

УДК 519.2

Анализ случайных колебаний в модельном линейном стохастическом гиперболическом уравнении с кратными постоянными запаздываниями

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

В работе для исследования переходного процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением в частных производных (СДУвЧП) гиперболического типа с кратными постоянными запаздываниями, используется схема, сочетающая классический метод шагов и расширение пространства состояния и позволяющая построить цепочку СДУвЧП без запаздывания. На основании этой цепочки получена новая цепочка ДУвЧП для расчета первых моментных функций (полей) решения на последовательных временных интервалах. Приведены результаты расчетов, выполненных в среде математического пакета *Mathematica*.

Ключевые слова: линейное уравнение; стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных; кратные запаздывания; моментные функции.

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-1-48-57

Введение

Дифференциальным уравнением в частных производных с запаздыванием по времени (ДУвЧПсЗ) называется уравнение, которое включает по крайней мере две независимые переменные, одна из которых временная, неизвестную функцию и ее частные производные по независимым переменным в текущий момент времени, а также при одном или нескольких предыдущих значениях времени.

ДУвЧПсЗ являются подклассом функционально-дифференциальных уравнений в частных производных (ФДУвЧП) [1–3], так как в эти уравнения неизвестные решения

входят как функциональные аргументы. Кроме того, в ДУвЧПсЗ могут входить неизвестные функции, зависящие от лаговых временных и/или от неких средних решений по запаздывающим интервалам.

ДУвЧПсЗ используются в качестве моделей в различных областях, таких как биология, медицина, теория управления, климатические модели и многие другие (см., например, [4]). В таких моделях независимыми переменными являются время t и одна или более пространственных переменных x , которая может также представлять относительное содержание ДНК, размер клеток или уровень их созревания, а также другие величины. Решения (зависимые переменные) ДУвЧПсЗ могут представлять температуру, напряжение, плотности различ-

ных частиц, например клеток, бактерий, химических веществ, животных и т.д.

В процессе развития методов анализа детерминированных систем функционально-дифференциальных уравнений, быстро ставших уже классическими, возник интерес к стохастическим ФДУ разных типов [1,5–11].

Стохастическое моделирование играет важную роль во многих областях науки, таких как физика, экология или химия [12]. Стохастичность может возникнуть из-за отсутствия полного знания обо всех соответствующих переменных, точной динамики системы или взаимодействия с окружающей средой. В некоторых случаях можно получить компактное описание сложной системы с учетом лишь нескольких соответствующих переменных, но за счет потери детерминированной предсказуемости. Часто вероятности некоторых фундаментальных процессов могут быть заданы на основе симметрии и других соображений или эмпирического анализа, а динамика процессов может быть получена снизу вверх.

Реально существующие системы с последствием различного типа, для описания которых привлекаются ДУсЗ, неизбежно в той или иной степени подвергаются случайным возмущениям. Когда случайные флуктуации невелики и их влиянием можно пренебречь, анализ появления таких систем осуществляется с помощью моделей на основе детерминированных ДУсЗ. В противном случае приходится привлекать стохастические функционально-дифференциальные уравнения (СФДУ), стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием (СДУсЗ), стохастические дифференциальные уравнения нейтрального типа (СДУНТ), стохастические интегро-дифференциальные уравнения (СИДУ) и всевозможные их комбинации, причем (интегро-) дифференциальные уравнения и системы таких уравнений могут быть как в обыкновенных, так и в частных производных (СОФДУ, СОДУсЗ, СОДУНТ, СОИДУ, СФДУвЧП, СДУсЗвЧП, СДУНТвЧП, СИДУвЧП), а также гибридными.

При этом известно, что стохастическое дифференциальное уравнение с запаздыва-

нием (СДУсЗ) есть СДУ относительно некоторого случайного процесса, приращение которого зависит от значений процесса (a , возможно, и других функций) в прошлом. Эти уравнения могут использоваться для моделирования случайных процессов с памятью.

Стохастичность вместе с запаздыванием появляется во многих представляющих интерес биологических процессах, таких как регуляция генов [13], физиологические изменения [14], контроль положения тела [15], изменение численности популяций [16] и др.

Поскольку, как и СДУвЧП, большинство СДУвЧПсЗ не могут быть решены явно, важной задачей при изучении таких уравнений (существования и единственности решения, управляемости, устойчивости и др. [17–19]) является разработка различных алгоритмов их аналитического, приближенного и приближенно-аналитического решения, таких как: численный метод Эйлера–Маруямы [20]; сведения СДУвЧПсЗ к СДУвЧП, включая метод прямых [21], разложение решения в ряд ортонормированной системе функций пространственных переменных [19,22,23]; усреднения [24] и др.

В данной работе для исследования переходного процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением в частных производных (СДУвЧП) гиперболического типа с кратными постоянными запаздываниями, используется схема, сочетающая классический метод шагов и расширение пространства состояния (МШРПС) и позволяющая построить цепочку СДУвЧП без запаздывания [25–28]. На основании этой цепочки получена новая цепочка ДУвЧП для расчета первых моментных функций решения на последовательных временных интервалах. Приведены результаты расчетов, выполненных в среде математического пакета *Mathematica* [29].

