ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Математика. Механика. Информатика Вып. 4(43)

УДК 531.01:004.94

Эффективное разложение матрицы масс системы многих тел с разветвленной древовидной структурой взаимосвязей

В. А. Шимановский
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, Пермь, ул.Букирева, 15
vlshim@psu.ru; +7 (342) 239-65-60

В статье описывается алгоритм факторизации матрицы масс, использующий ее разреженность, вызванную ветвлением древовидной кинематической структуры системы многих тел. В ней также представлены формулы, которые позволяют оценить вычислительные затраты на факторизацию матрицы масс в зависимости от топологии системы тел. Эти формулы демонстрируют, что вычислительная трудоемкость решения прямой задачи динамики для системы тел с разветвленной кинематической структурой может быть значительно меньше, чем для неразветвленной того же размера. Приведены примеры типов кинематических структур систем тел, для которых асимптотическая оценка вычислительной трудоемкости факторизации матрицы масс меньше $O(n^3)$.

Ключевые слова: *динамика системы многих тел; матрица масс; разложение разреженной матрицы.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-4-37-44

Введение

Компьютерное моделирование динамики механических систем широко используется в современной инженерной практике [1–3]. Оно позволяет существенно уменьшить объем натурных испытаний и в конечном счете сократить время и стоимость новых разработок. Требование точности компьютерного моделирования ведет к возрастанию сложности математических моделей технических систем. Но параллельно с ростом размерности математической модели увеличивается и трудоемкость моделирования. Это отражается в серьезном росте времени, которое затрачивается на стадии оптимизации параметров проектируемой конструкции и исследовании ее поведения при различных условиях эксплуатации. Поэтому разработка методов, позволяющих ускорить процесс математического моделирования сложных технических систем, является актуальной задачей.

© Шимановский В. А., 2018

Часто математическая модель технического устройства может быть описана как система связанных абсолютно твердых тел. Одним из самых популярных способов учета связей между телами является предложенный Лагранжем метод независимых параметров (обобщенных координат). В этом случае уравнение движения системы твердых тел со структурой дерева имеет вид

$$\mathbf{M}(q)\,\ddot{q} = \mathbf{Q}(q, \dot{q}, t), \qquad (1)$$

где $\mathbf{M}$ — матрица масс системы; $\mathbf{Q}$ — вектор обобщенных активных сил и сил инерции; q — вектор обобщенных координат системы. Это матричное уравнение представляет собой n скалярных линейных уравнений относительно n неизвестных (обобщенных скоростей $\ddot{q}$), где n — число обобщенных координат. В общем случае число арифметических операций (*вычислительная трудоемкость*) для вычисления $\mathbf{M}$ и $\mathbf{Q}$ равно $O(n^2)$ и $O(n)$, соответственно, а трудоемкость решения уравнения (1) —

$O(n^3)$. Таким образом, общая вычислительная сложность решения прямой задачи динамики системы тел равна $O(n^3)$.

Если кинематическая структура системы тел содержит ветви, то некоторые элементы матрицы масс автоматически будут равны нулю. Число таких нулей может составлять большую долю от общего числа элементов матрицы. Точное число нулевых элементов в матрице масс зависит только от топологии системы тел, а их расположение — от топологии и схемы нумерации (которая определяет порядок, в котором обобщенные координаты появляются в векторе q).

Разреженность матрицы масс оказывает сильное влияние на эффективность алгоритмов решения прямой задачи динамики. Если значительная часть элементов матрицы масс равна нулю, то для вычисления ненулевых элементов требуется меньшее число арифметических операций и, возможно, меньшее число операций для разложения матрицы на треугольные множители.

Нули в матрице масс могут появляться по четырем причинам:

1. случайные обнуления в определенных конфигурациях;
2. особенные значения инерциальных параметров;
3. особенные значения кинематических параметров;
4. наличие ветвления в кинематической структуре.

Нули в первой категории являются временными, в то время как в трех остальных — постоянными. Нули во второй и третьей категориях желанны из-за их способности упростить решение задач динамики, и их присутствие обычно является результатом продуманной стратегии моделирования. Нули в четвертой категории являются предметом рассмотрения данной статьи. Они могут быть очень многочисленными и составлять большую часть всех элементов матрицы масс.

