

УДК 531.38:531.395

Интеграл Ковалевской для уравнений движения сложной механической системы

Н. Н. Макеев

Институт проблем точной механики и управления РАН
Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, 24
nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

Получен критерий существования первого интеграла системы уравнений движения сложного механического объекта в поле силы тяжести. Интеграл является обобщенным аналогом классического интеграла С.В. Ковалевской, построенного для неизменяемого твердого тела.

Ключевые слова: сложная механическая система; интеграл движения; критерий существования первого интеграла.

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-1-22-30

Введение

Понятие первого дополнительного интеграла системы уравнений движения твердого тела применялось Е. Уиттекером [1] и Г. Джакалья [2]. В классических задачах динамики твердого тела с неподвижной точкой [3] независимый четвертый интеграл системы уравнений движения, если он существует, наряду с интегралами энергии, кинетического момента, тривиальным и находящийся с ними в инволюции, называется *дополнительным* по отношению к трем упомянутым. Согласно теореме Бура–Лиувилля [4] существование этого интеграла позволяет отнести данную систему уравнений к *вполне интегрируемым* динамическим системам, обладающим полным набором независимых интегралов, находящихся в инволюции [5].

Вопрос о существовании дополнительных интегралов уравнений движения механических объектов сложной структуры, в частности, сложных механических систем переменного состава массы и изменяемой конфигурации с наложенными на них управляющими связями составляет малоисследованную область аналитической динамики.

В связи с этим являются актуальными постановка и исследование задачи о нахождении условий существования и свойств допол-

нительных первых алгебраических интегралов уравнений движения *сложных механических систем* (СМС). Решение этой задачи сводится к нахождению структурно-динамических и других ограничений, обуславливающих существование данных интегралов.

Согласно известному результату А. Пуанкаре динамическая система (в общем случае) не интегрируема [6]. Однако это утверждение относится только к существованию однозначного (относительно некоторого параметра) интеграла. В силу этого для данной динамической системы могут существовать первые интегралы для отдельных значений параметров и для определенных начальных условий. Помимо этого, в отдельных и специальных случаях могут иметь место и непрерывные интегралы [2, с. 84].

Исходя из этой предпосылки следует ожидать, что дополнительные интегралы для уравнений движения СМС могут существовать в некотором классе структурно-динамических ограничений на заданном подмножестве начальных значений определяющих параметров системы. При этом ограничения, наложенные на структурно-динамические параметры системы, являются *управляющими связями*, реализация которых обеспечивает выполнение определенных свойств движения и существование дополнительных интегралов уравнений состояния механического объекта.

Движение объекта, для которого существует дополнительный интеграл, может рассматриваться как движение, обладающее определенными заданными свойствами в классе его возможных движений [7, с. 126].

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании первого независимого дополнительного интеграла системы уравнений движения СМС при структурных ограничениях, аналогичных конфигурационным условиям для неизменяемого твердого тела в классической задаче С. Ковалевской.

1. Основные предпосылки

Под СМС понимается динамически изменяемый механический объект, структурная модель которого предполагает непрерывное изменение во времени состава массы и (или) его конфигурации, явно задаваемые предварительно построенной для $t \in [0, +\infty) \equiv T$ управляющей программой. Эта программа определяет для $t \in T$ множество структурно-динамических параметров системы (в том числе и управляющих) так, что система ее динамических уравнений аналитически замкнута относительно компонент вектора угловой скорости ее *основного тела* (базы K_0). Под базой K_0 понимается неизменяемое абсолютно твердое тело постоянной массы и неизменяемой конфигурации ее распределения.

1.1. Структурная модель объекта

Рассмотрим детерминированную модель данного механического объекта, учитывающую принятые выше предпосылки.

Механическая система K составлена из неизменяемого (в смысле неизменности величины и геометрии массы) абсолютно твердого тела K_0 (*тела-носителя*) и структурно изменяемой подсистемы K_1 (*рабочего тела*). Величина массы подсистемы K_1 и ее геометрия масс (*конфигурация*) могут непрерывно изменяться со временем. В силу этого система $K = K_0 \cup K_1$ является объектом с изменяемой во времени структурой массы и ее геометрии.