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича [32] в частных производных (гиперболического типа) с кратными запаздываниями ($\tau = \text{const} > 0$) следующего вида:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + a^2 U(x, t) =$$

$$\begin{aligned}
&= b_1 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 U(x, t - \tau)}{\partial x^2} + \\
&+ b_3 \frac{\partial^2 U(x, t - 2\tau)}{\partial x^2} + 2\epsilon_1 \frac{\partial U(x, t - \tau)}{\partial t} + \\
&+ 2\epsilon_2 \frac{\partial U(x, t - 2\tau)}{\partial t} + c_1 U(x, t - \tau) + \\
&+ c_2 U(x, t - 2\tau) + g_0 \tilde{V}(x, t), \\
&0 < x < L, \quad 0 < t \leq T < +\infty, \quad (1.1)
\end{aligned}$$

где t – время; x – пространственная координата; $U(x, t)$ – случайное поле, представляющее состояние системы с распределенными параметрами; $\alpha > 0$, $a > 0$, $b_1 > 0$, b_2 , b_3 , ϵ_1 , ϵ_2 , c_1 , c_2 , g_0 , $L > 0$ – постоянные; $\tilde{V}(x, t)$ – цилиндрический белый шум, являющейся формальной производной цилиндрического винеровского процесса $\tilde{W}(x, t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{V}(x, t)] &= 0, \\
\mathbb{E}[\tilde{V}(x, t) \tilde{V}(y, t')] &= C(x, y) \delta(t - t'),
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания, $C(x, y)$ – некоторая функция, конкретизируемая ниже. Будем считать, что на начальном множестве $\mathbb{E}_0 = \{(x, t) | 0 \leq x \leq L, -2\tau \leq t \leq 0\}$, случайная функция $U(x, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$U(x, t) = U^0(x), \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (1.2)$$

$$U(0, t) = U(L, t) = 0. \quad (1.3)$$

Кроме того, пусть краевые условия для $U(x, t)$ при $t > 0$ также будут однородными:

$$U(0, t) = U(L, t) = 0. \quad (1.4)$$

Заметим, что уравнение (1.1) записано в нестрогой форме. Для уточнения понятий см. [30, 31] и др.

Предположим, что заданы все необходимые числовые характеристики (функции) случайного поля $U^0(x)$. В частности, пусть для поля $U(x, t)$ известны функции математического ожидания

$$m^0(x) = \mathbb{E}[U^0(x)] \quad (1.5)$$

и ковариации

$$C^0(x, y) = \mathbb{E}[\dot{U}^0(x) \dot{U}^0(y)], \quad (1.6)$$

где $\dot{U}^0(\cdot) = U^0(x)(\cdot) - m^0(\cdot)$. При этом вследствие заданных краевых условий

$$m(0, t) = m(L, t) = 0 \quad (1.7)$$

и

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(0, y, t) &= \mathcal{C}(L, y, t) = \\
&= \mathcal{C}(x, 0, t) = \mathcal{C}(x, L, t) = 0. \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Задачей исследования является построение систем дифференциальных уравнений в частных производных без запаздывания (ДУВЧП) для функций математического ожидания

$$\begin{aligned}
m_1(x, t) &= \mathbb{E}[U(x, t)], \\
m_2(x, t) &= \mathbb{E}[U'_t(x, t)]
\end{aligned}$$

и матрицы функций ковариаций

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(x, y, t) &= \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{11}(x, y, t) & \mathcal{C}_{12}(x, y, t) \\ \mathcal{C}_{21}(x, y, t) & \mathcal{C}_{22}(x, y, t) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{E}[\dot{U}(x) \dot{U}(y)] & \mathbb{E}[\dot{U}(x) \dot{U}'_t(y)] \\ \mathbb{E}[\dot{U}'_t(x) \dot{U}(y)] & \mathbb{E}[\dot{U}'_t(x) \dot{U}'_t(y)] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

случайных полей $U(x, t)$ и $U'_t(x, t)$, имеющих совместный функционал плотности вероятности $P(u_1, u_2, t)$ [32, 33], для любого $t > 0$, причем $P(u_1, u_2, t) = P_0(u_1, u_2)$ при $-2\tau \leq t \leq 0$, где $P_0(u_1, u_2)$ – некоторый заданный функционал.

2. Уравнения для расширенного вектора состояния

Обозначим $U(x, t)$ и $U'_t(x, t)$ через $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$ соответственно и для дальнейшего использования введем векторные поля $\mathbf{U}(x, t) = (U_1(x, t), U_2(x, t))$ и $\mathbf{U}^0(x) = (U_1^0(x), U_2^0(x)) \equiv (U^0(x), 0)$. Тогда уравнения и начально-краевые условия (1.1)–(1.4) примут следующую форму:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} &= U_2(x, t), \quad (2.1) \\
\frac{\partial U_2(x, t)}{\partial t} &= -2\alpha U_2(x, t) - a^2 U_1(x, t) + \\
&+ b_1 \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 U_1(x, t - \tau)}{\partial x^2} + \\
&+ b_3 \frac{\partial^2 U_1(x, t - 2\tau)}{\partial x^2} + 2\epsilon_1 U_2(x, t - \tau) + \\
&+ 2\epsilon_2 U_2(x, t - 2\tau) + c_1 U_1(x, t - \tau) +
\end{aligned}$$

$$+c_2 U_1(x, t - 2\tau) + g_0 \tilde{V}(x, t), \quad (2.2)$$

$$0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$U_1(x, t) = U^0(x), \quad U_2(x, t) = 0, \quad (2.3)$$

$$0 < x < L, \quad -2\tau \leq t \leq 0,$$

$$U_k(0, t) = U_k(L, t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad t \geq -2\tau.$$