В дальнейшем будем предполагать, что исследуемая система тел описывается обычными инерциальными и кинематическими параметрами, и в данный момент времени находится в произвольной конфигурации. Это исключает все нули, кроме вызванных ветвлением кинематической структуры системы. Поэтому будем использовать термин „ноль“ для обозначения элементов матрицы масс системы, которые являются нулями, вызванными ветвлением, и термин „ненулевой“ для обозначения всех остальных элементов.

1. Алгоритм разложения

Рассмотрим систему твердых тел со структурой дерева. Пусть N — число тел в системе. Тогда соединений между телами (*шарниров*) также будет N. Пронумеруем тела и шарниры системы таким образом, чтобы для любого тела в графе системы номер предшествующего ему (родительского) тела был меньше, а шарниру, связывающему i-е тело с предшествующим, присвоим номер i. Такая нумерация называется *правильной* [4].

Для полного описания структуры взаимосвязей системы со структурой дерева достаточно одного целочисленного массива p длины N, на i-м месте которого расположен номер тела, предшествующего i-му. Этот массив в дальнейшем будем называть *массивом родителей*. Правильная нумерация гарантирует, что массив p обладает следующим важным свойством:

$$\forall i, \quad 0 \leqslant p(i) < i. \tag{2}$$

В частном случае неразветвленной системы тел (цепочки тел) $p(i) = i - 1$.

В качестве примера, рассмотрим систему твердых тел, которую назовем Tree-1. Кинематическая схема этой системы изображена на рис. 1.

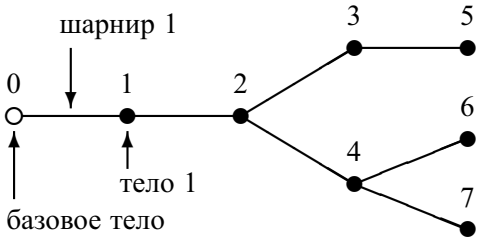

Рис. 1. *Граф связности системы тел*

Массив родителей для системы Tree-1 будет иметь следующий вид: $p = (0, 1, 2, 2, 3, 4, 4)$.

Если в системе тел со структурой дерева число шарниров всегда совпадает с числом тел, то общее число обобщенных координат может быть больше, так как отдельные шарниры могут иметь более одной степени подвижности. Пусть n_i — число независимых координат, однозначно определяющих движение в шарнире с номером i, тогда общее число

обобщенных координат определяется формулой $n = \sum_{i=1}^{N} n_i$. Векторы обобщенных ускорений и обобщенных сил для всей системы будут n-мерными векторами, а матрица масс системы $n \times n$ матрицей.

Если система тел содержит шарниры с несколькими степенями свободы, то необходимо построить расширенный массив родителей. Это связано с тем, что этот массив является одним из входных для алгоритма разложения, и должен иметь согласованный размер с факторизуемой матрицей. Расширенный массив родителей получается из расширенного графа связности системы тел, который получается следующим образом:

- каждый шарнир i у которого $n_i > 1$, заменяем на цепочку из $n_i - 1$ тел и n_i шарниров;
- последовательно нумеруем эти дополнительные тела и шарниры, начиная с i, а номера тел и шарниров, начинавшихся с i, увеличиваем на $n_i - 1$.

Пусть в системе тел Tree-1, шарниры 3 и 6 имеют по две степени свободы, а остальные шарниры одностепенные. Процесс построения расширенного графа связности этой системы и новая схема нумерации тел и шарниров изображены на рис. 2.

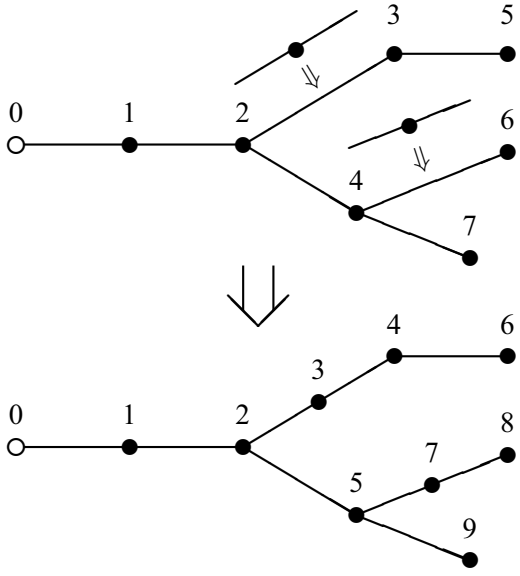

Рис. 2. *Расширение графа связности для учета многостепенных шарниров в системе тел*

Для системы тел Tree-1 матрица масс будет матрицей 9×9, а расширенный массив родителей примет вид $p = (0, 1, 2, 3, 2, 4, 5, 7, 5)$.