В подсистеме K_1 перенос рабочего тела относительно носителя K_0 совершается путем его циркуляции в области D такой, что $K_1 \subset D$, и выноса (конвекции) массы за пределы области D с программно заданной относительно K_0 скоростью. Изменение структуры массы системы K реализуется заданием для $t \in T$ определенной предварительно заданной управляющей программой.

Данная структурная схема основана на предпосылках к моделям, построенным в работах М.Ш. Аминова [8] и И.Ф. Верещагина [9].

Механизм массопереноса компонент массы подсистемы K_1 относительно базы K_0 и условия его реализации составляют основу *структурной модели* динамически изменяемого объекта K . Этот перенос определяется заданием *полной внутренней программы* (термин работы [9]) в виде упорядоченной системы явно заданных для $t \in T$ гладких функций времени. Эта система является иерархическим четырехуровневым программным массивом, полностью и однозначно определяющим изменение во времени величины массы и конфигурации механической системы K .

Механический объект K , идентифицированный с данной *структурной моделью*, является *сложной механической системой* [10].

1.2. Динамическая модель объекта

Предполагается, что СМС движется так, что ее неизменяемая основа (база K_0) вращается вокруг неподвижного полюса O в однородном параллельном поле силы тяжести под воздействием результирующего момента заданных *квазиреактивных сил* $L(t)$.

Введем правые координатные ортобазисы $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ с общим началом в полюсе O : неподвижный Γ_1 ; базис Γ_2 , неизменно связанный с носителем, и базис Γ_3 ($Ox_1x_2x_3$), оси Ox_j ($j = 1, 2, 3$) которого для каждого момента времени $t \in T$ направлены по главным в полюсе O осям тензора инерции СМС с матрицей $J(t) = \text{diag}[A_1(t), A_2(t), A_3(t)]$. В силу непрерывного по $t \in T$ изменения конфигурации и состава массы СМС базис Γ_3 в общем случае вращается относительно Γ_2 с угловой скоростью $\omega^r(\omega_j^r)$, зависимость которой от величин заданных компонент $A_j(t)$ тензора инерции СМС известна [11].

Таким образом, непрерывные и непрерывно дифференцируемые зависимости вида $\omega^r(t)$, $J(t)$, отнесенные к базису Γ_3 , считаются *программно заданными* и, следовательно, известными в любой момент времени $t \in T$.

Рассмотрим движение СМС под действием квазиреактивных сил, обусловленных переносом рабочего тела из некоторой области D , принадлежащей объекту, с программно заданной абсолютной скоростью $u(t)$.

Главный момент этих сил относительно полюса O для $t \in [0, +\infty) \equiv T$ определяется равенством

$$\mathbf{L}(t) = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) dV, \quad (1)$$

здесь $\rho(t, \mathbf{r})$ – локальная плотность массы в области D ; $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ – абсолютная скорость переноса точек рабочего тела из области D ; $\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор точки данной области.

Обозначим

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}^r, \quad \boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{\omega}^r - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G}^r, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^r = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda},$$

$$m_1(t) = A_2^{-1}(t) - A_3^{-1}(t) \quad (1, 2, 3),$$

где $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$ – абсолютные угловые скорости носителя СМС (базиса Γ_2) и базиса Γ_3 ; $\mathbf{G}(G_j)$, $\mathbf{G}^r(t)$ – кинетические моменты относительно полюса O всего объекта и рабочего тела, соответственно (последний – относительно базиса Γ_2); $A_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) – главные осевые моменты инерции СМС, заданные для каждого $t \in T$ в осях базиса Γ_3 . Характерные вектор-параметры $\mathbf{L}(t)$, $\mathbf{G}^r(t)$ являются управляющими [12]; каждый из них задан определенной программой. Любые ограничения, налагаемые на управляющие параметры, являются управляющими связями. Здесь и далее символ (1, 2, 3) обозначает циклическую перестановку величин с индексами 1, 2, 3.

Пусть $M(t)$ – величина массы СМС; g – стандартное значение ускорения силы тяжести; $P = Mg$; $\mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$ – орт, неизменно связанный с базисом Γ_1 такой, что $\mathbf{P} = -P\mathbf{s}$; $\mathbf{r}_C(t)$, $r_j(t)$ – радиус-вектор центра тяжести объекта K и его координаты в осях базиса Γ_3 ($j = 1, 2, 3$).