Выберем на отрезке $[0, L]$ ортонормированную систему функций

$$\begin{aligned} \{e_k(x), k = 1, 2, \dots\} &\equiv \\ &\equiv \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi k x}{L}, k = 1, 2, \dots \right\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

состоящую из синусов с кратными аргументами. В этом случае цилиндрический белый шум $\tilde{V}(x, t)$ можно представить так:

$$\tilde{V}(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} V_k(t) e_k(x), \quad (2.5)$$

а функция $C(x, y)$ примет следующую форму:

$$C(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} e_k(x) e_k(y). \quad (2.6)$$

Для получения СДУВЧП без запаздывания, как и в ряде других наших работ, применим метод расширения пространства состояний, сводя немарковское векторное поле к марковскому. Для этого воспользуемся следующими обозначениями:

$$s \in [0, \tau], \quad t_q = q\tau, \quad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}),$$

$$q = -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N+1, \quad t_{N+1} \geq T,$$

$$\mathbf{U}_q(x, s) = \mathbf{U}(x, s + t_q),$$

$$\mathbf{U}_q(x, 0) = \mathbf{U}_{q-1}(x, \tau),$$

$$\mathbf{U}_{-2}(x, 0) = \mathbf{U}_{-1}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x, 0) \equiv \mathbf{U}^0(x),$$

$$\tilde{V}_q(x, s) = \tilde{V}(x, s + t_q),$$

$$\tilde{V}_q(x, 0) = \tilde{V}_{q-1}(x, \tau),$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_q(x, s) = (\tilde{V}_0(x, s), \tilde{V}_1(x, s), \dots, \tilde{V}_q(x, s)),$$

$$\mathbf{Z}_0(x, s) = \text{col}(\mathbf{Y}(x, s), \mathbf{U}_0(x, s)),$$

$$\mathbf{Z}_1(x, s) = \text{col}(\mathbf{Z}_0(x, s), \mathbf{U}_1(x, s)),$$

$$\mathbf{Z}_2(x, s) = \text{col}(\mathbf{Z}_1(x, s), \mathbf{U}_2(x, s)), \quad \dots,$$

$$\mathbf{Z}_N(x, s) = \text{col}(\mathbf{Z}_{N-1}(x, s), \mathbf{U}_N(x, s)),$$

$$\text{col}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{H}[\mathbf{Y}_\nu(\xi, \theta)] &= -2\alpha \mathcal{Y}_{\nu 2}(\xi, \theta) - a^2 \mathcal{Y}_{\nu 1}(\xi, \theta) + \\ &+ b_1 \frac{\partial^2 \mathcal{Y}_{\nu 1}(\xi, \theta)}{\partial \xi^2} + b_2 \frac{\partial^2 \mathcal{Y}_{\nu-1, 1}(\xi, \theta)}{\partial \xi^2} + \\ &+ b_3 \frac{\partial^2 \mathcal{Y}_{\nu-2, 1}(\xi, \theta)}{\partial \xi^2} + 2\epsilon_1 \mathcal{Y}_{\nu-1, 2}(\xi, \theta) + \\ &+ 2\epsilon_2 \mathcal{Y}_{\nu-2, 2}(\xi, \theta) + c_1 \mathcal{Y}_{\nu-1, 1}(\xi, \theta) + \\ &+ c_2 \mathcal{Y}_{\nu-2, 1}(\xi, \theta), \end{aligned}$$

причем равенство векторных случайных полей в точке понимается в смысле сходимости почти наверное, и построим цепочку уравнений линейных СДУВЧП без запаздывания для полей $\mathbf{Z}_0(x, s)$, $\mathbf{Z}_1(x, s)$, $\mathbf{Z}_2(x, s)$, ..., $\mathbf{Z}_N(x, s)$, принадлежащих семейству вложенных пространств состояния $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{R}^6 \subset \mathbb{R}^8 \subset \dots \subset \mathbb{R}^{2N+4}$.

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q .

0°. На сегменте Δ_0 систему СДУВЧП, решением которой является векторное случайное поле $\mathbf{Z}_0(x, s)$, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial U_{-k, j}(x, s)}{\partial s} = 0, \quad k, j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial U_{01}(x, s)}{\partial s} = U_{02}(x, s),$$

$$\frac{\partial U_{02}(x, s)}{\partial s} = \mathbb{H}[\mathbf{U}_0(x, s)] + g_0 \tilde{V}_0(x, s), \quad (2.7)$$

$$U_{-2, 1}(x, 0) = U_{-1, 1}(x, 0) = U_{01}(x, 0) = U^0(x),$$

$$U_{-2, 2}(x, 0) = U_{-1, 2}(x, 0) = U_{02}(x, 0) = 0,$$

$$0 < x < L.$$

1°. На сегментах Δ_0 и Δ_1 систему СДУВЧП для вычисления векторного поля $\mathbf{Z}_1(x, s)$ можно получить, если к предыдущим уравнениям добавить следующие:

$$\frac{\partial U_{11}(x, s)}{\partial s} = U_{12}(x, s),$$

$$\frac{\partial U_{12}(x, s)}{\partial s} = \mathbb{H}[\mathbf{U}_1(x, s)] + g_0 \tilde{V}_1(x, s), \quad (2.8)$$

$$U_{11}(x, 0) = U_{01}(x, \tau), \quad U_{12}(x, 0) = U_{02}(x, \tau),$$

$$0 < x < L.$$

2°. Теперь, рассматривая сегменты Δ_0 , Δ_1 и Δ_2 совместно, объединяя уравнения

(2.7), (2.8) с уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{21}(x, s)}{\partial s} &= U_{22}(x, s), \\ \frac{\partial U_{22}(x, s)}{\partial s} &= \mathbb{H}[U_2(x, s)] + g_0 \tilde{V}_2(x, s), \\ U_{21}(x, 0) &= U_{11}(x, \tau), \quad U_{22}(x, 0) = U_{12}(x, \tau), \\ 0 &< x < L, \end{aligned}$$

можно записать систему СДУВЧП для расчета вектора $\mathbf{Z}_2(x, s)$.