Согласно методу составных тел, матрица масс системы твердых тел вычисляется по следующей формуле [5]:

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{cases} A_i^{\mathrm{T}} I_i^* C_{ij} A_j, & j \in P_i, \\ A_i^{\mathrm{T}} C_{ji}^{\mathrm{T}} I_j^* A_j, & i \in P_j, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad (3)$$

где A_i — матрица локального касательного базиса [7] относительного движения в шарнире с номером i; P_i — упорядоченное множество номеров шарниров, составляющих путь между нулевым и i-м телами; C_{ij} — матрица преобразования координат 6-мерных векторов из системы координат j-го тела в систему координат i-го тела; I_i^* — матрица инерции составного тела, включающего в себя i-е тело и все тела, для которых оно является предком.

Уравнение (3) дает общую формулу для шаблона разреженности матрицы масс $\mathbf{M}$, вызванную ветвлением кинематической структуры системы тел:

$$i \notin P_j \wedge j \notin P_i \Rightarrow \mathbf{M}_{ij} = 0. \qquad (4)$$

Иначе говоря, $\mathbf{M}_{ij} = 0$, если тела i и j расположены на разных ветках кинематического дерева.

Вернемся к системе тел Tree-1. Матрица масс этой механической системы будет 9×9 матрицей со следующим шаблоном разреженности:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & & \times & & & \\ \times & \times & & & \times & & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & & \times & & & \\ \times & \times & & & \times & & \times & \times & \\ \times & \times & & & \times & & \times & \times & \\ \times & \times & & & \times & & & & \times \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где символом „$\times$“ отмечены ненулевые элементы матрицы и пробелом — нулевые.

Если раскладывать матрицу масс $\mathbf{M}$ в произведение $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}$ или $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{U}$ (стандартный метод Холецкого и UTDU-разложение, соответственно), то результирующие треугольные множители будут плотными. Однако если вместо этого матрицу масс $\mathbf{M}$ разложить на $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ или $\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ (UUT- и UDUT-разложения, соответственно), то разложение происходит без заполнения исходной матрицы, и треугольный множитель $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ является максимально разреженным для нее [6].

Для любых $n \times n$ симметричной, положительно определенной матрицы $\mathbf{M}$ и n-элементного массива p, таких что, $\mathbf{M}$ удовлетворяет условиям (4), а p удовлетворяет условиям (2), следующий алгоритм будет выполнять UDUT-разложение матрицы $\mathbf{M}$ согласно ее шаблону разреженности.

Алгоритм 1. *Разреженное UDUT-разложение*

```
1  for k = n to 1 do
2      j = p(k)
3      while j > 0 do
4          t = M_jk / M_kk
5          i = j
6          while i > 0 do
7              M_ij = M_ij − M_ik · t
8              i = p(i)
9          end
10         M_jk = t
11         j = p(j)
12     end
13 end
```

Этот алгоритм вычисляет верхнюю унитреугольную матрицу $\mathbf{U}$ и диагональную матрицу $\mathbf{D}$ и записывает их в верхний треугольник матрицы $\mathbf{M}$.

Представленный алгоритм отличается от стандартного алгоритма Холецкого тем, что в нем не вычисляются квадратные корни от диагональных элементов, внешний цикл (по k) работает в обратном направлении от n до 1, а внутренние циклы перебирают только предков k, т. е. $p(k)$, $p(p(k))$ и т. д. до корня. Отказ от извлечения квадратных корней и обращение внешнего цикла заставляет алгоритм находить разложение $\mathbf{UDU}^{\mathrm{T}}$ вместо классического $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}$, а поведение внутренних циклов использует разреженность матрицы.