Движение СМС при данных предположениях характеризуется системой уравнений типа Жуковского–Пуассона [12]:

$$\mathbf{G} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{G} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{G} = \mathbf{L} + P(\mathbf{s} \times \mathbf{r}_C), \quad (3)$$

$$\mathbf{s} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{G} \times \mathbf{s} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{s} = 0,$$

где $\mathbf{L}(L_1, L_2, L_3)$ определяется равенством (1); $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – характерный вектор.

Уравнения (3) в проекциях на главные в полюсе O оси инерции объекта K , определяемые базисом Γ_3 , принимают вид

$$G_1 + m_1 G_2 G_3 + \lambda_2 G_3 - \lambda_3 G_2 = L_1 + P(r_3 s_2 - r_2 s_3),$$

$$s_1 + (A_2^{-1} G_2 + \lambda_2) s_3 - (A_3^{-1} G_3 + \lambda_3) s_2 = 0, \quad (4)$$

(1, 2, 3).

Система уравнений (4) обладает первыми алгебраическими интегралами

$$\|\mathbf{s}\|^2 = 1, \quad (\mathbf{s} \bullet \mathbf{G}) = H, \quad (5)$$

причем последний из этих интегралов существует для $t \in T$ на управляющей связи $\mathbf{L} \equiv 0$.

2. Постановка задачи

Введем структурно-конфигурационные условия, выполняющиеся для любых $t \in T$:

$$A_1 = A_2 = 2A_3, \quad r_1 \neq 0, \quad r_2 = r_3 \equiv 0, \quad (6)$$

и присоединим к ним управляющую связь

$$\mathbf{G}^r = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}^r, \quad (7)$$

в силу которой вектор эффективной угловой скорости $\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv 0$ для значений $t \in T$. Эти условия характеризуют обобщенный аналог классического случая Ковалевской для неизменяемого твердого тела [3].

Таким образом, движение СМС, характеризуемое системами уравнений (3) или (4) и подчиненное ограничениям (6), (7), является программным во времени управляемым движением, которое может быть реализовано на заданных управляющих связях.

Поставим следующую задачу: на многообразии возможных значений $W(\mathbf{G}, \mathbf{s})$ при ограничениях (6), (7) и $\mathbf{L} = 0$ найти условия существования независимого алгебраического первого интеграла $I(\mathbf{G}, \mathbf{s}) \in C^2$ системы уравнений (4), определенного в области $E(\mathbf{G}, \mathbf{s})$ фазового пространства и находящегося в инволюции с интегралами (5). □

Сформулированная задача может быть решена как задача нахождения части интегрального многообразия динамической системы при заданных ограничениях.

3. Обобщенный аналог интеграла Ковалевской

Введем переменные

$$w = G_1 + iG_2, \quad v = s_1 + is_2,$$

$$\tau = \frac{1}{2} \int_0^t A_3^{-1}(u) du, \quad (8)$$

где i – мнимая единица.

Выполняя согласно равенствам (8) трансформации $(G_1, G_2, s_1, s_2, t) \rightarrow (w, v, \tau)$, при-

ведем систему уравнений (4) при условиях (6), (7) и $\mathbf{L} = 0$ к виду

$$\begin{aligned} w' + iG_3 w &= 2ik s_3, \\ G_3' + 2k \operatorname{Im} v &= 0, \\ v' + 2iG_3 v &= iws_3, \\ s_3' + \operatorname{Im}(\bar{w}v) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной τ ; черта сверху здесь и всюду далее относится к соответствующим комплексно сопряженным величинам.

Введем конфигурационное условие

$$k(\tau) = A_3 P r_1 \equiv \text{const} = k^0 \quad (\tau \in T), \quad (10)$$

где $k^0 \neq 0$. Одно из возможных истолкований условия (10) приведено далее.

Таким образом, доказано следующее

Утверждение 1. Динамическая система (4) при условиях (6), (7), $\mathbf{L} = 0$ преобразованием (8) и введением стационаризуемого ограничения (10) приводится к вполне автономной форме (9), в которой $k(\tau) = k^0$. $\square$

Согласно этому утверждению динамическая система (4) при указанных условиях является *приводимой по Ляпунову*.