... ..

N°. Теперь для сегментов $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{N-1}, \Delta_N$ можно получить полную систему СДУВЧП для вычисления векторного случайного поля $\mathbf{Z}_N(x, s)$, если соединить уравнения с предыдущих шагов со следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{N1}(x, s)}{\partial s} &= U_{N2}(x, s), \\ \frac{\partial U_{N2}(x, s)}{\partial s} &= \mathbb{H}[U_N(x, s)] + g_0 \tilde{V}_N(x, s), \\ U_{N1}(x, 0) &= U_{N-1,1}(x, \tau), \\ U_{N2}(x, 0) &= U_{N-1,2}(x, \tau), \\ 0 &< x < L. \end{aligned}$$

3. Уравнения для первых моментных функций расширенного вектора состояния

Теперь построенную выше на основе применяемой схемы цепочку линейных СДУВЧП без запаздывания можно использовать для получения новой последовательности уравнений – последовательности систем ДУВЧП для первых моментов векторов $\mathbf{Z}_0(x, s), \mathbf{Z}_1(x, s), \dots, \mathbf{Z}_N(x, s)$. Для этого введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_q(x, s) &= \mathbb{E}[\mathbf{Z}_q(x, s)] = \text{col}(\mathbf{m}_{U_{-2}}(x, s), \\ \mathbf{m}_{U_{-1}}(x, s), \mathbf{m}_{U_0}(x, s), \mathbf{m}_{U_1}(x, s), \dots, \mathbf{m}_{U_q}(x, s)), \\ \mathbf{C}_q(x, y, s) &= \mathbb{E}[\dot{\mathbf{Z}}_q(x, s) \dot{\mathbf{Z}}_q^\top(y, s)] = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{q11} & \mathbf{C}_{q12} \\ \mathbf{C}_{q21} & \mathbf{C}_{q22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{q11} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{U_{-2}U_{-2}}(x, y, s) & \dots & \mathbf{C}_{U_{-2}U_0}(x, y, s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}_{U_0U_{-2}}(x, y, s) & \dots & \mathbf{C}_{U_0U_0}(x, y, s) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{q12} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{U_{-2}U_1}(x, y, s) & \dots & \mathbf{C}_{U_{-2}U_q}(x, y, s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}_{U_0U_1}(x, y, s) & \dots & \mathbf{C}_{U_0U_q}(x, y, s) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{q21} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{U_1U_{-2}}(x, y, s) & \dots & \mathbf{C}_{U_1U_0}(x, y, s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}_{U_qU_{-2}}(x, y, s) & \dots & \mathbf{C}_{U_qU_0}(x, y, s) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{q22} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{U_1U_1}(x, y, s) & \dots & \mathbf{C}_{U_1U_q}(x, y, s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}_{U_qU_1}(x, y, s) & \dots & \mathbf{C}_{U_qU_q}(x, y, s) \end{bmatrix}, \\ \ell &= 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

С помощью прямого усреднения и использования обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова для совместного функционала плотности вероятности [32,33] построим ДУВЧП для указанных функций математического ожидания и ковариаций на q -м шаге:

1) уравнения и начальные условия для полей математического ожидания:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{U_{-k,j}}(x, s)}{\partial s} &= 0, \quad k, j = 1, 2, \\ \frac{\partial m_{U_{k1}}(x, s)}{\partial s} &= m_{U_{k2}}(x, s), \quad k = \overline{0, q}, \\ \frac{\partial m_{U_{k2}}(x, s)}{\partial s} &= \mathbb{H}[m_{U_k}(x, s)], \\ m_{U_{k1}}(x, 0) &= m^0(x), \quad m_{U_{k1}}(x, 0) = 0, \\ k &= -2, -1, 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{U_{k\ell}}(x, 0) &= m_{U_{k-1,\ell}}(x, \tau), \\ k &= \overline{1, q}, \quad \ell = 1, 2, \quad 0 < x < L; \end{aligned}$$

