ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Математика. Механика. Информатика Вып. 4(43)

УДК 519.6; 519.2

# О вероятностном подходе к доказательству сходимости к циклу сиракузской последовательности

**В. Л. Чечулин**
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
chechulinvl@mail.ru; 8 (342) 2-396-424

Описан вариант вероятностного подхода к доказательству сходимости сиракузской последовательности к циклу (1, 2, 4), использующий вероятностную оценку возможного роста и уменьшения членов последовательности. Указаны аналогии вероятного подхода в обосновании разрешимости для некоторых иных задач.

**Ключевые слова:** *сиракузская последовательность; сходимость и ограниченность сиракузской последовательности; гипотеза Коллатца; доказательство гипотезы Коллатца; вероятностные методы.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-4-11-15

## Предисловие

Вероятностные методы описания как более обобщенные дополняют собой методы детерминистские (алгоритмические), причем интересно, что результат использования вероятностного и алгоритмического подхода иногда одинаков[1], но иногда имеются детерминистские (алгоритмические) задачи, разрешение которых детерминистскими (алгоритмическими) методами не представляется с ходу возможным, как например задача об ограниченности (сходимости) т. н. *сиракузской последовательности*, которая исследована в статье посредством вероятностного подхода.

## 1. Сиракузская последовательность

Так называемая сираку́зская после́довательность – это следующая последовательность чисел: взято любое натуральное число n, если оно четное, то поделено на 2, а если нечетное, то умножаемо на 3 и увеличено на 1 (получаем 3n + 1); над полученным числом выполняемы те же самые действия, и так далее [7, с. 405]. В первом приближении стоит вопрос об ограниченности этой последовательности. Более строгая формулировка математика Л. Коллатца (1932 г.), заключается в том, что какое бы начальное число n ни было бы взято, рано или поздно получится единица [7, с. 405], очевидно, что далее циклическим образом будут повторяемы числа 4, 2, 1 (см. также [8]), т. е. частичным пределом[2] сиракузской последовательности является цикл 4, 2, 1. Известны подходы к решению указанного вопроса, использующие теорию функций [11], [12], но таковые рассуждения весьма сложны.

Целесообразным представляется использование более простых подходов к рассмотрению сиракузской последовательности.

## 2. Вероятностное рассмотрение последовательности

Вероятностный способ рассмотрения сиракузской последовательности заключается в следующем. Для всего натурального ряда чисел при выборе любого числа n из нату-



[1] Как, например, результат вывода уравнения экономического равновесия вероятностным способом (из соображений теории информации) и с использованием алгоритмической сложности процессов экономического обмена, см. подробнее [10, с. 44–51].

[2] Частичным пределом в смысле теории чисел в виде повторяемости указанного цикла (4, 2, 1), а не в смысле предела в теории функций и матанализа.

рального ряда **N** по закону больших чисел вероятность четного числа равна ½ и вероятность нечетного числа равна ½. Если же выбранное число n делится на 2, то для n/2 вероятность того, что n/2 четное – ½, нечетное – ½; и т. д. Соответственно, учитывая условные вероятности, вероятность того, что n четное и n/2 четное – ½ · ½.

Зная, таким образом, для натурального ряда вероятности результатов последовательного деления на 2 (вероятности четного или нечетного результата), оцениваемо, с одной стороны среднее уменьшение выбранного числа n (при четных результатах деления), с другой стороны – среднее увеличение результата деления (если он нечетен),– путем умножения величин (увеличения или уменьшения числа) на вероятности (увеличения или уменьшения).

То есть сравниваются величины двух числовых рядов, соответствующих вероятному уменьшению или увеличению членов сиракузской последовательности, – увеличении, отнесенное к числу n[3]:

$$A = (1/2 \cdot 2) + (1/2 \cdot 1/2) \cdot 4 + (1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2) \cdot 8 + (1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2) \cdot 16 + \ldots \quad (1)$$

$$B = 1/2 \cdot (3 + 1/n) + 1/2 \cdot 1/2 \cdot (3 + 1/n) \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot (3 + 1/n) \cdot 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot (3 + 1/n) \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 + \ldots \quad (2)$$

Ряд (1) описывает оценку среднего относительного уменьшения выбранного числа n; в первом члене ряда, (1/2 · 2), 1/2 – это вероятность того, что число n четное, а 2 – это относительное уменьшение четного числа n при делении на 2.

