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-2-5-10

Введение

Рельеф местности является важным фактором при моделировании различных процессов и явлений, например распространения лесного пожара [1], динамики наводнений [2], распространения загрязняющих веществ [3], динамики снеготаяния [4] и многих других. Он оказывает влияние на состав почвы [5] и ее урожайность [6], на пространственное распределение растений [7], на различные климатические характеристики [8].

В некоторых математических моделях рельеф является основным определяющим фактором, например при изучении движения снежных лавин.

В ряде исследований учитывается шероховатость рельефа [8–10], которая обычно характеризуется параметрами простого вида [8].

Однако упрощенный подход к учету шероховатости может быть не всегда достаточным. Например, при исследовании шероховатости инженерных поверхностей на микроуровне (ГОСТ 2789-73) используется более 20 стандартных параметров шероховатости, а также иногда рассчитываются более сложные параметры, в частности, фрактальные [11]. Фрактальные методы для изучения рельефа местности используются редко [12], хотя в географических науках встречаются области широкого применения фрактального анализа, например анализ речных стоков. Систематические данные о фрактальных свойствах рельефа различных участков земной поверхности или населенных пунктов, о характере их влияния на климатические или иные процессы и явления отсутствуют.

В данной статье представлены результаты оценки фрактальной размерности рельефа местности на основе метода минимального по-

крытия, получены характерные значения фрактальной размерности рельефа различных участков земной поверхности, установлены зависимости индекса фрактальности от характеристик профиля рельефа и показан локальный характер корреляции индекса фрактальности с количеством грозных дней и с лесистостью на примере конкретных географических областей.

1. Фрактальная размерность и метод минимального покрытия

Известно [13], что длина береговых линий зависит от того, с какой точностью она измеряется; при измельчении масштаба получаемые значения периметра береговой линии увеличиваются. Ричардсон, выполняя измерения в различных масштабах, обнаружил, что зависимость периметра от масштабного фактора имеет степенной вид:

$$P(\delta) \sim \delta^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

где $P(\delta)$ – периметр, соответствующий масштабу δ (символ \sim означает одинаковый порядок роста функций при $\delta \rightarrow +0$).

Зависимость вида (1) некоторой размерной величины от масштабного фактора является типичной для многих природных объектов [14], в том числе и для профиля рельефа местности.

Эта идея легла в основу определения фрактальной размерности Хаусдорфа–Безиковича для множеств в некотором метрическом пространстве, которую можно вычислить следующим образом:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\log N(\delta)}{\log(1/\delta)}, \quad (2)$$

где $N(\delta)$ – минимальное количество шаров радиуса δ , покрывающих это множество. Из соотношения (2) следует, что $N(\delta) \sim (1/\delta)^D$, т.е. D – показатель роста величины $N(\delta)$ по степенному закону.

Фрактальную размерность рельефа можно считать своеобразной характеристикой его шероховатости: чем выше фрактальная размерность, тем выше степень изрезанности рельефа.

В отличие от других параметров шероховатости, она позволяет учитывать общую фрактальную структуру линии профиля и тенденцию изменения перепадов высот при изменении масштаба. Ее также можно считать мерой хаотичности рельефа: низкая фрактальная размерность означает наличие тенденций в изменении высоты (склоны гор, углубление водоемов).

Существует множество способов оценки фрактальной размерности [15]. В данной статье используется эффективный и быстро сходящийся метод минимального покрытия, предложенный Дубовиковым и Старченко [16]. В этом методе вычисляется индекс вариации μ , который является оценкой индекса фрактальности – разности между хаусдорфовой размерностью и топологической размерностью, связанный с фрактальной размерностью D равенством:

$$\mu = D_{\mu} - 1. \quad (3)$$

Значение индекса фрактальности μ оценивается из соотношения:

$$V_f(\delta) \equiv \sum_i A_i(\delta) \sim \delta^{-\mu}. \quad (4)$$

В двойных логарифмических координатах параметр μ определяется через угловой коэффициент линии регрессии, построенной по методу наименьших квадратов для некоторой последовательности величин δ . В формуле (4) $V_f(\delta)$ – полная амплитудная вариация, т.е. сумма локальных размахов $A_i(\delta)$ функции f разбиения с масштабом δ . Локальные размахи представляют собой разность между максимальным и минимальным значением функции на i -м интервале разбиения с шагом δ отрезка $[a, b]$ – области определения функции f . Значения параметра μ лежат в отрезке $[0, 1]$.