2) уравнения для полей ковариации и начальные условия (у ковариаций опущены аргументы x, y, s):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{k\ell}U_{ij}}}{\partial s} &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{ij}U_{k\ell}}}{\partial s} = 0, \\ k &= -2, -1, \quad i = \overline{-2, q}, \quad \ell, j = 1, 2, \\ \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i1}}}{\partial s} &= \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i1}} + \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i2}}, \\ 0 &\leq k, i \leq q, \\ \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i2}}}{\partial s} &= \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i2}} - 2\alpha \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i2}} - \\ &- a^2 \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i1}} + b_1 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i1}}}{\partial y^2} + \\ &+ b_2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-1,1}}}{\partial y^2} + b_3 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-2,1}}}{\partial y^2} + \\ &+ 2\epsilon_1 \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-1,2}} + 2\epsilon_2 \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-2,2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +c_1 \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-1,1}} + c_2 \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i-2,1}}, \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i1}}}{\partial s} & = \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i2}} - 2\alpha \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i1}} - \\
 & -a^2 \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i1}} + b_1 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i1}}}{\partial x^2} + \\
 & +b_2 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k-1,1}U_{i1}}}{\partial x^2} + b_3 \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k-2,1}U_{i1}}}{\partial x^2} + \\
 & +2\epsilon_1 \mathcal{C}_{U_{k-1,2}U_{i1}} + 2\epsilon_2 \mathcal{C}_{U_{k-2,2}U_{i1}} \\
 & +c_1 \mathcal{C}_{U_{k-1,1}U_{i1}} + c_2 \mathcal{C}_{U_{k-2,1}U_{i1}}, \\
 & \quad 0 \leq k, i \leq q, \\
 \frac{\partial \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i2}}}{\partial s} & = -4\alpha \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i2}} - \\
 & -a^2 (\mathcal{C}_{U_{k1}U_{i2}} + \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i1}}) + \\
 & +b_1 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k1}U_{i2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i1}}}{\partial y^2} \right) + \\
 & +b_2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k-1,1}U_{i2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-1,1}}}{\partial y^2} \right) + \\
 & +b_3 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k-2,1}U_{i2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-2,1}}}{\partial y^2} \right) + \\
 & +2\epsilon_1 (\mathcal{C}_{U_{k-1,2}U_{i2}} + \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-1,2}}) + \\
 & +2\epsilon_2 (\mathcal{C}_{U_{k-2,2}U_{i2}} + \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-2,2}}) + \\
 & +c_1 (\mathcal{C}_{U_{k-1,1}U_{i2}} + \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-1,1}}) + \\
 & +c_2 (\mathcal{C}_{U_{k-2,1}U_{i2}} + \mathcal{C}_{U_{k2}U_{i-2,1}}) + \\
 & +g_0^2 C(x, y) \delta_{ki}, \quad 0 \leq k, i \leq q, \quad 0 < x, y < L, \\
 \mathcal{C}_q(x, y, 0) & = \mathbb{E}[\dot{\mathbf{Z}}_q(x, 0) \dot{\mathbf{Z}}_q^T(y, 0)] = \\
 & = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{q11}^0 & \mathcal{C}_{q12}^0 \\ \mathcal{C}_{q21}^0 & \mathcal{C}_{q22}^0 \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{C}_{q11}^0 & = \begin{bmatrix} \mathcal{C}^0(x, y) & \dots & \mathcal{C}^0(x, y) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{C}^0(x, y) & \dots & \mathcal{C}^0(x, y) \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{C}_{q12}^0 & = \\
 & = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{U_{-2}U_0}(x, y, \tau) & \dots & \mathcal{C}_{U_{-2}U_{q-1}}(x, y, \tau) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{C}_{U_{-1}U_0}(x, y, \tau) & \dots & \mathcal{C}_{U_{-1}U_{q-1}}(x, y, \tau) \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{C}_{q21}^0 & = \\
 & = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{U_0U_{-2}}(x, y, \tau) & \dots & \mathcal{C}_{U_0U_{-1}}(x, y, \tau) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{C}_{U_{q-1}U_{-2}}(x, y, \tau) & \dots & \mathcal{C}_{U_{q-1}U_{-1}}(x, y, \tau) \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{C}_{q22}^0 & =
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{U_0U_0}(x, y, \tau) & \dots & \mathcal{C}_{U_0U_{q-1}}(x, y, 0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{C}_{U_{q-1}U_0}(x, y, \tau) & \dots & \mathcal{C}_{U_{q-1}U_{q-1}}(x, y, \tau) \end{bmatrix},$$

где

$$\mathcal{C}^0(x, y) = \begin{bmatrix} \mathcal{C}^0(x, y) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате этого решение остающейся части поставленной задачи будет заключаться в том, чтобы в конце каждого шага из вектора $\mathbf{m}_q(x, s)$ и матрицы $\mathcal{C}_q(x, y, s)$ выделить вектор $\mathbf{m}_{U_q}(x, s)$ и матрицу $\mathcal{C}_{U_qU_q}(x, y, s)$, которые являются последними блоками вектора $\mathbf{m}_q(x, s)$ и матрицы $\mathcal{C}_q(x, y, s)$ соответственно, и заменить локальный аргумент s на абсолютный t , что и позволит получить искомые характеристики вектора $\mathbf{U}(t)$ на полуинтервале Δ_q .

4. Пример

Предложенная схема была применена для исследования поведения системы типа (1.1)–(1.8) при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned}
 \alpha & = 0,1; & a & = 2,0; \\
 b_1 & = 0,2; & b_2 & = 0,05; & b_3 & = 0,025; \\
 \epsilon_1 & = -1/16; & \epsilon_2 & = -1/30; \\
 c_1 & = 0,5; & c_2 & = 0,5; & g_0 & = 0,002; \\
 L & = 1,0; & T & = 10,0; & \tau & \in \{0,75; 1,0\}; \\
 m^0(x) & = \frac{x(x-2L/3)(x-L)}{2L^3}; \\
 \mathcal{C}^0(x, y) & = h(x)h(y),
 \end{aligned}$$

где

$$h(x) = \frac{0,0027x^2(x-L)}{4L^3}.$$

Вследствие того, что формальной суммой ряда (2.6) является функция $\delta(x-y)$, использовать которую в вычислениях затруднительно, при расчетах в качестве $C(x, y)$ использовалась функция

$$C^*(x, y) = \begin{cases} A - A^2|x-y|, & |x-y| < 1/A, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом значение A равнялось 200.