Рассмотрим следующий критерий существования первого алгебраического интеграла системы уравнений (9).

Утверждение 2. Для того чтобы система уравнений (9), следующая из системы (4) при ограничениях (6), (7), $\mathbf{L} = 0$, имела дополнительный первый алгебраический интеграл вида ($h = \text{const} \neq 0$)

$$(w^2 - 4k^0 v)(\bar{w}^2 - 4k^0 \bar{v}) = h^2, \quad (11)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (10). $\square$

Доказательство. Достаточность.

Исключая из первого и третьего уравнений системы (9) последовательно величины s_3 , G_3 , при выполнении ограничения (10) получаем интегрируемую комбинацию, из которой непосредственно следует первый интеграл (11).

Необходимость. Дифференцируя по τ равенство (11), в силу первого, третьего уравнений системы (9) и комплексно сопряженных им уравнений движения получаем соотношение, тождественно удовлетворяющееся при условии (10). $\square$

Очевидно, что интегралы (5), (11) независимы, а управляющие связи (7), $\mathbf{L} = 0$, (10) на множестве значений $t \in T$ совместимы.

Таким образом, согласно утверждению 2, обобщенный интеграл Ковалевской (11) при $k(\tau) = k^0$ представляется в форме

$$(w^2 - 4k^0 v)(\bar{w}^2 - 4k^0 \bar{v}) = h^2. \quad (12)$$

Следствие 1. Полагая

$$F = F_1 + iF_2 = w^2 - 4k^0 v,$$

приведем интеграл (12) $|F|^2 = h^2$ к виду

$$F_1^2 + F_2^2 = h^2, \quad (13)$$

где обозначено

$$F_1 = G_1^2 - G_2^2 - 4k^0 s_1, \quad (14)$$

$$F_2 = 2(G_1 G_2 - 2k^0 s_2).$$

При $h \neq 0$ переменные $h^{-1}F$, $h^{-1}\bar{F}$ взаимосвязаны преобразованием инверсии; в особом (критическом) случае, при $h = 0$, из соотношения (13) следует система обобщенных аналогов интегралов Делоне:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad (15)$$

представимых также в формах

$$w^2 = 4k^0 v, \quad \bar{w}^2 = 4k^0 \bar{v}.$$

4. Интерпретации критериального условия

Рассмотрим возможные интерпретации критериального условия (10). В работе [14, с. 11] показано, что соотношения

$$\mathbf{J}^{-1}(t) \bullet \mathbf{J}^0 = \mu(t), \quad (16)$$

$$M(t) \mathbf{r}_C(t) = M^0 \mathbf{r}_C^0 \mu(t)$$

при $\mathbf{r}_C^0 \neq 0$, $\mu(t) \in \mathbf{C}^1[0, +\infty)$ определяют условия *структурно-динамического подобия* СМС, являющейся *подобно-изменяемым механическим объектом* [15]. Здесь и всюду далее (как и выше) нулевой верхний индекс относится к значениям величин при $t = 0$.

Согласно условиям (16) конфигурация изменения массы системы и статический момент массы, заданные программно для $t \in T$, изменяются во времени по закону *структурно-динамического подобия* с коэффициентом подобия – безразмерной функцией $\mu(t)$. Данное подобие (точнее, *гомотетия* с центром в полюсе O) вследствие динамической изменемости объекта K имеет реономный характер, а движение СМС может быть реализовано на управляющей связи (7).

Таким образом, в силу соотношений (16) критериальное условие (10) при ограничениях (6), (7), $\mathbf{L} = 0$ выражает структурно-

динамическое подобие СМС. В силу этого справедливо следующее

Следствие 2 (из утверждения 2). Если для динамической системы (9) имеет место первый интеграл (12), то соответствующая ей СМС является системой с подобно изменяемой структурой массы. $\square$

5. Альтернативная форма представления

Введем динамическую систему

$$\begin{aligned} U_1'' - Q(U_1, U_2)U_2' &= -\frac{\partial W}{\partial U_1}, \\ U_2'' + Q(U_1, U_2)U_1' &= -\frac{\partial W}{\partial U_2}, \end{aligned} \quad (17)$$

соответствующую двумерному движению материальной точки на плоскости $\mathbf{R}^2$ с координатами U_1, U_2 , происходящему под воздействием плоского силового поля с потенциалом $W(U_1, U_2)$. Здесь штрих обозначает производную функцию по переменной σ – некоему гипотетическому времени. Система (17) вполне интегрируема и имеет известный первый интеграл [17].