Рассмотрим, что происходит, когда этот алгоритм применяется к матрице масс системы Tree-1, которая имеет шаблон разреженности (5). Начиная с $k = 9$, внутренние циклы перебирают только три значения: 5, 2 и 1 ($p(9) = 5$, $p(5) = 2$, $p(2) = 1$, $p(1) = 0$). Таким образом, на первом шаге алгоритм вычисляет четыре элемента ($\mathbf{M}_{99}$, $\mathbf{M}_{59}$, $\mathbf{M}_{29}$, $\mathbf{M}_{19}$) и модифицирует шесть элементов ($\mathbf{M}_{55}$, $\mathbf{M}_{25}$, $\mathbf{M}_{22}$, $\mathbf{M}_{15}$, $\mathbf{M}_{12}$, $\mathbf{M}_{11}$). Обычный LTDL-алгоритм в то же время вычислил бы 9 элементов и модифицировал 36.

По сути, алгоритм выполняет версию UDUT-разложения матрицы, в которой пропускаются все элементы, которые, как известно, равны нулю в исходной матрице, и тем самым пропускаются операции, содержащие умножение на ноль. Эта стратегия работает, потому что процесс разложения сохраняет шаблон разреженности матрицы: любой элемент, бывший нулем в начале, остается нулевым на протяжении всего процесса разложения.

Докажем это свойство алгоритма методом индукции. Во-первых, предположим, что строки от $k + 1$ до n уже обработаны, и что в результате этой обработки еще не произошло заполнения. Таким образом, шаблон нулей остается таким же, как и в исходной матрице. Во-вторых, так как заполнение элементов k-й строки в результате выполнения двух внешних циклов невозможно, сосредоточимся на рассмотрении внутреннего цикла. В этом цикле модифицируются элементы $\mathbf{M}_{ij}$, для которых $\mathbf{M}_{ik}\mathbf{M}_{jk} \neq 0$. Однако это выражение может быть отлично от нуля только в том случае, когда i и j являются предками k. Это, в свою очередь, означает, что либо $i \in P_j$, либо $j \in P_i$, что является условием отличия от нуля $\mathbf{M}_{ij}$. Таким образом, при обработке строки k заполнения не происходит.

Полученное разложение является оптимальным. Шаблон разреженности треугольного множителя $\mathbf{U}$ описывается условием

$$i \notin P_j \Rightarrow \mathbf{U}_{ij} = 0, \tag{6}$$

и этот шаблон для системы Tree-1 имеет вид

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & & \times & & & \\ & & & \times & & \times & & & \\ & & & & \times & & \times & \times & \times \\ & & & & & \times & & & \\ & & & & & & \times & \times & \\ & & & & & & & \times & \\ & & & & & & & & \times \end{pmatrix}.$$

После получения разложения матрицы масс $\mathbf{M} = \mathbf{UDU}^{\mathrm{T}}$ для решения системы уравнений (1) необходимо выполнить *прямую подстановку* (т. е. решить систему уравнений $\mathbf{UD}w = \mathbf{Q}$) и затем *обратную подстановку* (т. е. решить систему уравнений $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\ddot{q} = w$).

Если матрица $\mathbf{U}$ удовлетворяет условиям (6), а массив p условиям (2), то следующие алгоритмы выполняют прямую и обратную подстановку с учетом шаблона разреженности матрицы $\mathbf{U}$.

Алгоритм 2. *Разреженная прямая подстановка*

```
for j = n to 1 do
    i = p(j)
    while i > 0 do
        Q_i = Q_i − M_ij · Q_j
        i = p(i)
    end
    Q_j = Q_j / M_jj
end
```

Алгоритм 3. *Разреженная обратная подстановка*

```
for j = 1 to n do
    i = p(j)
    while i > 0 do
        Q_j = Q_j − M_ij · Q_i
        i = p(i)
    end
end
```

Эти алгоритмы заменяют вектор $\mathbf{Q}$ на решение системы (1).

2. Анализ затрат на разложение

Определим число арифметических операций, необходимых для разложения матрицы масс системы твердых тел на треугольные множители, с учетом ее шаблона разреженности (4).

Пусть η_i — удаление вершины i от корня в расширенном графе связности системы тел, равное числу промежуточных дуг. Правильная нумерация гарантирует, что

$$1 \leqslant \eta_i \leqslant i. \tag{7}$$

Числа η_i равны количеству ненулевых элементов в i-м столбце матрицы $\mathbf{U}$.

В представленном алгоритме на k-м шаге разложения требуется $\eta_k - 1$ операций деления и по $\eta_k(\eta_k - 1)/2$ операций умножения и вычитания.