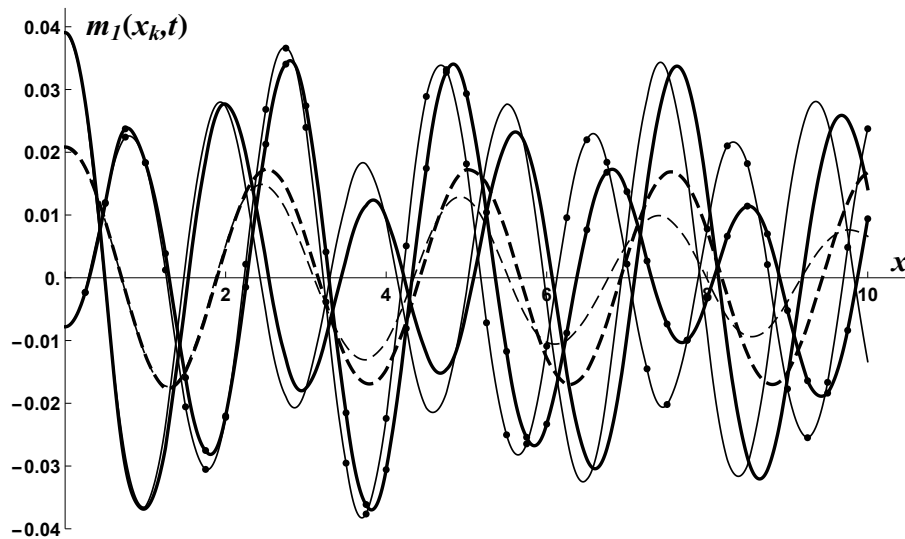


Рис. 1

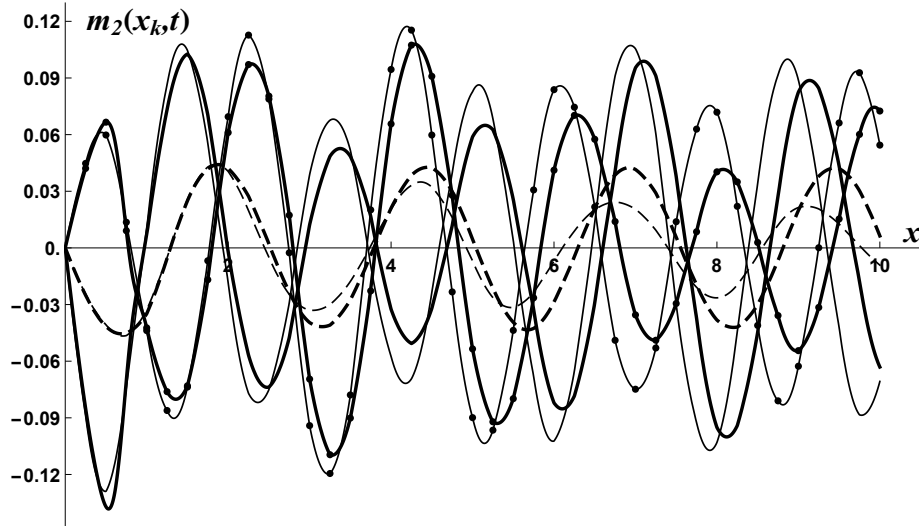


Рис. 2

Расчеты производились в среде пакета *Mathematica*. ДУвЧП для моментных полей генерировались программно в символьном виде, а затем интегрировались численно с помощью функции пакета `NDSolve` с опцией "FiniteElement", соответствующей использованию метода конечных элементов.

Некоторые из результатов расчетов функций $m_i(x, t)$, $C_{ij}(x, y, t)$, $1 \leq i \leq j \leq 2$, приведены на рис. 1–5 соответственно. Из-за того, что решениями построенных ДУвЧП являются функции двух (математические ожидания) и трех (ковариации) переменных, а кроме того, нужно было отобразить результаты для двух значений запазды-

вания, для ограничения объема иллюстративного материала было решено представлять поведение во времени только в отдельных точках $x_1 = 0,25$; $x_2 = 0,50$; $x_3 = 0,75$ отрезка $[0, L]$ ($k = 1, 2, 3$ соответственно) и (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) ($y_k = x_k$) области $[0, L] \times [0, L]$. Кривые, соответствующие $\tau = 0,75$ и $\tau = 1,0$, отображены тонкими и жирными линиями соответственно. Для значений $k = 1, 2, 3$ в свою очередь использовались непрерывные, штриховые и точно-непрерывные линии.

Анализируя представленные графики, несложно усмотреть существенную зависимость поведения искомых моментных по-