Проведем в уравнениях (9) при ограничении (10) нелинейное преобразование фазовых переменных и гипотетического времени аналогичное тому, которое было применено Г.В. Колосовым [16] в задаче Ковалевской для неизменяемого твердого тела. В результате получим укороченную систему уравнений (17), в которой $Q \equiv 0$ и $U_1 = F_1$, $U_2 = F_2$,

$$F_1'' = -\frac{\partial W}{\partial F_1}, \quad F_2'' = -\frac{\partial W}{\partial F_2}. \quad (18)$$

При этом имеем зависимости вида

$$G_2^2 F_1 = V_1(\mathbf{G}, \mathbf{s}, k^0), \quad G_2^2 F_2 = V_2(\mathbf{G}, s_1, s_3, k^0),$$

$$G_2^2 d\sigma = V_3(\mathbf{G}, s_3, k^0),$$

где V_j ($j = 1, 2, 3$) – заданные полиномиальные функции от скалярных переменных.

Данное преобразование приводит задачу Ковалевской об интегрировании системы уравнений (9), отнесенной к конфигурационному пространству $SO(3)$, к динамической задаче для материальной точки, движущейся в евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$ согласно уравнениям (18). К этой плоскости отнесено силовое поле с потенциалом $W(F_1, F_2)$ и переменными – эллиптическими координатами. Такой прием известен как *динамическая аналогия Колосова* [16], позволяющая применять в динамике

твердого тела модельные соотношения классической небесной механики [17].

6. Устойчивость стационарного движения системы в обобщенной задаче Ковалевской

Покажем, что параметр k^0 , содержащийся в критериальном условии (10), является показателем устойчивости стационарного (по переменным G_j) движения СМС в обобщенном аналоге задачи Ковалевской.

Из множества возможных стационарных решений системы (9) при $k = k^0$ и условиях утверждения 2 выделим в пространстве переменных G_j, s_j ($j = 1, 2, 3$) решение

$$\begin{aligned} G_1(t) &= G_1^0 \neq 0, & s_1(t) &\equiv 1, \\ G_2(t) &= G_3(t) \equiv 0, & s_2(t) &= s_3(t) \equiv 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Стационарное решение (19) соответствует вращению базиса Γ_3 вокруг главной оси инерции системы Ox_1 , несущей ее центр тяжести, с угловой скоростью

$$\Omega_1(t) = (2A_3)^{-1} G_1^0.$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости по Ляпунову состояния (19) в первом приближении, принимая его за невозмущенное. Вводя векторы возмущений $\mathbf{p}(p_j), \mathbf{q}(q_j)$ и полагая в возмущенном движении

$$[\mathbf{G}, \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} G_1^0 + p_1 & 1 + q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{bmatrix},$$

построим для системы (9) при условии (10) уравнения в возмущениях. Характеристическое уравнение этой системы, линеаризованной в окрестности состояния (19), будет

$$\lambda^2(\lambda^2 - 2k^0)[\lambda^2 + (G_1^0)^2 - 4k^0] = 0. \quad (20)$$

Требую для коэффициентов уравнения (20) выполнения условий критерия Ляпуна–Шипара, получаем следующее необходимое условие устойчивости:

Утверждение 3. Стационарное состояние СМС (19) при ограничениях утверждения 2 необходимо устойчиво, если

$$k^0 < 0. \quad \square \quad (21)$$

Следствие. Из соотношений (10), (21) следует, что стационарное движение СМС (19) необходимо устойчиво лишь при нижнем (по отношению к полюсу O в направлении вертикали) расположении центра тяжести системы

$$r_1(t) < \rho < 0 \quad (\rho = \text{const}, t \in T). \quad (22)$$

Результат (22) обобщает аналогичное свойство стационарного (относительно скорости ω) движения динамически неизменяемого твердого тела, установленное в классической задаче Ковалевской [18, с. 139].

