МАТЕМАТИКА

УДК 001.89.5

Об одном принципе оптимальности траекторий в моделях экономической динамики

С. И. Гамидов
Бакинский государственный университет
Баку, Азербайджан
sabir818@yahoo.com

Рассматривается модификация модели Макарова с n технологиями. Используется принцип оптимальности, по которому удельное потребление выбирается так, чтобы траектория с заданной рабочей силой была бы эффективной. При этом считается, что общая численность рабочей силы постоянна, а ставка заработной платы одинакова во всех производствах.

Ключевые слова: *удельное потребление; эффективные траектории; функция Кобба–Дугласа.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2019-1-5-10

Введение

Рассмотрим модификацию модели Макарова [1], определяемой системой соотношений

$$\begin{aligned} &K_{t+1}^i \le \nu_i K_t^i + I_{t+1}^i, \quad I_{t+1}^i \ge 0, \\ &I_{t+1}^i + \omega_{t+1}^i L_{t+1}^i \le F_i\left(K_t^i, L_t^i\right), \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Предполагается, что в экономике имеется n технологий. Технология i описывается парой $\left(F_i, \nu_i\right)$, где F_i – производственная функция, ν_i – коэффициент сохранности фондов [2, 3]. Модель, которую обозначим Z, задается последовательностью наборов $\left(F_i, \nu_i; F_2, \nu_2; ...; F_n, \nu_n\right)$ и числовой последовательностью $\left(L_t\right)$. Под состоянием экономики в момент t в модели Z понимается вектор

$$x = \left(K^1, ..., K^n, L^1, ..., L^n, \omega^1, ..., \omega^n\right),$$

где K^i, L^i, $i = \overline{1,n}$, объем фондов и численность рабочей силы соответственно, ω^i, $i = \overline{1,n}$ – удельное потребление в i-м производстве, причем $K^i \ge 0, L^i \ge 0.$, В модели (1) I_{t+1}^i означают инвестиции. Считается, что F_i определена при $K \ge 0, L \ge 0.$, дифференцируемая, неотрицательная, строго вогнутая, положительно однородная, возрастающая по каждой переменной функции, причем $F(K,0) = F(0,L) = 0$ [1–3].

Постановка задачи

Предположим, что в каждой момент времени t каким-то образом общая численность рабочей силы L_t распределяется по производствам, т.е. задан вектор $L = \left(L_t^i, ..., L_t^n\right)$, где $L_t^i \ge 0$, $\Sigma_{i=1}^n L_t^i = L_t$.

Таким образом, модель Z определяется вектором $\left(K_t^1, ..., K_t^n, \omega_t^1, ..., \omega_t^n\right)$. По набору $\omega = \left(\omega_t^1, ..., \omega_t^n\right)$ построим модель $Z(\omega)$ и предположим, что ее состояние $\bar{x}_t = \left(K_t^1, ..., K_t^n, L_t^1, ..., L_t^n\right)$ при данном ω лежит на эффективной траектории $Z(\omega)$, обладающей свойством

$$I_{t+1}^i = K_{t+1}^i - \nu_i K_t^i > 0, \quad L_{t+1}^i > 0 \tag{2}$$

и имеющей характеристику $\left(P_t\right)$.

Введем $2n$ простейших однопродуктовых моделей $Z^i(\omega^i)$, $Z^i(L^i)$, $i=\overline{1,n}$, задаваемые одним и тем же набором $\left(\frac{b_{t+1}^i}{b_t^i}F_i,\ \frac{b_{t+1}^i}{b_t^i}\nu_i, \omega_t^i\right)$, в которых коэффициенты b_t^i, $i=\overline{1,n}$ определяются по характеристическим ценам (P_t) состояния x_t модели $Z(\omega)$. В модели $Z^i(L^i)$ считается известным L_t^i, а в модели $Z^i(\omega^i)$ – удельное потребление ω_t^i, $i=\overline{1,n}$.

Принцип оптимальности

Теперь рассмотрим принцип оптимальности, применяя который можно, с одной стороны, определить состояние модели $Z(L)$, а с другой – состояние эффективной траектории модели $Z(\omega)$.

Этот принцип оптимальности заключается в следующем: удельное потребление $\omega=\omega(L)$ выбирается так, чтобы траектория (K_t, L_t) с заданной рабочей силой L_t была бы эффективной в простейшей модели (F,ν,ω), которая получается при данном ω.

