Проблемы университетского образования

УДК 517.51

Математические заблуждения о периодических функциях

И. В. Зорин
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
igor.v.zorin@gmail.com, 8(342) 2 396 345

Рассматриваются свойства периодических функций действительного аргумента. Приводится ряд контрпримеров, опровергающих распространенные заблуждения о свойствах периодических функций. Приведено доказательство теоремы о существовании наименьшего периода функции при наличии ее непрерывности.

Ключевые слова: *периодическая функция; непрерывность функции; контрпример.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-4-74-77

Математические знания довольно широко распространены в нашем обществе. Математику как науку изучают и в школе, и в высших учебных заведениях. Но зачастую учебные программы даже университетских технических курсов не позволяют преподавать некоторые разделы математических дисциплин достаточно глубоко и в полном объеме. Часто даже важнейшие понятия рассматриваются и доказываются лишь для некоторого, пусть и важного, частного случая. Если это специально не оговаривается, то возникают необоснованные обобщения популярных утверждений, верных и доказываемых для этих только случаев. Так возникают математические заблуждения. Примером таких заблуждений являются некоторые широко распространенные утверждения о свойствах периодических функций.

То, что понятие периодичности оказывается далеко не тривиальным, подробно обсуждалось в статье [1]. Оказывается, не все однозначно даже с самим определением периодической функции. Например, в [2] приведено определение: **"Функция $f(x)$, определенная на множестве Е, является П.ф., если существует число Т≠0 такое, что для любого $x \in$ Е значение x + Т и x - Т также принадлежат Е и $f(x \pm T) = f(x)$ ".**

В других источниках можно встретить требование, что **Т > 0**. А в учебнике [3], например, написано на с. 232: "Заметим, что число 0 является периодом любой функции". Встречая такой разнобой даже в определении периодичности, не надо удивляться, что нет единства и в рассмотрении свойств периодических функций.

С другой стороны, многие так сказать "расхожие" суждения о периодических функциях оказываются в общем виде неверными. Доказательств утверждений, даже вполне корректных, о свойствах периодичности нет ни в школьных, ни в общеизвестных вузовских курсах. Наиболее полно, из известных автору пособий, тема представлена в [4].

Утверждения, которые оказываются заблуждениями, можно встретить даже в таких солидных изданиях, как [2].

В современных условиях Интернет позволяет облегчить поиск информации, но и он ясности в данном вопросе не прибавляет. Хотя, справедливости ради, заметим, что статья в Википедии [6] призывает относиться с осторожностью к некоторым высказываниям о периодических функциях, признавая их неточность.

Приведем два наиболее распространенных утверждения.

Заблуждение 1. **Сумма двух периодических функций с несоизмеримыми периодами – непериодична.**

Заблуждение 2. **Сумма двух периодических функций с наименьшими периодами имеет наименьший период, который является наименьшим общим кратным указанных периодов.**

Необходимо отметить, что если применять это последнее утверждение к периодическим функциям с наименьшими периодами два и три, то получим правильный результат, но если взять слагаемые с периодами, например, два и шесть, то ответ может оказаться ошибочным.

Для опровержения какого-либо общего утверждения достаточно привести пример, противоречащий этому утверждению. Построение таких примеров называется в книге [5] *построением контрпримеров.*

Итак, приведем примеры, точнее контрпримеры, которые докажут ошибочность в общем виде этих (и многих других подобных) утверждений.

1). ***Существует ли периодическая функция, у которой периодами являются несоизмеримые числа?***

Ответ: Да.

Пример: $f(x)$ = const.

2). ***Существует ли периодическая функция не равная константе, у которой нет основного периода?***

Ответ: Да.

Пример: – функция Дирихле, $f(x)$ = 1, если x – рациональное число, $f(x)$ = 0, если x – иррациональное. В этом случае любое рациональное число является периодом, но ни одно иррациональное число периодом не является.

В [5] на с. 37 приведен почти такой же пример и указана ссылка на работу по данному вопросу.

3). ***Существует ли периодическая функция не равная константе, у которой периодами являются несоизмеримые числа?***

Ответ: Да.

Пример:

Пусть **Q** – множество рациональных чисел, $\mathbf{Q_1}$ – множество всех чисел вида: $\alpha + n\sqrt{2}$, где $\alpha \in \mathbf{Q}$, а n – любое целое число.

Тогда нужная функция задается соотношением:

$f(x) = 1$, если x принадлежит множеству $\mathbf{Q_1}$, и $f(x) = \mathbf{0}$ для всех остальных действительных чисел.

У этой функции периодами являются и любое рациональное число, например 1, и иррациональное число $\sqrt{2}$.

4). ***Существуют ли две периодические функции с несоизмеримыми периодами, сумма которых – периодическая функция?***

Ответ: Да.

Пример:

Разность функции из предыдущего примера и функции Дирихле. В этом случае интересно то, что $\sqrt{2}$ не соизмерим ни с каким периодом функции Дирихле.

Заблуждение 1 – опровергнуто.

5). Пусть основной (т.е. наименьший) период функций $f(x)$ равен 2 и такой же основной период у функции $g(x)$.