Применим к возмущенному по $\mathbf{p}$ (p_j) движению, происходящему в окрестности состояния (19), известную осцилляторную аналогию, характеризующую движение твердого тела вокруг неподвижного полюса [19]. Линеаризованные уравнения этого движения, порожденные системой (9) при условии (10), приводят к одному уравнению:

$$p_2'' - k^0 p_2 = 0, \quad (23)$$

где штрих обозначает дифференцирование по переменной $\vartheta = \tau\sqrt{2}$, а переменная τ определяется равенством (8).

Сопоставим движению апекса вектора возмущения $\mathbf{p}$ движение системы трех осцилляторов в пространстве (p_j, ϑ) ($j=1, 2, 3$). Тогда осциллятор с номером $j=2$, согласно уравнению (23), находится на линейной упругой связи и совершает одномерное гармоническое колебание с собственной частотой:

$$\omega = \sqrt{-k^0}, \quad (k^0 < 0), \quad (24)$$

что согласуется с полученным выше условием устойчивости (21).

Таким образом, ограничению (10), помимо приведенных ранее, может быть дано следующее истолкование. Поскольку колебания линейного осциллятора (23) с постоянной собственной частотой (24) существуют только при неизменной его полной механической энергии, то условие (10) в линейном приближении выражает изоэнергетичность данного осциллятора. Колебания такого рода возможны только для устойчивых по Ляпунову движений, подчиненных условию (22).

7. Движение главных осей инерции

Рассмотрим характер движения осей координатного ортобазиса Γ_3 относительно базиса Γ_1 , совпадающих с главными осями инерции механической системы.

К величинам F_1, F_2 (14) присоединим функцию $F_3 = 2[(\operatorname{Re} w)^2 + G_3^2]$.

В работе [14] показано, что при условиях утверждения 2 для динамической системы (9) имеет место квазиэнергетический первый алгебраический интеграл ($h_1 = \text{const}$)

$$F_3 - F_1 = h_1. \quad (25)$$

Введем пространство переменных Суслера [3] с координатами F_j ($j=1, 2, 3$). Тогда движение главного базиса СМС будет определяться движением фазовой точки $N(F_j)$, траектория которой S образована пересечением невырожденного кругового цилиндра (13) с плоскостью (25). При этом точка N будет двигаться по эллипсу S со скоростью $\mathbf{v}_N$ ($f_2, -f_1, f_2$), где $f_i = A_3^{-1}G_3F_i$ ($i=1, 2$). Вместе с тем с учетом выражения для интеграла (13) имеем $|\mathbf{v}_N| = A_3^{-1}|G_3|\sqrt{F_2^2 + h^2}$.

Скорость базиса Γ_3 относительно базиса Γ_1 на управляющей связи (7) определяется равенством

$$\Omega(t) = \mathbf{J}^{-1}(t)\mathbf{G}(t) \quad (t \in T). \quad (26)$$

Система уравнений (9) при условиях утверждения 2 имеет две группы стационарных решений вида

$$\{w(t), G_3(t), v(t), s_3(t)\} = \{w^0, G_3^0, v^0, s_3^0\},$$

каждая из которых соответствует определенному режиму движения ортобазиса Γ_3 .

Группа 1. К ней относится решение

$$G_2^0 = s_2^0 = 0,$$

а остальные компоненты взаимосвязаны условиями

$$G_1^0 G_3^0 = 2k^0 s_3^0, \quad 2G_3^0 s_1^0 - G_1^0 s_3^0 = 0.$$

Группа 2. Здесь имеет место решение

$$G_2^0 = G_3^0 = 0, \quad s_1^0 = \pm 1, \quad s_2^0 = s_3^0 = 0,$$

причем значение $G_1^0 = \pm H$, где H – постоянная, содержащаяся в интеграле (5).

Множество стационарных движений, представленное данными группами, является *полным*. Это означает, что все возможные стационарные движения СМС, помимо входящих в указанные группы, при заданных ограничениях для динамической системы (9) и условиях утверждения 2 *не существуют*.