Докажем последнее утверждение. Последовательность (K_t^i, L_t^i) с фиксированной рабочей силой $L^i{}_t$ при выборе ω_t^i как функции от L_t^i является эффективной траекторией модели $Z^i(\omega^i)$.

Согласно теореме 2.3 [2] такой выбор обеспечивает и эффективность траектории (x_t) модели $Z(\omega)$. Таким образом, последовательность коэффициентов b_t^i позволяет произвести построение моделей $Z^i(L^i)$ и $Z^i(\omega^i)$, $i=\overline{1,n}$,, связь между которыми осуществляет описанный выше принцип оптимальности.

По теореме 5.1 [2]

$$\omega_{t+1}^i(\eta_{t+1}^i)=\frac{f_i(\eta_{t+1}^i)-\eta_{t+1}^i f_i^t(\eta_{t+1}^i)}{\nu_i+f_i^t(\eta_{t+1}^i)}, \qquad (3)$$

где η_{t+1}^i – единственный корень уравнения

$$\frac{[\nu_i\eta_t^i+f_i(\eta_{t+1}^i)]L_t^i}{L_{t+1}^i}=\frac{\nu_i\eta_{t+1}^i+f_i(\eta_{t+1}^i)}{\nu_i+f_i'(\eta_{t+1}^i)}. \qquad (4)$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{L}_i(\eta)=\frac{\nu_i\,\eta+f_i(\eta)}{\nu_i+f_i'(\eta)};$$

$$M_t^i=[\nu_i\eta_t^i+f_i(\eta_t^i)]L_t^i.$$

Заметим, что функция $\mathcal{L}_i(\eta)$ является возрастающей. Формула (4) в соответствии с принятыми обозначениями примет вид

$$\frac{M_t^i}{L_t^i}=\mathcal{L}_i(\eta_{t+1}^i). \qquad (5)$$

Таким образом, распределив общую численность рабочей силы по производствам, считая $L_{t+1}^i>0$ для всех i в силу свойства (2) траектории, мы однозначно по формулам (3), (4) устанавливаем ставку заработной платы ω_t^i и определяем состояние

$$x_t=(K_t^1,\dots,K_t^n, L_t^1,\dots,L_t^n, \omega_t^1,\dots,\omega_t^n)$$

модели Z.

Таким образом, вопрос сводится к распределению рабочей силы. Ниже мы остановимся на одном способе распределения.

Одинаковое удельное потребление

Изучим поведение траекторией модели Z, для которых общая численность рабочей силы считается постоянной и равна единице и ставка заработной платы в каждом из производств одинакова, т.е. $\omega_t^1=\omega_t^2=\dots=\omega_t^n=\omega_t$. Удельное потребление вычисляется по формулам (3), (4). Итак, требуется найти такое распределение общей численности рабочей силы L_{t+1}, $t=1,\dots$ на рабочую силу $L_{t+1}^i\left(\sum_{i=1}^n L_{t+1}^i=1\right)$, что

$$\omega_{t+1}^1(L_{t+1}^1)=\omega_{t+1}^2(L_{t+1}^2)=\dots=\omega_{t+1}^n(L_{t+1}^n).$$

Для решения этой задачи удобно использовать обратную к $\omega_{t+1}^i(L_{t+1}^i)$ функцию $L_{t+1}^i(\omega_{t+1}^i)$. Из уравнений (3), (4) выразим L_{t+1}^i как функцию $L_{t+1}^i(\eta_{t+1}^i(\omega_{t+1}^i))=L_{t+1}^i(\omega_{t+1}^i)$ переменной $\omega_{t+1}^i\in\left(0,\frac{\bar{s}_i}{\nu_i}\right)$.

Заметим сразу же, что $\eta_{t+1}^i(\omega)$ – возрастающая, а $L_{t+1}^i(\omega)$ – убывающая функции, причем [2]

$$\lim_{\omega\to 0}L_{t+1}^i(\omega)=+\infty,\ \lim_{\omega\to\frac{s_i}{\nu_i}}L_{t+1}^i(\omega)=0.$$

Пусть, далее

$$\bar{s} = \min_i \frac{\bar{s}_i}{\nu_i}$$

и $L_{t+1}^1(\omega) + L_{t+1}^2(\omega) + \ldots + L_{t+1}^n(\omega) = L_{t+1}(\omega)$.