Во втором члене ряда (1), (1/2 · 1/2) · 4, первая 1/2 – это вероятность того, что число n четное, вторая – это вероятность того, что при делении n на 2 результат n/2 четен, 4 = 2 · 2 – это относительное уменьшение (дважды) четного числа n при делении на 2 и еще раз на 2; (1/2 · 1/2)= 1/4 – вероятность того, что число делится на 4 (вычисляемое как условная вероятность, вероятность того, что n четно равна 1/2, и того что n/2 четно – 1/2, но при условии, что n является четным, поэтому вероятности перемножаются); и так далее по членам ряда (1).

Ряд (2) описывает оценку среднего относительного увеличения выбранного числа n; в первом члене ряда, 1/2 · (3 + 1/n), 1/2 – это вероятность того, что число n нечетное, а (3 + 1/n) – это относительное увеличение нечетного числа n при умножении его на (3 + 1/n). (3 + 1/n) = (3 · n + 1)/n.

Во втором члене ряда (2), 1/2 · 1/2 · (3 + 1/n), первая 1/2 – это вероятность того, что число n четное, вторая – это вероятность того, что при делении n на 2 результат n/2 нечетен, (3 + 1/n) · 1/2 – это относительное увеличение четного n при делении на 2 и умножении на (3 + 1/n); (1/2 · 1/2) = 1/4 – вероятность того, что результат деления четного числа n нечетен (вычисляемое как условная вероятность, вероятность того, что n четно равна 1/2, и того, что n/2 нечетно – 1/2, но при условии, что n является четным, поэтому вероятности перемножаются); и так далее по членам ряда (2).

Ряды (1) и (2) являются расходящимися при увеличении количества членов ряда и n до бесконечности, однако их можно сравнить между собой, – очевидно, что одинаковые по счету члены ряда (1) больше соответствующих членов ряда (2) начиная со вторых членов.

$$(1/2 \cdot 2) < 1/2 \cdot (3 + 1/n) \quad (3)$$
$$(1/2 \cdot 1/2) \cdot 4 > 1/2 \cdot 1/2 \cdot (3 + 1/n) \cdot 1/2$$
$$(1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2) \cdot 8 > 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot (3 + 1/n) \cdot 1/2 \cdot 1/2$$

Таким образом, для членов рядов (1) и (2), начиная со второго, вероятное уменьшение произвольного числа n больше, чем его увеличение. Это означает, что сиракузская последовательность ограничена (не уходит в бесконечность). Доказано утверждение.

**Утверждение 1** (Об ограниченности сиракузской последовательности). Сиракузская последовательность ограничена. □

Рассмотрение членов рядов (1) и (2), см. последовательность неравенств (3), показывает, что при ограниченности сиракузской последовательности ею достигается частичный предел на шагах до вторых членов рядов (1) и (2). Поскольку по теореме 1 эта последовательность ограничена сверху, частичный предел до ограничения ищется снизу, при последовательном увеличении начального n от 1 и дальше.

Последовательности при разных n таковы:

n=1: 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1…
n=2: 2, 1, 4, 2, 1…
n=3: 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1…
n=4: 4, 2, 1, 4, 2, 1…

[3] То есть, вместо 2n в ряду стоит 2, вместо (3n+1) – (3+1/n).

n=5: 5, 16, 8, 4, 2, 1… (4)
n=6: 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1…
n=7: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1…
n=8: 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1…
n=9: 28, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1…
n=10: 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1…
…

Из приведенных примеров последовательностей (4) видно, что частичным пределом сиракузской последовательности является последовательность 1, 4, 2, 1, соответствующая при переходе от 1 к 4 первому члену ряда (2) (первому неравенству в (3)), при переходе от 4 к 2 – второму члену ряда (1) (второму неравенству в (3)), при переходе от 2 к 1 – первому члену ряда (1) (первому неравенству в (3)) и т. д. по циклу первых двух неравенств из (3), см. (5), не затрагивая правую часть второго неравенства (не затрагивая второй член ряда (2), – только первый член ряда (2) и первые два члена ряда (1)).