Аналогично, с помощью соотношений (3) и (4), определяется параметр μ для двумерной функции f , только элементами разбиений являются не отрезки, а квадраты со стороной δ . Значения параметра μ в двумерном варианте лежат в диапазоне $[1, 2]$, в этом случае индекс фрактальности равняется $\mu - 1$.

Подробное описание алгоритма метода, базовые свойства индекса фрактальности, приведены в публикациях [17–22].

2. Получение экспериментальных данных и методика их обработки

Для получения, математической обработки и визуализации экспериментальных данных удобно использовать математический пакет Wolfram Mathematica со встроенной базой данных Wolfram Knowledgebase [23]. Функция GeoElevationData [GeoCircle[c], r] позволяет получать массив значений высот над уровнем моря (для морских глубин используются отрицательные значения) в пределах круговой окрестности точки c , имею-

шей радиус r . Местоположение s может задаваться географическими координатами или названием географического объекта.

Значения индекса фрактальности вычислялись по одномерному и по двумерному алгоритмам. При вычислении по одномерному алгоритму итоговая величина индекса фрактальности определялась путем усреднения по строкам матрицы высот. Установлено хорошее соответствие между одномерными и двумерными оценками индекса фрактальности.

3. Значения индекса фрактальности рельефа различных участков земной поверхности, корреляция с перепадом высот

Вычислены значения индекса фрактальности рельефа местности по одномерному алгоритму в окрестностях крупных городов России различного радиуса: $r=10$ км, $r=50$ км, $r=200$ км. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения индекса фрактальности рельефа в окрестностях крупных городов РФ радиуса r

Город	10 км	50 км	200 км
Москва	0,267	0,302	0,343
С.Петербург	0,297	0,325	0,362
Новосибирск	0,201	0,245	0,292
Екатеринбург	0,187	0,218	0,344
Н. Новгород	0,221	0,290	0,317
Казань	0,185	0,163	0,281
Самара	0,248	0,179	0,307
Омск	0,350	0,409	0,274
Челябинск	0,215	0,255	0,305

Из данных табл. 1 видно, что для небольших радиусов r относительно низкими значениями обладают рельефы Казани и Екатеринбурга (равнинно-холмистые), а самыми высокими – рельеф Омска (практически плоский рельеф). С увеличением радиуса значение μ обычно несколько увеличивается, поскольку в такие области входят участки с различными характеристиками рельефа.

На рис. 1 на карте показаны индексы фрактальности для 170 российских городов и плотность их распределения.

Анализ рис. 1 показывает, что максимальный индекс фрактальности, характеризующий хаотичность рельефа, достигается на относительно равнинных участках, а минимальный – в гористой местности. Последнее означает достаточно хорошую "трендовость" рельефа горной местности (наличие горных склонов), в то время как на равнинных участках рельеф имеет более случайный характер.

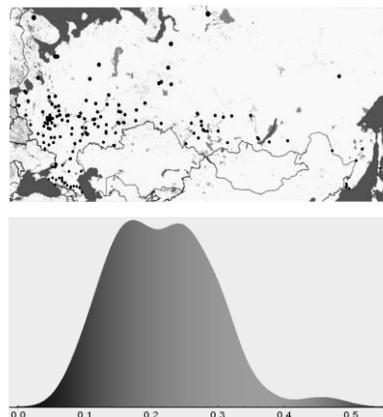


Рис. 1. Распределение индекса фрактальности (двумерный алгоритм) рельефа на территории РФ ($r=29,7$ км)

Аналогичные данные по городам мира (одномерный алгоритм, $r=10$ км) представлены на рис. 2.