Тогда $L_{t+1}^i(\omega)$ на $(0, \bar{s})$ является убывающей функцией и поэтому справедлива

Теорема 1. Уравнение $L_{t+1}(\omega) = 1$ имеет решение тогда и только тогда, когда $\lim_{\omega \to \bar{s}} L_{t+1}(\omega) < 1$, причем указанное решение единственно.

Доказательство. Для функции Кобба–Дугласа [2, 3] $\bar{s}_i = +\infty$ и поэтому $\bar{s}_i = \bar{s}$.

Откуда

$$\lim_{\omega \to \bar{s}} L_{t+1}(\omega) = \lim_{\omega \to +\infty} L_{t+1}(\omega) = 0.$$

Теорема 1 утверждает, что при определенных условиях существует разбиение общей численности рабочей силы, при котором ставка заработной платы во всех производствах одинаково. Покажем, что такое разбиение единственно. На самом деле, пусть ω_{t+1} – одинаковая, для всех ставка заработной платы

$$\left(\omega_{t+1} = \omega_{t+1}^i\left(L_{t+1}^i\right), \sum_{i=1}^n L_{t+1}^i = 1\right).$$

Тогда в силу свойств функций $\eta(\omega)$ и $L(\eta)$, определяемых по формулам (3), (4), такому ω_{t+1} соответствует единственная в каждом из производств численность рабочей силы L_{t+1}^i, $i = \overline{1, n}$.

Пусть $x_t = \left(K_t^1, \ldots, K_t^n, \omega_t^1, \ldots, \omega_t^n\right)$ – траектория модели $Z(L)$ и во всех соотношениях (1), характеризующих траекторию, реализуется равенство.

Положим $f_i(\eta) = F_i(\eta, 1)$.

Рассмотрим одно-продуктовую модель

$$Z^i\left(L^i\right) = \left(\frac{b_{t+1}^i}{b_t^i} F_i, \frac{b_{t+1}^i}{b_t^i} \nu_i, w_t^i\right)$$

и назовем число

$$\gamma_t^i = \frac{b_t^i}{b_{t+1}^i} \alpha_t^i = \max_{K, L > 0} \frac{\nu_i K + F_i(K, L)}{K + \omega_t^i L} = \max_{\eta > 0} \frac{\nu_i \eta + f_i(\eta)}{\eta + \omega_t^i}. \tag{6}$$

потенциальными возможностями модели $Z^i\left(L^i\right)$.

Фондовооруженность $\bar{\eta}^i = \dfrac{\bar{K}^i}{D^i}$, на которой достигается максимум в (6), называется оптимальной. Поскольку F_i и ν_i не меняются со временем, то γ_t^i зависит от ω_t^i, причем увеличивая (уменьшая) ω_t^i мы тем самым уменьшаем (увеличиваем) γ_t^i, т.е. $\gamma_t^i(\omega)$ – убывающая функция. Заметим, что потенциальные возможности модели $Z^i\left(L^i\right)$ совпадают с темпом роста модели $\left(F_i, \nu_i, \omega_t^i\right)$.

Обозначим через $\bar{\varpi}^i$ удельное потребление, выбираемое согласно "золотому правилу Фелпса" по набору $\left(F_i, \nu_i\right)$ и темпу роста рабочей силы, равному единице. Тогда неймановский темп роста модели $\left(F_i, \nu_i, \bar{\varpi}^i\right)$ равен единице [2, 4], т.е.

$$\frac{\nu_i \bar{\eta}^i + f_i\left(\bar{\eta}^i\right)}{\eta^i + \bar{\varpi}^i} = 1, \tag{7}$$

где $\bar{\eta}^i$ – оптимальная фондовооруженность, соответствующая $\bar{\varpi}^i$. Так как $\gamma_t^i(\omega)$ убывающая функция, то $\gamma_t^i > 1$ при $\omega_t^i < \omega^i$ и $\gamma_t^i < 1$ при $\omega_t^i > \bar{\varpi}^i$.