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{1\to 4} \\ (1/2 \cdot 2) < 1/2 \cdot (3 + 1/n) \\ 2\to 1\ \uparrow \qquad \swarrow\ 4\to 2 \\ (1/2 \cdot 1/2) \cdot 4 > 1/2 \cdot 1/2 \cdot (3 + 1/n) \cdot 1/2 \end{array} \tag{5}$$

Поскольку сиракузская последовательность по утверждению 1 ограничена, и как видно из (4), для всех натуральных чисел, отличающихся от 4, 2, 1, члены последовательности превышают начальный член или 4, то видно, что частичным пределом сиракузской последовательности является последовательность чисел 4, 2, 1. Очевидно также, что кроме чисел 4, 2, 1 никакие числа не соответствуют циклу (5), определяющему частичный предел этой последовательности, вытекающий из набора неравенств (3).

Набор неравенств (3) указывает, что со вторых членов рядов (1) и (2) и далее имеется вероятное уменьшение членов последовательности, до конечного цикла (5) для любого начального n из **N**.[4] То есть набор чисел 4, 2, 1 является единственным частичным пределом сиракузской последовательности для любого начального натурального n.

[4] В (3) и (5) указаны вероятностные оценки величины изменения членов сиракузской последовательности.

Доказано утверждение.

**Утверждение 2** (О частичном пределе сиракузской последовательности)[5]. Единственным частичным пределом сиракузской последовательности для любого исходного натурального числа n является цикл чисел 4, 2, 1. □

Таким образом, вероятностное рассмотрение сиракузской последовательности описано.

## 3. Обращение последовательности

Обращение сиракузской последовательности таково. Берется 1 и умножается на 2 до тех пор, пока результат умножения m станет таким, что (m–1) делится на 3, затем (m–1)/3 умножается на 2 до тех пор пока результат умножения m* станет таким, что (m*–1) делится на 3 и т. д.

Из утверждений 1 и 2 следует, что среди членов такой обращенной сиракузской последовательности должны встретиться все натуральные числа.

## 4. Дополнение. Аналогичные вероятностные рассуждения

Забавная и не имеющая практических приложений задача о сиракузской последовательности является, тем не менее, в образовательном смысле, достаточно простым показательным примером отличия детерминистских (алгоритмических) способов рассуждения (которыми эта задача не решаема) от вероятного подхода, который дает простое решение указанной задачи.

Имеются и другие задачи, которые при алгоритмической (детерминисткой) неразрешимости решаемы вероятностными методами. Одна из таких задач – это задача о плановой экономике, которая решается вероятностным способом следующим образом. Есть ожидаемые потребности (например, для домашнего хозяйства потребности в продуктах), которые учитываются по данным прошлых периодов, имеются запасы, и при неравномерном потреблении те или иные запасы пополняются, или планируется их необходимое производство (выращивание), и потребности по виду потребляемых ресурсов при недостатке запасов корректируются по факту наличия продуктов,

[5] Утверждение 2 доказывает так называемую гипотезу Коллатца.

– запасы необходимы для минимизации таких коррекций.

Ключевым моментом такой плановой экономики является наличие запасов, позволяющих сбалансировать неравномерность потребления / поступления продуктов. Наличие запасов одинаково необходимо для разномасштабных экономических субъектов (домашнего хозяйства, предприятия, страны). Задачи управления запасами хорошо известны, об оптимизации запасов для локальной торгующей организации, см. например [9]. Только при наличии запасов в действительной экономике сводимы межотраслевые планы[6] по типу моделей Леонтьева, поскольку точно заранее вычислить сколько какой продукции точно потребуется – невозможно, – и планы выполняются при некоторой переменчивости потребления за счет использования запасов и коррекции самих планов (при минимизации потерь ресурсов). Естественно, что в плановой экономике распределение ресурсов не является чисто монетарным (рыночным), и использует нормирование потребностей.