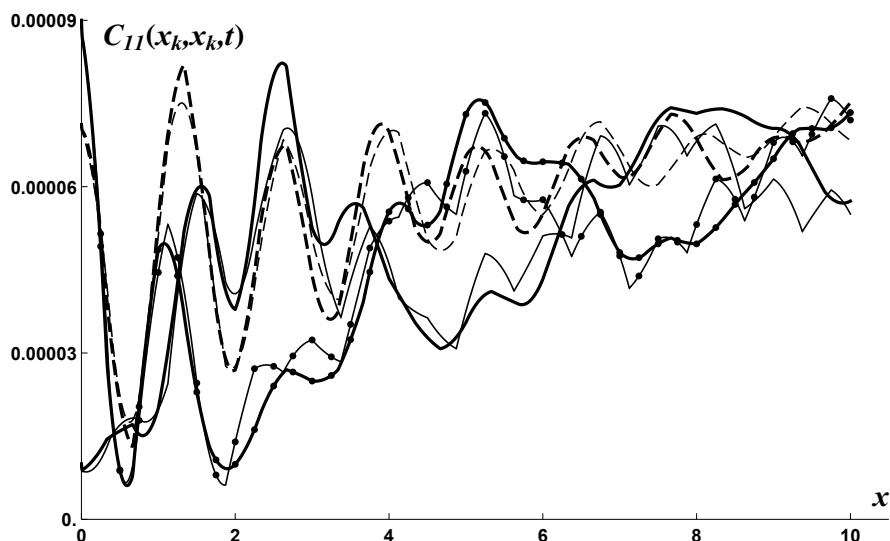


Рис. 3

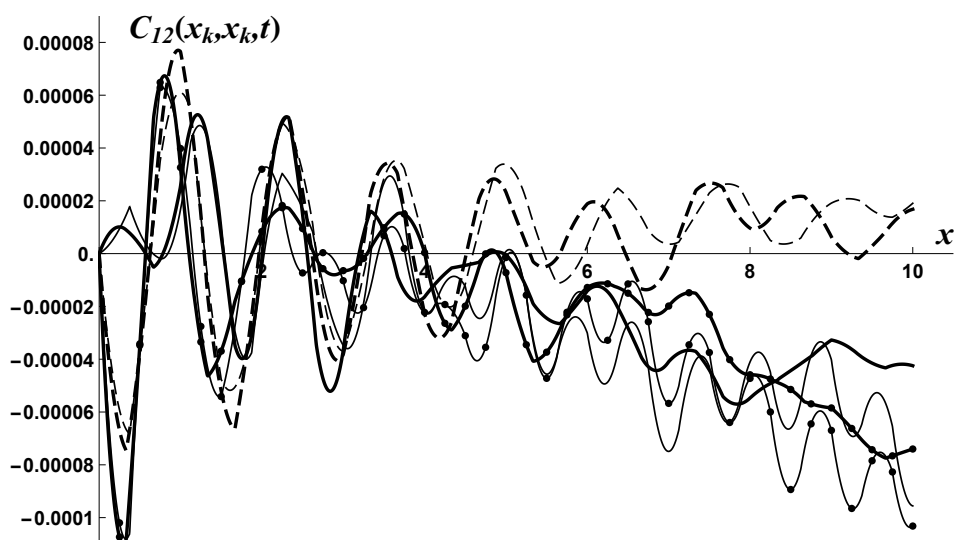


Рис. 4

лей от величины запаздывания. Вторым, по нашему мнению, которое основывается на представленных и других результатах расчетов, по величине влияния на динамику системы является коэффициент b_3 , а затем ϵ_2 .

Заключение

В работе представлена схема исследования одной линейной стохастической системы с распределенными параметрами и запаздыванием. В отличие от известных методов изложенная схема не предполагает предварительного изменения уравнений исследуемого объекта с целью исключения запаздывания, может быть использована для анализа других классов систем эволюционного типа.

Кроме того, вследствие отсутствия ошибки метода построения уравнений для первых моментных полей изложенная схема пригодна для контроля качества новых алгоритмов анализа СДУ в ЧП с запаздыванием.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Разматулина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.
2. Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to functional differential equations. New York: Springer, 1993. X, 447 p.