Введем следующие величины

$$\mathcal{N}_1 = \sum_{i=1}^{n} (\eta_i - 1) \tag{8}$$

и

$$\mathcal{N}_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_i(\eta_i - 1)}{2}. \tag{9}$$

Величина $\mathcal{N}_1$ равна общему числу операций деления, выполняемых алгоритмом разложения. Кроме того, она равна числу ненулевых элементов, расположенных ниже главной диагонали в матрице масс системы тел. Величина $\mathcal{N}_2$ равна общему числу операций модификации элементов матрицы масс, каждая из которых включает в себя одно умножение и одно вычитание. Таким образом, общее число арифметических операций, необходимых для разложения матрицы масс на треугольные множители с учетом ее шаблона разреженности равно

$$\mathcal{N}_1 div + \mathcal{N}_2(mul + add),$$

где символы div, mul и add обозначают операции деления, умножения и сложения (или вычитания), соответственно.

В таблице 1 представлены вычислительные затраты на разложение, прямую и обратную подстановку для UUT- и UDUT-алгоритмов. Нетрудно видеть, что UDUT-алгоритм несколько эффективнее UUT-алгоритма, так как не требует дополнительно n операций извлечения корней (sqr) в процессе разложения и n операций деления при подстановках.

Если в равенства (8) и (9) подставить условие (7), то величины $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ могут быть оценены следующим образом:

$$0 \leqslant \mathcal{N}_1 \leqslant \frac{n^2 - n}{2} \tag{10}$$

и

$$0 \leqslant \mathcal{N}_2 \leqslant \frac{n^3 - n}{6}. \tag{11}$$

Таким образом, асимптотическая оценка вычислительной трудоемкости разложения лежит между $O(1)$ и $O(n^3)$, а асимптотическая оценка вычислительной трудоемкости подстановок — между $O(n)$ и $O(n^2)$.

Нижняя оценка возникает, когда каждое тело системы соединено с корнем (т. е. $\eta_i = 1$). В этом случае матрица масс является диагональной. Хотя UDUT-разложение теоретически может выполняться без каких-либо вычислительных затрат, но рассматриваемый алгоритм содержит цикл, который будет выполнять итерации по всем n столбцам, и, следовательно, выполнять $O(n)$ инструкций.

Верхняя оценка возникает, когда кинематическая структура системы не имеет ветвей (т. е. $\eta_i = i$). В этом случае матрица масс является плотной, и вычислительные затраты те же, что и в стандартном UDUT-разложении. Тем не менее, во внутренних циклах представленного алгоритма есть небольшие накладные расходы, связанные с вычислением $i = p(i)$ и

Таблица 1. *Вычислительные затраты для разреженных UUT- и UDUT-алгоритмов*

	UUT	UDUT
Разложение	$n\,sqr + \mathcal{N}_1\,div + \mathcal{N}_2\,(mul + add)$	$\mathcal{N}_1\,div + \mathcal{N}_2\,(mul + add)$
Прямая подстановка	$n\,div + \mathcal{N}_1\,(mul + add)$	$n\,div + \mathcal{N}_1\,(mul + add)$
Обратная подстановка	$n\,div + \mathcal{N}_1\,(mul + add)$	$\mathcal{N}_1\,(mul + add)$

проверкой условия $i > 0$, что отнимает больше времени, чем просто уменьшение переменной цикла.

Большое влияние на вычислительную трудоемкость оказывает глубина графа-дерева, описывающего кинематическую структуру системы тел. Если d является глубиной дерева, т. е. $\eta_i \leqslant d$, то величины $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ можно оценить как

$$0 \leqslant \mathcal{N}_1 \leqslant n(d-1) \tag{12}$$

и

$$0 \leqslant \mathcal{N}_2 \leqslant \frac{n\,d(d-1)}{2}. \tag{13}$$

Тогда асимптотическими оценками вычислительных затрат будут $O(nd^2)$ для разложения матрицы и $O(nd)$ для прямой и обратной подстановок.