Так называемый "калькуляционный аргумент" выдвинутый Л. Мизесом в 1920-е гг. указывал [4], [5] что невозможно (алгоритмически) вычислить необходимые для производства товаров потребности в них. Также в модели Леонтьева предполагалось наличие известного конечного спроса на товары, по которому определялись необходимые материальные ресурсы, трудозатраты, а уж затем цены и заработная плата [1], [2], [3]. Эти задачи решаемы в действующей экономике вероятностно – учетом потребностей и предзаказом на товары. Здесь примера отличия вероятностного и детерминистского подхода к решению задач достаточно, подробнее см. специальную литературу по экономической теории, например [10].

## Заключение

Приведенное вероятностное рассмотрение сиракузкой последовательности является гораздо более простым, чем использование специальной теории функций [11], [12], поэтому применимо и в образовательном плане как способ вероятностных рассуждений об алгоритмах.

Выдвинутое в п. 4 предположение об обращении сиракузской последовательности особого прикладного смысла не имеет.

*(Автор благодарит В. Догонадзе за указание на гипотезу Коллатца).*

## Список литературы

1. *Леонтьев В.* Экспорт, импорт, внутренний выпуск и занятость // Экономика и математические методы. 2006. Т. 42, № 2. С. 32–44.
2. *Леонтьев В.* Заработная плата, прибыль и цены // Экономика и математические методы. 2006. Т. 42, № 2. С. 44–50.
3. *Леонтьев В.* Экономические эссе / пер. с англ. М.: Политиздат, 1990. 415 с.
4. *Мизес Л.* Социализм. Экономический и социологический анализ. М.: "Catallaxy", 1994. 416 с.
5. *Мизес Л.* Человеческая деятельность: Трактат по экономической теории. М.: Экономика, 2000. 878 с.
6. *Чечулин В.Л., Галанова Я.Ю.* Нахождение оптимального объема баковой аппаратуры // Чечулин В.Л. Ст. в журн. "Университетские исследования" 2009–2014 гг.: сб. [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 365–374.
7. *Стюарт Иэн.* Величайшие математические задачи. М.: "Альпина нон фикшн", 2015.
8. *Хэйес Брайан.* Взлеты и падения чиселградин // В мире науки: Scientific American (изд. на русск. яз.). 1984. № 3. Март. С. 102–107.
9. *Чечулин В.Л., Смыслов В.И.* Построение модели, описывающей дополнительные издержки торгующего экономического субъекта // Чечулин В.Л. Ст. в журн. "Университетские исследования" 2009–2014 гг.: сб. [Электронный ресурс]; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2015. С. 353–359.
10. *Чечулин В.Л., Черепанова Ю.А., Курыгин А.А.* Экономическое равновесие (структуры и модели): моногр. / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2018. 180 с.
11. *Berg L., Opfer G.* An Analytic Approach to the Collatz 3n+1 Problem for Negative Start Values // Computational Methods and Function Theory. 2013. August. Vol. 13, Issue 2, P. 225–236. URL: https://doi.org/10.1007/s40315-013-0017-z (дата обращения: 15.08.2018).
12. *Opfer G.* An analytic approach to the Collatz

[6] Наличие запасов необходимо также и на промежуточных стадиях производства, см. [6].

3n+1 problem // Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Preprint Nr. 2011–09 (2011). URL: http://preprint.math. uni-hamburg.de/public/papers/hbam/hbam 2011-09.pdf (дата обращения: 15.08.2018).

# On the probabilistic approach to the proof of convergence of the Syracuse sequence to a cycle

**V. L. Chechulin**
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
chechulinvl@mail.ru; 8 (342) 2-396-424

The paper describes a variant of the probabilistic approach to proving the convergence of the Syracuse sequence to the cycle (1, 2, 4) which uses a probabilistic estimate of the possible growth and decrease of the sequence members. Analogies of the probable approach in justification of solvability for some other problems are specified.

**Keywords:** *Syracuse sequence; convergence and limitation of the Syracuse sequence; Collatz conjecture; proof of the Collatz conjecture; probabilistic methods.*