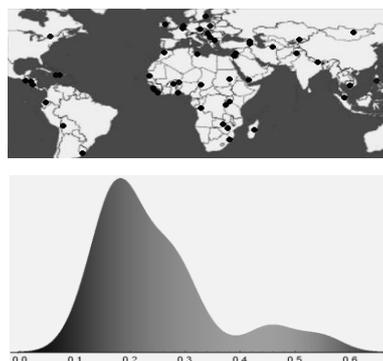


Рис. 2. Распределение индекса фрактальности (двумерный алгоритм) рельефа на территории РФ ($r=10$ км)

Высокие значения индекса фрактальности отмечены, в частности, на африканском континенте, обладающем в целом "спокойным" рельефом, без резких перепадов высот. Низкие значения индекса фрактальности преобладают в гористых местностях и на островах. Гистограмма распределения показывает, что участки земли с высокой фрактальной размерностью встречаются достаточно редко.

Выполнен фрактальный анализ участков земной поверхности, обладающих различным рельефом. Значения индексов фрактальности в десятикилометровой окрестности высочайших горных вершин очень малы и редко превышают 0,1. Например, для окрестности вершины Эвереста оценочное значение индекса фрактальности составляет 0,048 при расчете по одномерному алгоритму и 0,052 при расчете по двумерному алгоритму.

При уменьшении перепадов высот индекс фрактальности имеет тенденцию к увеличению. Чрезвычайно низкими значениями индекса фрактальности обладает также рельеф морского дна (величины μ редко превышают 0,05).

Исследованы рельефы отдельных участков (круговые окрестности радиусом 11 км) в пределах низменностей (всего 30), возвышенностей (всего 29) и плоскогорий (всего 24).

Среднее значение фрактальной размерности для низменностей составляет 2,277, для возвышенностей – 2,249, для плоскогорий – 2,155.

Таким образом, для более ровных форм рельефа индекс фрактальности выше, чем для холмистых. Некоторые значения индекса фрактальности (двумерный алгоритм) приведены в табл. 3.

Таблица 3. Индексы фрактальности рельефа участков отдельных низменностей, возвышенностей, плоскогорий

Низменности	μ
Индольская	0,379
Ломбардская	0,372
Мещёрская	0,368
Неманская	0,329
Возвышенности	μ
Авнежская	0,274
Валдайская	0,257
Вологодская	0,271
Курчанская	0,276
Плоскогорья	μ
Витимское	0,129
Иорское	0,155
Нерское	0,084
Норланд	0,079

Полученные значения параметра μ в зависимости от перепада высот изображены на рис. 3. Соответствующие индексы фрактальности заключены в диапазоне 0,05–0,5.

Из графика на рис. 3 видно наличие устойчивой обратной корреляции между перепадом высот и фрактальной размерностью.

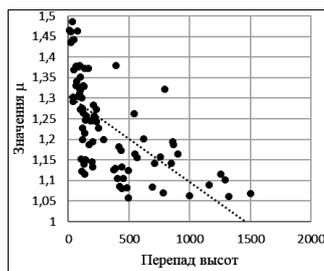


Рис. 3. Зависимость значений μ (двумерный алгоритм) от перепада высот

4. Корреляции индекса фрактальности рельефа с различными географическими показателями

В качестве примера использования полученных результатов вычислены корреляции между индексами вариации μ рельефа и количеством дней с грозами по данным 50 метеостанций, расположенных в Скандинавии.

На рис. 4 построена диаграмма рассеяния для данных параметров.

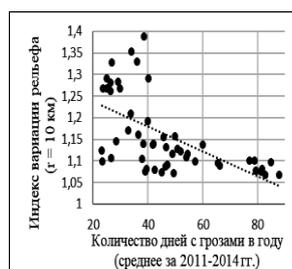


Рис. 4. Обратная корреляция между индексом вариации рельефа μ (двумерный алгоритм) и количеством грозовых дней

Известно, что в гористой местности грозы случаются в целом чаще, чем на равнинах, это обусловлено перемешиванием теплых и холодных воздушных масс, связанным с присутствием затененных и прогреваемых участков. При этом фрактальная размерность рельефа равнинных участков, как правило, выше. Этим, в частности, вызвана обратная корреляция между исследуемыми параметрами на рис. 4.