Помимо точных формул, представленных в табл. 1, для оценки вычислительной трудоемкости разреженных алгоритмов разложения и подстановки можно предложить следующее эмпирическое правило. Пусть число α дает оценку плотности факторизуемой матрицы, т. е. отношения числа ненулевых элементов к общему числу элементов в матрице. Тогда вычислительные затраты на разреженное разложение и подстановку будут составлять примерно долю в α^2 и α от вычислительных затрат соответствующих плотных алгоритмов. Так, если в матрице масс 50 % элементов нулевые, то разреженное разложение будет в четыре раза быстрее плотного разложения.

3. Примеры

Сравним вычислительные трудоемкости представленных алгоритмов решения системы уравнений (1) для систем твердых тел с тремя различными кинематическими структурами: неразветвленное дерево (цепь), сбалансированное бинарное дерево и остовное дерево для квадратной решетки. Графы связности последних двух изображены на рис. 3.

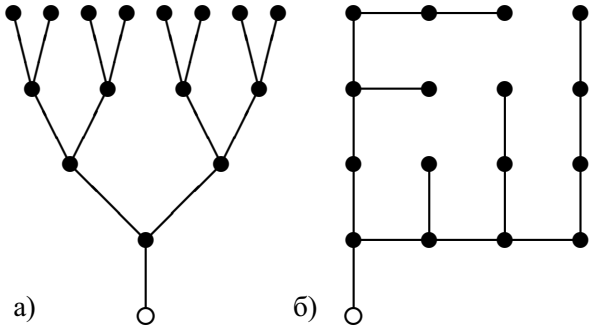

Рис. 3. *Графы связности систем твердых тел: а) сбалансированное бинарное дерево; б) остовное дерево для квадратной решетки*

В табл. 2 приведены формулы для вычисления величин $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ и n в зависимости от параметра m. В формулах для цепочки тел параметр m непосредственно соответствует количеству тел, для бинарного дерева этот параметр равен глубине дерева, а для квадратной решетки — числу вершин на сторонах решетки.

На рис. 4 приведены графики вычислительной трудоемкости разложения матрицы масс на треугольные множители в зависимости от ее порядка n для систем тел с кинематической структурой цепочки, бинарного дерева и квадратной решетки. Вычислительную трудоемкость будем измерять количеством арифметических операций, т. е. $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + 2\mathcal{N}_2$.

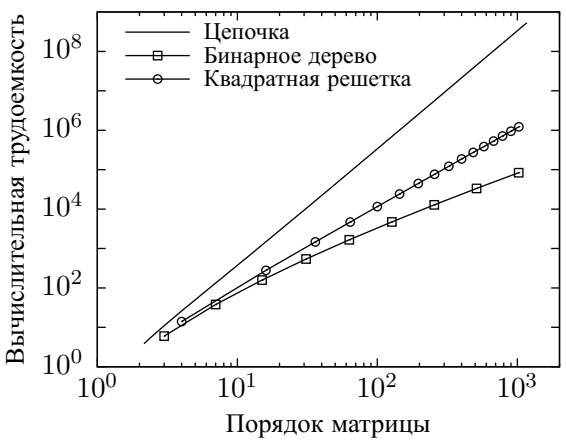

Рис. 4. *Сравнение вычислительной трудоемкости UDUT-разложения для систем из табл. 2*

Таблица 2. *Формулы для $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ для систем с различной кинематической структурой*

Структура	n	$\mathcal{N}_1$	$\mathcal{N}_2$	Порядок
Цепочка	m	$\dfrac{m^2-m}{2}$	$\dfrac{m^3-m}{6}$	n^3
Бинарное дерево	2^m-1	$\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} i\cdot 2^i$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} i(i+1)\cdot 2^{i-1}$	$n\log^2 n$
Квадратная решетка	m^2	m^3-m^2	$\dfrac{7m^4-6m^3-m^2}{12}$	n^2

В неразветвленном дереве для i-й вершины $\eta_i = i$ ($i = 1, \ldots, n$). В этом случае матрица масс будет плотной и трудоемкость представленных в статье алгоритмов будет равна трудоемкости соответствующих стандартных алгоритмов, т. е. $\mathcal{N}_1 \sim O(n^2)$, а $\mathcal{N}_2 \sim O(n^3)$.