Обязательно ли:

1) ***у суммы этих функций будет существовать основной период,*** **и**

2) ***обязательно ли этот основной период будет тоже равен 2?***

Ответ: Нет, не обязательно. Самый простой пример – взять $g(x) = -f(x)$.

Существуют и более интересные примеры:

а). Пусть $f(x) = \mathbf{1}$, при всех целых четных значениях аргумента и $f(x) = \mathbf{0}$ для всех остальных действительных x. Пусть $g(x) = f(x+1)$, т.е. $g(x) = \mathbf{1}$ при всех целых нечетных x. Каждая из них имеет основной период 2, но у их суммы период равен 1.

б). Пусть $f(x) = \mathbf{1}$, при всех нецелых x = **k/n**, **n** – фиксированное целое, **k** принимает любые целые значения,

$g(x) = \mathbf{1}$, для всех целочисленных x, $g(x) = \mathbf{0}$, $f(x) = \mathbf{0}$ для всех остальных действительных x.

Тогда обе функции имеют период **1**, а их сумма имеет период **1/n**.

в). Если в предыдущем примере положить $f(x) = \mathbf{1}$ для всех нецелых рациональных ***x***, то в сумме получим функцию Дирихле, у которой нет основного периода.

6). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные на множестве всех действительных чисел периодические функции, не равные константе ни на каком интервале, основные периоды которых равны двум и шести, соответственно.

Что можно сказать о наименьшем периоде их суммы? Обязательно ли он равен шести?

Ответ: Нет, не обязательно.

Решение: Пусть f_2 и f_3 такие периодические функции, что основные периоды их – 2 и 3 соответственно, а их сумма: $f_6 = f_2 + f_3$ – периодическая функция с основным периодом 6. Такие функции, очевидно, существуют, например, $\sin \pi x$ и $\sin \frac{2}{3}\pi x$.

Но тогда сумма функций $f_6 + (-f_2)$ имеет основной период 3.

Заблуждение 2 – опровергнуто.

Разберем теперь более подробно такое важное понятие, как **наименьший (или основной) период**. Во многих приведенных выше примерах рассматривались функции, разрывные во всех точках своей области определения. Оказывается – это не случайно.

Рассмотрим периодическую функцию f, определенную на множестве действительных чисел.

Утверждение. Если периодическая функция f не имеет наименьшего положительного периода, и непрерывна хотя бы в одной точке x_0, то f – **const.**

Доказательство.

Функция f не имеет наименьшего (или основного) периода, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T, 0 < T < \varepsilon$, что для всех x, $f(x+T) = f(x)$. (*)

Так как функция непрерывна в точке x_0, то $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, такое, что колебание $\omega(f, O(x_0, \delta)) < \varepsilon$.

Тогда, в силу (*) существует некоторый период T_ε, $0 < T_\varepsilon < \delta$.

Рассмотрим произвольную точку x_1, считая, для определенности, что $x_0 < x_1$.

Существует натуральное n, такое, что $x_0 + nT_\varepsilon \le x_1 \le x_0 + (n+1)\cdot T_\varepsilon$.

Значит $x_0 \le x_1 - nT_\varepsilon \le x_0 + T_\varepsilon$ и $x_1 - nT_\varepsilon \in O(x_0, \delta)$.

Теперь:

$$|f(x_0) - f(x_1)| = |f(x_0) - f(x_1 - nT_\varepsilon)| \le \varepsilon .$$

В силу произвольности ε получаем, что $f(x_0) = f(x_1)$, т.е. f = **const.**

Следствие 1. Доказанное утверждение можно переформулировать так: **Периодическая, не равная константе функция, непрерывная хотя бы в одной точке, имеет наименьший положительный период.**

Такое утверждение, правда, без доказательства, упоминается в [5].

В заключение следует сказать, что хотя требование непрерывности спасло утверждение о существовании наименьшего периода, это совсем не означает, что непрерывность спасет другие из приведенных утверждений, превратив их из ошибочных в истинные. Многие из приведенных выше примеров построены на основе разрывных функций только для простоты изложения.

Список литературы

1. *Зорин И.В.* О периодических функциях. Занимательно и поучительно // Живая Математика. № 1. Пермь, 2008.
2. *Математический* энциклопедический словарь. М: Советская энциклопедия, 1988.
3. *Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.* Алгебра и математический анализ. 10 кл.: учебник для углубленного изучения математики в общеобразовательных учреждениях. М.: Мнемозина, 2006.
4. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И.* Задачи по математике. Начала анализа: справ. пособие. М: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1990.
5. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
6. URL: http//ru.wikipedia.org/wiki/Периодическая _функция (дата обращения: 26.09.2018).

Mathematical misconceptions about periodic functions

I. V. Zorin
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
Igor.v.zorin@gmail.com, 8 (342) 2 396 345

The properties of periodic functions of a real argument are considered. A number of counterexamples are cited, which refute the common misconceptions about the properties of periodic functions. The proof of the theorem on the existence of the smallest period of a function in the presence of its continuity is given.

Keywords: *periodic function; continuity of function; counterexample.*