Другим примером является исследование корреляции между фрактальными свойствами рельефа и лесистостью (т.е. процентным отношением площади, занятой лесом, к общей площади территории, в котором использованы данные по лесистости районов Башкортостана из работы [24].

Диаграмма рассеяния изображена на рис. 5, из которого видна прямая корреляция между исследуемыми параметрами в пределах Башкортостана.

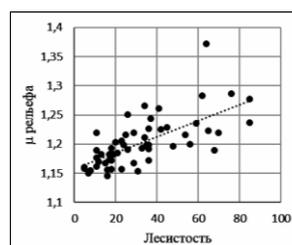


Рис. 5. Корреляция между лесистостью (в %) и индексом вариации рельефа μ

(двумерный алгоритм) по районам Башкортостана

Заключение

Методы фрактального анализа, которые в настоящее время приобретают все большую популярность в различных областях науки, можно активно использовать при анализе рельефа. В данной работе впервые получены оценки фрактальной размерности рельефа окрестности крупных городов и других географических объектов. Установлено, что горный рельеф характеризуется более низкой фрактальной размерностью, чем равнинный. Индексы фрактальности рельефа минимальны для участков высоких горных хребтов и морского дна (не более 0,1 – двумерный вариант), для равнинных участков значения индекса фрактальности обычно выше (большой частью лежат в диапазоне 0,1–0,4).

В качестве примера применения полученных данных рассчитаны парные корреляции между индексом фрактальности рельефа и некоторыми географическими показателями (среднее количество грозových дней, лесистость) для определенных выборок географических положений.

Рельеф местности и, в частности, его фрактальная размерность является одним из многих факторов, влияющих на характер моделируемых процессов и явлений.

Полагаем, что при построении математических моделей необходимо рассматривать все основные факторы в совокупности. Для определения их значимости можно использовать, например, факторный анализ и другие методы многомерного статистического анализа. При моделировании процессов и явлений, в которых шероховатость рельефа местности играет определяющую роль, учет фрактальных характеристик может позволить получить более точные результаты.

Список литературы

1. Катаева Л.Ю., Масленников Д.А. О влиянии рельефа местности на динамику лесного пожара // Известия Академии инженерных наук им. А.М. Прохорова. 2011. № 1. С. 85–91.
2. Мустафин М.Г., Плешакова Е.К. Оценка влияния рельефа местности и аномалий высот на площадь затопления территорий // Перспективы развития инженерных изысканий в строительстве в Российской Федерации: матер. XII общерос. конф. изыскательских организаций. 2016. С. 101–104.
3. Леженин А.А., Рапута В.Ф., Ярославцева Т.В., Соловьёва И.А. Оценка влияния рельефа местности на распространение пылевых выбросов Икситимского цементного завода. Интерэкспо Гео-Сибирь. 2015. Т. 4, № 1. С. 160–164.
4. Пьянков С.В., Шавнина Ю.Н., Шихов А.Н. Математико-картографическое моделирование процессов снеготаяния // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 5. URL: <http://scienceeducation.ru/ru/article/view?id=7156> / [view?id=7156](http://scienceeducation.ru/ru/article/view?id=7156) (дата обращения: 01.02.2019).
5. Несговорова Н.П., Савельев В.Г. Влияние рельефа местности на содержание химических элементов в почве и растительный покров: матер. Всерос. науч.-практ. конф. "IV Зырянские чтения". Курган. 2016. Т. 4, № 1. С. 160–164.
6. Ширинян М.Х., Гайдаш Н.И., Пономарёв Ю.Е. Влияние рельефа на плодородие почвы и урожайность озимой пшеницы: сб. науч. тр., посвящ. 100-летию В.А. Невинных. Краснодар. 2000. С. 266–269.
7. Соколова Г.Г. Влияние высоты местности, экспозиции и крутизны склона на особенности пространственного распределения растений // Acta Biologica Sibirica. 2016. Т. 2, № 3. С. 34–45.
8. Млявая Г.В. Влияние параметров шероховатости подстилающей поверхности на скорость ветра // Ecologia și Geografia. Vuletinul AȘM. Științele vieții. 2014. № 2 (323). С. 181–187.
9. Елохин А.П. Формирование следа радиоактивного загрязнения при изменении шероховатости подстилающей поверхности // Экологические системы и приборы. 2008. № 1. С. 23–29.
10. Федосов А.А. Влияние шероховатости подстилающей поверхности в задаче выбора высоты дымовой трубы // Тр. Академэнерго. 2007. № 1. С. 69–84.
11. Измеров М.А., Тихомиров П.В. Фрактальная размерность инженерной поверхности и профиля // Новые материалы и технологии в машиностроении. 2011. № 13. С. 39–42.
12. Мельник М.А. Фрактальные закономерности форм рельефа (на примере эрозионного расчленения поверхности и извилистости рек): автореф. дис. ... канд. географ.