В сбалансированном бинарном дереве, состоящем из $n = 2^m - 1$ вершин, есть 2^{k-1} вершин для которых $\eta_i = k$ ($k = 1, \ldots, m$). Таким образом, $\mathcal{N}_1 \sim O(m\,n)$, а $\mathcal{N}_2 \sim O(m^2\,n)$, где $m \simeq \log_2 n$. По сравнению с вычислительными затратами на факторизацию плотной матрицы, вычислительные затраты на факторизацию матрицы масс сбалансированного бинарного дерева в 7,75 раз меньше при $n = 15$ и в 434 раз меньше для $n = 255$.

На рис. 3, б показана одна из нескольких возможных схем остовного дерева для квадратной решетки. Формулы в табл. 2 справедливы для всех остовных деревьев при условии, что они соединяют каждый узел решетки с корнем по пути минимальной длины. Для таких деревьев из $n = m^2$ вершин $\eta_i = k$ для $m - |k - m|$ вершин ($k = 1, \ldots, 2m - 1$). В этом случае, $\mathcal{N}_1 \sim O(n^{3/2})$, а $\mathcal{N}_2 \sim O(n^2)$. По сравнению с вычислительными затратами на факторизацию плотной матрицы, вычислительные затраты на факторизацию матрицы масс этих видов деревьев в 5,29 раз меньше при $n = 16$ и в 73,9 раз меньше для $n = 256$.

Проверим эмпирическое правило оценки эффективности алгоритма разреженного UDUT-разложения. Плотность матрицы масс может быть вычислена по формуле

$$\alpha = \frac{n + 2\mathcal{N}_1}{n^2}.$$

Для бинарного дерева при $n = 15$ $\alpha \approx 0{,}37$, т. е. в матрице масс только 37 % ненулевых элементов. В этом случае разреженный алгоритм разложения по эмпирической оценке будет в $1/\alpha^2 \approx 7{,}3$ раз эффективнее стандартного алгоритма. Аналогично, для квадратной решетки при $n = 16$ $\alpha \approx 0{,}44$, и по эмпирической оценке разреженный алгоритм будет эффективнее в 5,2 раза. Нетрудно видеть, что эмпирическая оценка близка к точной.

Заключение

В статье представлены алгоритмы симметричного разложения, прямой и обратной подстановок, которые полностью используют разреженность матрицы масс, вызванную ветвлением кинематической структуры системы тел. Эти алгоритмы легко реализуются, и несмотря на то, что требуют некоторых дополнительных издержек, могут значительно сократить вычислительные затраты на разложение матрицы масс. Вычислительная трудоемкость алгоритмов зависит от количества ненулевых элементов, а не от размера матрицы масс. Приведены примеры систем тел, различающиеся типом кинематической структуры, с вычислительными затратами от $O(n\log^2 n)$ до $O(n^3)$.

Список литературы

1. *Гаврилов С. В., Коноплёв В. А.* Компьютерные технологии исследования многозвенных мехатронных систем. СПб.: Наука, 2004.
2. *Горобцов А. С., Карцов С. К., Плетнёв А. Е., Поляков Ю. А.* Компьютерные методы построения и исследования математических моделей динамики конструкций автомобилей. М.: Машиностроение, 2011.
3. *Дмитриев В. М., Шутенков А. В., Зайченко Т. Н., Ганджа Т. В.* МАРС — среда моде-

лирования технических устройств и систем. Томск: В-Спектр, 2011.
4. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980.
5. *Иванов В. Н., Шимановский В. А., Домбровский И. В., Набоков Ф. В., Шевелёв Н. А.* Классификация моделей систем твердых тел, используемых в численных расчетах динамического поведения машиностроительных конструкций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 2. С. 139–155.
6. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984.
7. *Величенко В. В.* Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. М.: Наука, 1988.

Efficient Factorization Inertia Matrix for Branched Interconnection Structure of Multibody System

V. A. Shimanovskiy
Perm State University, Russia, 614990, Perm, Bukireva st., 15
vlshim@psu.ru; +7 (342) 239-65-60

The article describes the factorization algorithm that exploit branch-induced sparsity in the inertia matrix of multibody system with tree interconnection structure. It also presents formulas that show how the cost of factorizing the inertia matrix vary with the topology of the tree. These formulas show that the cost of calculating forward dynamics for a branched tree can be considerably less than the cost for an unbranched tree of the same size. Presented some examples of kinematic trees for which the complexity of factorizing the inertia matrix are less than $O(n^3)$.

Key words: *multibody system dynamics; inertia matrix; sparse matrix factorization.*