Вернемся к исходной траектории (x_t). Поскольку в соотношениях

$$\begin{aligned} &K_{t+1}^i \le \nu_i K_t^i + I_{t+1}^i, \; I_{t+1}^i \ge 0, \\ &I_{t+1}^i + \omega_{t+1}^i L_{t+1}^i \le F_i\left(K_t^i, L_t^i\right), \quad \left(i = \overline{1, n}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

реализуется равенство, то получим соотношение, связывающее объемы фондов в соседние моменты времени:

$$K_{t+1}^i = \nu_i K_t^i + F_i\left(K_t^i, L_t^i\right) - \omega_{t+1}^i L_{t+1}^i,$$

поделив которое на L_{t+1}^i, получим

"Золотое правило накопления Фелпса" – это траектория сбалансированного роста экономики, при которой каждое поколение сберегает для будущих поколений такую же часть национального дохода, какую оставляет ему предыдущее поколение,

$$\eta_{t+1}^i = \frac{1}{l_t^i}\left[\nu_i \eta_t^i + f_i\left(\eta_t^i\right)\right] - \omega_{t+1}^i, \tag{8}$$

где $l_t^i = \dfrac{L_{t+1}^i}{L_t^i}$.

Справедлива

Лемма 1. Пусть для последовательности η_t^i выполняются равенства (8) и $l_t^i > 1$. Если $\eta_t^i < \overline{\eta}^i$, где $\overline{\eta}^i$ – оптимальная фондовооруженность, то $\eta_{t+1}^i < \overline{\eta}^i$.

Доказательство. Из (7) и (8) следует равенство

$$\overline{\eta}^i - \eta_{t+1}^i + \overline{\omega}^i - \omega_{t+1}^i = \nu_i \overline{\eta}^i + f_i\left(\overline{\eta}^i\right) - \\ - \frac{1}{l_t^i}\left[\nu_i \eta_t^i + f_i\left(\eta_t^i\right)\right].$$

По формуле Лагранжа

$$f_i\left(\overline{\eta}_t^i\right) - f_i\left(\eta_t^i\right) = f_i^t\left(\theta_t^i\right)\left(\overline{\eta}_t^i - \eta_t^i\right),$$

где θ_t^i – точка, лежащая между $\overline{\eta}^i$ и η_t^i, поэтому, учитывая, что $l_t^i > 1$, получим

$$\overline{\eta}^i - \eta_{t+1}^i + \overline{\omega}^i - \omega_{t+1}^i \geq \\ \geq \left[\nu_i + f_t^i\left(\theta_t^i\right)\right]\left(\overline{\eta}^i - \eta_t^i\right) \tag{9}$$

Пусть $\eta_t^i < \overline{\eta}^i$. Предположим, что $\eta_{t+1}^i > \overline{\eta}^i$. Отсюда вытекает, (учитывая, что $\omega^i(\eta)$ возрастающая функция), что $w_{t+1}^i\left(\eta_{t+1}^i\right) \geq w_{t+1}^i\left(\overline{\eta}^i\right) = \overline{\omega}^i$.

Это, однако, противоречит (9). Поэтому $\eta_{t+1}^i < \overline{\eta}^i$.

Следствие

Если $\eta_t^i < \overline{\eta}^i$ и $\eta_{t+1}^i > \overline{\eta}^i$, то $l_t^i < 1$.

Аналогично лемме 1 доказывается и

Лемма 2. Пусть для последовательности η_t^i выполняются (8) и $l_t^i \leq 1$. Если $\eta_t^i > \overline{\eta}^i$, то $\eta_{t+1}^i > \overline{\eta}^i$.

Следствие

Если $\eta_t^i > \overline{\eta}^i$ и $\eta_{t+1}^i < \overline{\eta}^i$, то $l_t^i > 1$.

Пусть $\overline{\eta}^i$ удовлетворяет уравнению $\omega_t^i\left(\overline{\eta}^i\right) = \overline{\omega}^i$. В дальнейшем будем считать, что модели $Z^i\left(L^i\right)$ занумерованы так, что $\overline{\omega}^1 < \overline{\omega}^2 < \ldots < \overline{\omega}^n$.

Предел последовательности L_t^i (если существует) обозначим через $L^i, i = \overline{1,n}$. Предположим, что в каждый момент времени t выполняется условие теоремы 1, т.е. всегда существует L_t^i такие, что $\omega_t^i = \omega_t$ и $\sum_{i=1}^n L_t^i = L_t, i = \overline{1,n}$, и целью экономической системы является распределение рабочей силы так, чтобы удельное потребление в каждом из производств было одинаковым.

Лемма 3. Пусть при некотором i выполняется неравенство $\omega_t^i \leq \overline{\omega}_t$ при всех t. Тогда существует предел последовательности ω_t^i и равен $\overline{\omega}^i$.