В данных движениях компоненты скорости $\Omega(t)$, согласно равенству (26), для обеих групп стационарных решений равны

$$\Omega_1(t) = (2A_3)^{-1}H, \quad \Omega_2(t) \equiv 0 \quad (t \in T), \quad (27)$$

а для компоненты Ω_3 при $t \in T$ имеем

$$\Omega_3(t) = A_3^{-1}G_3^0, \quad \Omega_3(t) \equiv 0 \quad (28)$$

в случаях решений групп 1, 2, соответственно. Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 4. Движения главных осей инерции СМС при условиях утверждения 2 происходят либо в скоростном режиме (27), соответствующем группе стационарных решений 1, либо в режиме (28), отнесенном к группе решений 2. Других неособых режимов движения главных осей инерции системы при заданных ограничениях не существует. $\square$

8. Особый случай задачи Ковалевской

Рассмотрим особый случай, при котором в интеграле (12), существующем для системы уравнений (9), имеем $h = 0$ (при условии (10) в общем, регулярном случае, $h \neq 0$). Тогда выражение (13) распадается на два частных независимых интеграла (15), названных *обобщенными интегралами Делоне* по аналогии с одноименными интегралами системы уравнений Эйлера–Пуассона для классического случая неизменяемого твердого тела [20].

В работе [13] доказано, что условия утверждения 2 составляют критерий существования независимого первого алгебраического интеграла системы уравнений (4)

$$|w|^2 + 2G_3^2 + 4k^0 s_1 = h_1, \quad (29)$$

где h_1 – постоянная интегрирования.

Таким образом, для исходной системы шести уравнений в силу принятых условий имеем пять независимых алгебраических интегралов – (5), (15), (29). Следовательно, исходная система уравнений движения СМС при условиях утверждения 2 вполне интегрируема и приводится к одной квадратуре. Алгоритм указанной процедуры известен и без труда может быть перенесен на обобщенный вариант задачи Ковалевской. В результате из заданной системы при ограничении

$$h_1 = 2H^2 \quad (H \neq 0) \quad (30)$$

может быть выделено следующее определяющее для $G_1 = \operatorname{Re} w$ уравнение:

$$\frac{dG_1}{d\tau} = \pm \sqrt{Q_4(G_1)}, \quad (31)$$

где кинетическая функция

$$Q_4(G_1) = G_1(1 - a_1 G_1^2)(a_2 - G_1), \\ a_1 = H^{-2}, \quad a_2 = 4k^0 H^{-1},$$

а переменная τ определяется равенством (8).

Интегрируя уравнение (31) и обращая найденную зависимость [21], получим

$$G_1(\tau) = a + \frac{1}{4} Q'_4(a) [N(\tau)]^{-1}, \quad (32)$$

где

$$N(\tau) = \wp(\tau; g_2, g_3) - \frac{1}{24} Q''_4(a),$$

$G_1(\tau_*) = a$ – какой-либо простой корень полинома Q_4 (предполагается, что этот полином не имеет кратных корней); $\wp$ – символ эллиптической функции Вейерштрасса; g_2, g_3 – стандартные инварианты полинома Q_4 [21], определяемые без затруднений; штрих сверху обозначает дифференцирование по полиномиальной переменной. Здесь Q'_4, Q''_4 – полиномы третьей и второй степени, соответственно, зависящие от параметров k^0, H .

При наличии зависимости (32) для остальных переменных системы уравнений (9) искомые соотношения могут быть найдены в силу равенств, непосредственно следующих при условии (10) из первых интегралов

$$(\operatorname{Re} w)^2 + G_3^2 = H^2, \quad |w|^2 - a_2 \operatorname{Re} w = 0, \quad (33)$$

а из интегралов Делоне (14), (15) и тривиального интеграла (5) находим зависимости вида $s_j(\tau)$ ($j = 1, 2, 3$). Подвижным годографом вектора $\mathbf{G}$ является линия взаимного пересечения невырожденного кругового цилиндра и действительного эллиптического цилиндра с уравнениями (33). В силу этого без затруднений могут быть определены явные зависимости вида $\theta(\tau)$, $\varphi(\tau)$, а также соотношение

$$\psi(\tau) = \psi^0 + H\tau. \quad (34)$$

Согласно равенству (34) базис Γ_3 в данном движении относительно базиса Γ_1 совершает *прецессию по τ* (термин понимается в локальном смысле согласно определениям [3, с. 76; 22, с. 273]), происходящую с угловой скоростью H .