- наук. Национальный исследовательский Томский государственный университет. Томск, 2010. 19 с.
13. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 261 с.
 14. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
 15. *Gallant J.C.* Estimating fractal dimension of profiles: a comparison of methods. J.C.Gallant [etc.] // *Mathematical Geology*. 1994. Vol. 265. № 4. P. 455–481.
 16. *Дубовиков М.М., Крянев А.В., Старченко Н.В.* Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов // *Вестник РУДН*. 2004. Т. 3, № 1. С. 30–44.
 17. *Митин В.Ю.* Метод минимального покрытия и другие методы фрактального анализа микрорельефа поверхностей // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2013. № 2 (21). С. 16–21.
 18. *Аптуков В.Н., Митин В.Ю.* Некоторые свойства индекса фрактальности временных рядов // *Актуальные проблемы механики, математики, информатики: сб. тез. науч.-практ. конф. (Пермь, 30 октября – 1 ноября 2012 г.)*. Пермь, 2012. 195 с.
 19. *Аптуков В.Н., Митин В.Ю.* Фрактальные и механические свойства кристаллов сильвина и галита в микро- и нанодиапазоне // *Вестник СамГТУ. Сер. физ.-мат. науки*. 2017. Т. 21, № 3.
 20. *Аптуков В.Н., Митин В.Ю.* Сравнительные характеристики изрезанности рельефа поверхности зерен сильвина, шпатовой соли и карналлита в нанодиапазоне // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. 2013. № 1. С. 51–60.
 21. *Аптуков В.Н., Митин В.Ю., Морозов И.А.* Фрактальные и механические свойства кристаллов поваренной соли в нанодиапазоне // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2014. № 4 (27). С. 16–21.
 22. *Аптуков В.Н., Митин В.Ю.* Исследование шероховатости поверхности кристаллов шпатового галита на микро- и наноуровне // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2014. № 1 (24). С. 25–30. С. 481–495.
 23. URL: <http://www.wolfram.com/knowledgebase> (дата обращения: 01.02.2019).
 24. *Вильданов И.Р. и др.* Характеристика лесистости республики Башкортостан // *Современные исследования*. 2018. № 12. 16 с.

Fractal analysis of elevation data based on the method of minimal coverings

V. Yu. Mitin

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
victormitin@ya.ru; 8(342) 229-15-35

The article presents an attempt to apply fractal analysis to the study of relief as one of the most important factors in modeling of various processes and phenomena. The estimates of the fractal index for the surface relief of the major cities' neighborhoods in Russia and all over the world, as well as for the areas with different types of relief (mountains, lowlands, hills, plateaus, ocean bottom) have been obtained on the basis of the method of minimum coverings. It is established that the fractal index is higher for the flat terrain than for the mountainous one. The examples of fractal analysis application include the research of correlation between fractal characteristics of relief with average number of stormy days in a year and with relative forest area.

Keywords: *fractal dimension; relief; method of minimal coverings; fractal index.*