Доказательство. Пусть $\underline{\lim}\,\omega_t^i < \overline{\omega}^i$. Тогда существует подпоследовательность ω_t^i и $\delta > 0$ такое, что $\omega_{t_k}^i < \overline{\omega}^i - \delta$ при достаточно больших k. Далее, поскольку $\gamma^i(\omega)$ – непрерывная убывающая функция и $\gamma^i\left(\overline{\omega}^i\right) = 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что $\gamma^i(\omega) > 1 + \varepsilon$ для всех ω таких, что $\omega < \overline{\omega}^i - \delta(\varepsilon)$. Так как $\delta(\varepsilon)$ возрастающая функция и $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то существует такое $\bar{\varepsilon}$, что $\delta(i) < \delta$.

Так как $\omega_{t_k}^i < \overline{\omega}^i - \delta$, то

$$\omega_{t_k}^i < \overline{\omega}^i - \delta < \overline{\omega}^i - \delta(\varepsilon) \text{ и}$$

$$\gamma_{t_k}^i = \gamma^i\left(\omega_{t_k}^i\right) > 1 + \varepsilon.$$

Представим национальное богатство в виде

$$M_t^i = M_{t-1}^i \gamma^i = M_{t-2}^i \gamma_{t-1}^i \gamma_t^i = \ldots = M_0^i \prod_{\tau=1}^{t} \gamma_\tau^i,$$

где $M_0^i > 0$.

Из сказанного легко следует, что

$$M_t^i = M_0^i \prod \gamma_\tau^i \to +\infty.$$

Однако в силу того, что $\omega(\eta)$ возрастающая функция, из соотношения $\omega_t^i \leq \overline{\omega}^i$ следует и соотношение $\eta_t^i \leq \overline{\eta}^i$.

Поэтому имеем

$$M_t^i = \nu_i K_t^i + F_i\left(K_t^i, L_t^i\right) \leq \\ \leq \nu_i \overline{\eta}^i + F_i\left(\overline{\eta}^i, 1\right) << +\infty.$$

Это противоречие говорит о том, что $\underline{\lim}\,\omega_t^i \geq \overline{\omega}^i$ и тем самым $\lim \omega_t^i = \overline{\omega}^i$.

Теорема 2

а) если $\omega_1 \in \left[\overline{\omega}', \overline{\omega}^n\right]$, то и $\omega_t \in \left[\overline{\omega}', \overline{\omega}^n\right]$ для всех t и $\omega_t \to \overline{\omega}^n$, $L_t^n \to 1$, $L_t^i \to 0, i < n;$

b) если $\omega_t < \overline{\omega}^1$, то существует момент времени T: $\overline{\omega}^1 \le \omega_T \le \overline{\omega}^n$, причем ω_t на $\left(0, \overline{\omega}^1\right]$ возрастает;

c) если $\omega_1 > \overline{\omega}^n$ и $\omega_t > \overline{\omega}^n$ для всех t, то ω_t убывает, стремясь к $\overline{\omega}^n$.

Доказательство. Докажем, что из $\omega_1 \in \left[\overline{\omega}', \overline{\omega}^n\right]$ следует, что $\omega_t \in \left[\overline{\omega}', \overline{\omega}^n\right]$.

Пусть $\omega_t \in \left[\overline{\omega}^i, \overline{\omega}^n\right]$. Предположим $\omega_{t+1} > \overline{\omega}^n$. Тогда $\omega_{t+1} > \omega_t$, и поскольку $\omega^i(\eta)$ возрастающая функция, то $\eta_{t+1}^i > \eta_t^i, i = \overline{1, n}$. Кроме того, $\eta_{t+1}^n > \overline{\eta}^n > \eta_t^n$. В этом случае $l_t^n < 1$ согласно следствию к лемме 3. Далее, из (4) и (6) следует

$$\ell_t^i = \frac{L_{t+1}^i}{L_t^i} = \gamma_t^i \frac{\mathcal{L}_i(\eta_t^i)}{\mathcal{L}_i(\eta_{t+1}^i)},$$
$$i = \overline{1, n}.$$

Отсюда, учитывая, что $\mathcal{L}_i(\eta)$ – возрастающая функция и $\gamma_t^1 < 1$, имеем $l_t^1 < 1$. Поэтому $l_t^i < 1$, $i = \overline{1, n}$, что противоречит условию $L_t^1 + \ldots + L_t^n = 1$ для всех t. Пусть теперь $\omega_{t+1} < \overline{\omega}^1$. Тогда $\eta_{t+1}^1 < \overline{\eta}^1 < \eta_t^1$. Привлекая следствие к лемме 2, получим, что $l_t^1 > 1$. Кроме того, $\gamma_t^n > 1$ и $\frac{\mathcal{L}_n(\eta_t^n)}{\mathcal{L}_n(\eta_{t+1}^n)} > 1$.