Таким образом, СМС в рассматриваемом особом случае движется так, что ее главный базис совершает периодические по углам θ, φ движения, а по углу ψ – равномерное аperiодическое движение.

Заключение

Задача о нахождении условий существования независимого дополнительного интеграла уравнений движения СМС как неав-

тономной динамической системы логически проистекает из задач общей проблемы расширения поля ее интегрального многообразия. Это расширение принципиально возможно осуществить для класса механических объектов, обладающих структурно-динамическим подобием, реализуемым на реономных управляющих связях. Объекты данного класса, рассматриваемые на гладком функциональном многообразии, обладают характерным *морфическим свойством*, относящимся к полю скоростей, которое является общим для СМС и сопоставленным ей соответствующим *эквивалентным твердым телом* с присоединенной к нему системой роторов (гиростатом).

Это характерное свойство, описанное в работе [14] как *структурный гомеоморфизм*, аналитически выражается в том, что уравнения движения объекта-представителя (в данном случае, СМС) в результате выполнения неособых преобразований функций – компонент угловой скорости системы и переменной времени, становятся структурно идентичными соответствующим уравнениям движения эквивалентного твердого тела, образующим *автономную динамическую систему*. Это обстоятельство существенно упрощает аналитическое описание динамических свойств СМС и, в частности, интегрирование уравнений.

Список литературы

1. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
2. Джакаль Г.Е. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. Сулов Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
5. Арнольд В.И. и др. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ. 1985. Т. 3. 304 с.
6. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избр. тр. в 3 т. М.: Наука, 1972. Т.2. 999 с.
7. Галуллин А.С. Обратные задачи динамики. М.: Наука, 1981. 144 с.
8. Аминов М.Ш. Некоторые вопросы движения и устойчивости тела переменной массы // Тр. Казанского авиационного ин-та. 1959. Вып. 48. 118 с.
9. Верецагин И.Ф. Методы исследования режимов полета аппарата переменной массы: в 2 т. Пермь. Перм. ун-т, 1969. Т. 1, 260 с.
10. Макеев Н.Н. Асимптотика вращений сложной механической системы // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2004. С. 52–73.
11. Макеев Н.Н. О некоторых свойствах главных осей инерции тела переменной массы // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 1978. С. 126–131.
12. Макеев Н.Н. Некоторые случаи интегрируемости уравнений движения гиростата переменной массы // Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 1976. С. 99–104.
13. Макеев Н.Н. Обобщенный аналог случая Ковалевской для сложной системы / Саратов. политехн. ин-т. Саратов, 1988. 31 с. Деп. в ВИНТИ 15.04.88, № 3762-B88.
14. Макеев Н.Н. Интегралы сложных систем на управляющих связях / Саратов. политехн. институт. Саратов, 1989. 123 с. Деп. в ВИНТИ 14.03.89, № 1656-B89.
15. Макеев Н.Н. Геометрическая интерпретация движения сложной механической системы // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 4 (4). С. 44–49.
16. Колосов Г.В. Об одном свойстве задачи Ковалевской о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Труды отд. физ. наук Общ-ва любителей естествознания. М., 1901. Т. 11. С. 5–12.
17. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967. 524 с.
18. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.
19. Jankins J.L., Jacobson I.D., Blanton J.N. A nonlinear oscillator analog of rigid body dynamics // Celestial Mechanics. 1973. Vol. 7. № 4. P. 398–407.
20. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
21. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа: в 2 ч. М.: Физматлит, 1963. Ч. 2. 516 с.

22. Халфман Р.Л. Динамика. М.: Наука, 1972.
568 с.

The Kovalevski integral for the equations of motion of a complex mechanical system

N. N. Makeyev

Problems of Precision Mechanics and Control Institute Russian Academy of Sciences

24, Rabochaya st., Saratov, 410028, Russia

nmakeyev@mail.ru; (845) 272-35-33

The criterion for the existence of the first integral of the system of equations of motion of a complex mechanical object in a field of gravity is obtained. The integral is a generalized analog of the classical the S.V. Kovalevski integral, built for an immutable solid body.

Keywords: *complex mechanical system; integral of motion; a criterion for the existence of a first integral.*