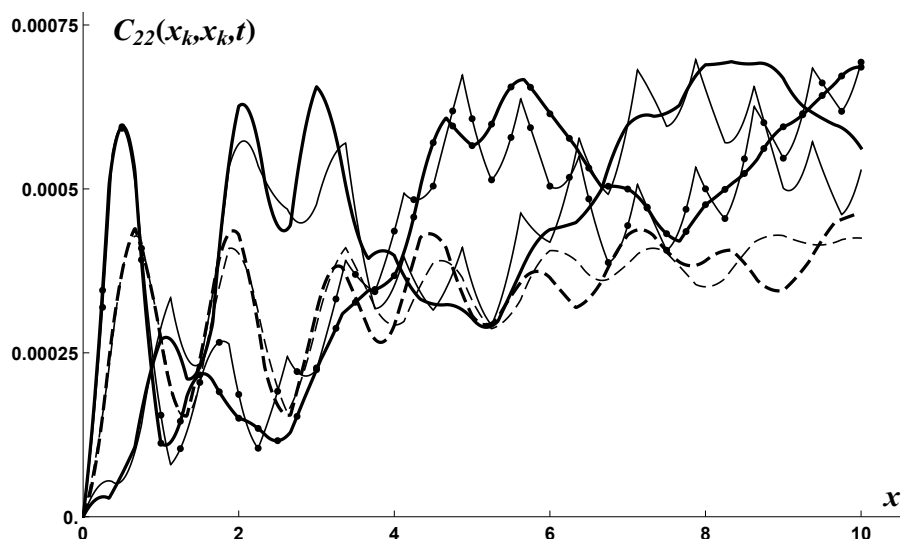


Рис. 5

3. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied theory of functional differential equations: Mathematics and its applications. Dordrecht: Springer, 1992. XVI, 234 p.
4. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer, 1996. X, 432 p.
5. *Корневский Д.Г., Коломиец В.Г.* Некоторые вопросы теории нелинейных колебаний квазилинейных систем со случайным запаздыванием // Математическая физика. Киев, 1967. Вып. 3. С. 91–113.
6. *Рубаник В.П.* Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. Мн.: Изд-во "Университетское", 1985. 143 с.
7. *Царьков Е.Ф.* Системы стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ. и техн. наук. 1966. № 2. С. 57–64.
8. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
9. *Kushner H.J.* Numerical methods for controlled stochastic delay systems. Boston: Birkhauser, 2008. XIX, 281 p.
10. *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. 2nd ed. Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011. XVIII, 422 p.
11. *Mohammed S.E.A.* Stochastic functional differential equations. Boston, London: Pitman Publishing, 1984. IX, 245 p.
12. *Lafuerza L.F., Toral R.* Stochastic description of delayed systems // Philosophical Transactions of the Royal Society. Ser. A. Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2013. Vol. 371, № 1999. DOI: 10.1098/rsta.2012.0458. P. 1–16.
13. *Lewis J.* Autoinhibition with transcriptional delay: a simple mechanism for the zebrafish somitogenesis oscillator // Current Biology. 2003. Vol. 13, № 16. P. 1398–1408.
14. *Longtin A., Milton J.G., Bos J.E. et al.* Noise and critical behavior of the pupil light reflex at oscillation onset // Physical Review A. 1990. Vol. 41, № 12. P. 6992–7005.
15. *Boulet J., Balasubramaniam R., Daffertshofer A. et al.* Stochastic two-delay differential model of delayed visual feedback effects on postural dynamics // Philosophical Transactions of the Royal Society. Ser. A. Mathematical Physical and Engineering Sciences. 2010. Vol. 368, № 1911. P. 423–438.
16. *Mukhopadhyay B., Bhattacharyya R.* Role of gestation delay in a plankton–fish model under stochastic fluctuations // Mathematical Biosciences. 2008. Vol. 215, № 1. P. 26–34.
17. *Chen H.* Integral inequality and exponential stability for neutral stochastic partial differential equations with delays // Journal of Inequalities and Applications. 2009. Vol. 2009, Article ID 297478. 15 p.
18. *Taniguchi T., Liu K., Truman A.* Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of mild solutions to stochastic functional differential equations in Hilbert spaces // Journal of Differential Equations. 2002. Vol. 181, № 1. P. 72–91.
19. *Yang X., Zhu Q.* Existence, uniqueness, and stability of stochastic neutral functional differential equations of Sobolev–type // Journal of Mathematical Physics. 2015. Vol. 56, № 12. ID 122701. P. 1–16. DOI: 10.1063/1.4936647.

20. *Ahmed H.M.* Euler–Maruyama numerical solution of some stochastic functional differential equations // *International Journal of Applied Mathematics and Computation*. 2009. Vol. 1 (2). P. 67–78.
21. *Ziemlańska M.* Method of lines for parabolic stochastic functional partial differential equations // *Opuscula Mathematica*. 2014. Vol. 34, № 2. P. 443–456.
22. *Govindan T.E.* A new iteration procedure stochastic neutral partial functional differential equations // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2009. Vol. 56, № 2. P. 285–298.
23. *Govindan T.E.* Mild solutions of neutral stochastic partial functional differential equations // *International Journal of Stochastic Analysis*. 2011. Vol. 2011, Article ID 186206. 13 p. DOI: 10.1155/2011/186206.
24. *Михауцкий Н.А., Рубаник В.П.* Случайные колебания в струнном генераторе // *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 1978. Т. 8. С. 120–124.
25. *Полосков И.Е.* Применение схемы расширения фазового пространства для анализа систем с распределенными параметрами и запаздыванием // *Вестник Пермского ун-та. Информационные системы и технологии*. 2011. Вып. 12 (38). С. 64–69.
26. *Полосков И.Е.* Адаптация схемы МШРПС для анализа одного линейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных с постоянным временным запаздыванием // *Вестник Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика*. 2013. Вып. 4 (23). С. 60–67.
27. *Полосков И.Е.* Приближенное решение эволюционных уравнений нейтрального типа с помощью модифицированной схемы МШРПС // *Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь*, 2017. Вып. 49. С. 75–91.
28. *Полосков И.Е.* Применение схемы МШРПС для приближенного решения дифференциально-разностных уравнений в частных производных // *Вестник Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика*. 2017. Вып. 4 (39). С. 57–68.
29. *Mangano S.* *Mathematica cookbook*. Cambridge: O’Reilly, 2010. XXIV, 800 p.
30. *Da Prato G., Zabczyk J.* *Stochastic equations in infinite dimensions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. XVIII, 493 p.
31. *Gawarecki L., Mandrekar V.* *Stochastic differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations*. Berlin: Springer, 2011. XVI, 291 p.
32. *Шмелев А.Б.* *Основы марковской теории нелинейной обработки случайных полей*. М.: Изд-во МФТИ, 1998. 208 с.
33. *Полосков И.Е.* *Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография*. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.

Analysis of random oscillations in a model linear stochastic hyperbolic equation with multiple constant delays

I. E. Poloskov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
polosk@psu.ru; (342) 239 65 60

In this paper, we examine the transition process described by a stochastic partial differential equation (SPDE) of hyperbolic type with multiple constant delays. We use a scheme combining the classical method of steps and the expansion of the state space that allows us to build a chain of SPDEs without delays. On the basis of this chain, a new chain of PDEs was obtained for the calculation of the first moment functions (or fields) of the solution on successive time intervals. We demonstrate the results of calculations performed in the environment of the *Mathematica* mathematical package.

Keywords: *linear equation; stochastic partial differential equation; multiple delays; moment functions.*