Поэтому из (10) следует, что и $l_t^n > 1$. Вновь нарушается условие $L_1 = 1$ для всех t.

Таким образом, $\omega_{t+1} \in \left[\overline{\omega}', \overline{\omega}^n\right]$ и потому, если $\omega_1 \in \left[\overline{\omega}', \overline{\omega}^n\right]$, то и $\omega_t \in \left[\overline{\omega}', \overline{\omega}^n\right]$.

Применяя лемму 3, получим, что $\omega_t \to \overline{\omega}^n$. Отсюда вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует T такое, что для всех $t > T$ имеет место $\overline{\omega}^n - \omega_t < \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = \overline{\omega}^n - \overline{\omega}^{n-1}$, откуда $\omega_t \in \left[\overline{\omega}^{n-1}, \overline{\omega}^n\right]$, $\forall\, t > T$.

Следовательно, $\gamma_t^1 < 1$ для всех $t > T$ и для всех $i = \overline{1, n-1}$.

Поэтому национальное богатство $M_t^i = \prod_{\tau=0}^{i} \gamma_\tau^i \cdot M_0^i$ в каждом из производств, не считая t_0, начинает убывать. А в n-м же производстве $\gamma_t^n > 1$ для всех t и потому M_t^n возрастает. Кроме того, последовательность M_t^n ограничена сверху (см. лемму 3).

Следовательно, M_t^i имеет предел M^i, причем $M^n \ne 0$. Далее, поскольку $\omega_t \to \overline{\omega}^n$, то $\eta_t^i \to \eta^i$, где $\frac{\eta^i}{\omega^i(\eta^i)} = \overline{\omega}^n$.

Здесь $\eta^i > \overline{\eta}^i, i < n$ и $\eta^n = \overline{\eta}^n$.

Поэтому переходя в равенстве (5) к пределу, получим

$$\lim_{t\to\infty} L_t^i = \lim_{t\to\infty} \frac{M_{\tau-1}^i}{\mathcal{L}_i(\eta_t^i)} = \frac{M^i}{\mathcal{L}_i(\eta^i)} = L^i,$$

причем, $L^n > 0$.

Предположим, что и $L^i > 0$, т.е. $M^i > 0$. Тогда, переходя к пределу в (8) и учитывая, что $l_t^i \to 1$, получим

$$\eta^i + \omega^i(\eta^i) = \nu_i \eta^i + f_i(\eta^i).$$

Из этого равенства вытекает, что $\eta^i = \overline{\eta}^i$. Это невозможно для $i < n$, так как $\eta^i > \overline{\eta}^i$.

Отсюда вытекает, что $L^i = 0, i < n$ и $L^n = 1$.

Доказательство утверждений b) и c) аналогично доказательству утверждений b) и c) теоремы 1.

Следствие 1. Если ω_t существует для всех t, то $L_t^i \to 0, i < n$.

Следствие 2. Суммарное потребление в модели Z в случае, когда общая численность рабочей силы распределяется так, что $\omega_t^1 = \omega_t^2 = \ldots = \omega_t^n = \omega_t$ стремится к $\overline{\omega}^n$.

Список литературы

1. *Макаров В.Л.* Моделирование экономической динамики. Оптимизация. М.: Наука, 1973. № 11(28).
2. *Рубинов А.М.* Математические модели расширенного воспроизводства. Л.: Наука, 1983.
3. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции. М.: Статистика, 1986.
4. *Макаров В.Л., Рубинов А.М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.

On a principle of optimality of the trajectories in the models of economic dynamics

S. I. Gamidov
Baku State University; Baku, Azerbaijan
sabir818@yahoo.com

The modification of the Makarov model by n technologies is considered. The principle of optimality is used, according to which the specific consumption is chosen to make the trajectory with a given labor force effective. It is assumed that the total labor force is constant, and the wage rate is the same in all industries.

Keywords: *specific consumption; effective trajectorie; Cobb-Douglas function.*