МАТЕМАТИКА

УДК 517.972.4

О разрешимости квадратичных вариационных задач с линейными ограничениями

С. А. Гусаренко

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

sagusarenko@mail.ru; +79026393256

Рассматриваются вопросы разрешимости квадратичных вариационных задач с линейными ограничениями в пространстве абсолютно непрерывных функций. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задач, а также условия положительности линейных операторов и квадратичных форм.

Ключевые слова: *вариационные задачи; квадратичные экстремальные задачи; положительный оператор; квадратичная форма.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-4-5-10

1. Основные обозначения и определения

Известно, что через $\mathbb{R}^m$ обозначается m-мерное векторное пространство со скалярным произведением $(\alpha,\beta)=\alpha_1\beta_1+\ldots\alpha_m\beta_m$ и через L_2 – гильбертово пространство суммируемых с квадратом функций $z:[a,b]\to\mathbb{R}$ со скалярным произведением $\langle z_1,z_2\rangle=\int_a^b z_1(t)z_2(t)\,dt$. Гильбертово пространство таких абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}$, что $\dot{x}\in L_2$ со скалярным произведением $\langle x,y\rangle=x(a)y(a)+\int_a^b \dot{x}(t)\dot{y}(t)dt$ обозначается через W_2.

Самосопряженный оператор U, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *положительным на множестве* $X\subseteq H$, если $\langle Ux,x\rangle\ge 0$ для всех $x\in X$. Оператор U положителен на всем пространстве (или просто положителен), тогда и только тогда, когда его спектр $\sigma(U)$ неотрицателен. Оператор $U:H\to H$ называется сильно положительным на множестве X, если существует такая постоянная $\delta>0$, что оператор $U-\delta I$ положителен на множестве X. При этом все точки спектра сильно положительного на всем пространстве оператора больше нуля.

2. Экстремальная задача с линейными ограничениями

Условия разрешимости квадратичной экстремальной задачи

$$\frac{1}{2}\langle Ux,x\rangle-\langle f,x\rangle\to\min, \qquad (1)$$

где линейный оператор $U:W_2\to W_2$ самосопряженный и $f\in W_2$, имеют следующий вид.

Теорема 1. [1, с. 12] [2, с. 25]. Задача (1) разрешима тогда и только тогда, когда оператор U положительный и уравнение

$$Ux=f \qquad (2)$$

разрешимо.

Каждое решение уравнения (2) является точкой минимума функционала (1).

Из теоремы 1 следует, что если оператор U сильно положителен, то задача (1) однозначно разрешима. Если представить оператор U в виде $U = \mu I - K$, то положительность оператора U эквивалентна тому, что все точки спектра оператора K не больше μ. Условие $\|K\| \le \mu$ является достаточным для положительности оператора U.

Сформулируем теперь условия разрешимости экстремальной задачи с линейными ограничениями

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\langle Ux, x\rangle - \langle f, x\rangle \to \min, \\ &\ell x = \alpha, \end{aligned} \tag{3}$$

где компоненты линейного ограниченного вектор-функционала $\ell = (\ell_1, ..., \ell_m) : \mathrm{W}_2 \to \mathrm{R}^m$ линейно независимы и $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathrm{R}^m$. Сопряженный оператор $\ell^* : \mathrm{R}^m \to \mathrm{W}_2$ также имеет линейно независимые компоненты. Отметим, что в этих условиях матрица Грама $\ell\ell^* : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^m$ обратима и существует ортогональный самосопряженный проектор $P = I - \ell^*(\ell\ell^*)^{-1}\ell$, $P : \mathrm{W}_2 \to \mathrm{W}_2$ на ядро $\ker \ell$ вектор-функционала ℓ.

Теорема 2. Задача (3) разрешима тогда и только тогда, когда оператор U положителен на ядре вектор-функционала ℓ и существует такой вектор $c \in \mathrm{R}^m$, что система уравнений

$$\begin{aligned} &Ux = f + \ell^* c, \\ &\ell x = \alpha, \end{aligned} \tag{4}$$

разрешима.

Доказательство. Решение уравнения $\ell x = \alpha$ имеет вид $x = x_0 + Py$, где $x_0 = \ell^*(\ell\ell^*)^{-1}\alpha$ – частное решение этого уравнения. Эта подстановка редуцирует задачу (3) к задаче без ограничений вида (1)

$$\frac{1}{2}\langle PUPy, y\rangle + \langle P(Ux_0 - f), y\rangle \to \min .$$

В силу теоремы 1 эта задача разрешима тогда и только тогда, когда оператор PUP положителен и уравнение

$$P(U(Py + x_0) - f) = 0 \tag{5}$$

разрешимо. Положительность оператора PUP эквивалентна положительности оператора U на ядре вектор-функционала ℓ, а разрешимость уравнения (5) эквивалентна разрешимости системы

$$\begin{aligned} &P(Ux - f) = 0, \\ &\ell x = \alpha. \end{aligned}$$

Так как $P\xi = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = \ell^* c$ при некотором векторе $c \in \mathrm{R}^m$, то теорема 2 полностью доказана.

Решение экстремальной задачи (3) достигается на решении системы (4). Отметим, что уравнение $P(Ux - f) = 0$ эквивалентно включению $Ux - f \in \ker \ell^{\perp}$, где $\ker \ell^{\perp}$ – ортогональное дополнение к ядру вектор-функционала ℓ.

Очевидно, из положительности оператора U следует положительность оператора PUP. Оператор PUP не может быть сильно положительным, так как точка ноль всегда принадлежит его спектру.

Лемма 1. Спектры операторов PUP и PU совпадают.

Доказательство. Пусть $\lambda \ne 0$ и $\lambda \notin \sigma(PUP)$. Обозначим через $\overline{P} = I - P$ ортогональное дополнение к проектору P.

Тогда уравнение $\lambda x = PUx + f$ эквивалентно системе уравнений: $\lambda Px = PUPPx + PU\overline{P}x + Pf$, $\lambda \overline{P}x = \overline{P}f$.

Отсюда следует, что $\overline{P}x = \lambda^{-1}\overline{P}f$ и $Px = (\lambda I - PUP)^{-1}(PU\overline{P}x + Pf)$.

Следовательно, $\lambda \notin \sigma(PU)$ так как уравнение $\lambda x = PUx + f$ имеет единственное решение $x = (\lambda I - PUP)^{-1}(\lambda^{-1}PU\overline{P}f + Pf) + \lambda^{-1}\overline{P}f$.

В обратную сторону, пусть $\lambda \notin \sigma(PU)$. Уравнение $\lambda x = PUPx + f$ эквивалентно системе уравнений $\lambda Px = PUP + x$ и $\lambda \overline{P}x = \overline{P}f$. Следовательно, это уравнение имеет единственное решение $x = (\lambda I - PU)^{-1}Pf + \lambda^{-1}\overline{P}f$ и $\lambda \notin \sigma(PUP)$.

Отметим также [2, с. 39], что представив оператор U в виде $U = \mu I - K$ получим, что $\sigma(P(\mu I - K)P) = \sigma(\mu I - PK) \cup \{0\}$.

Отсюда следует, что оператор U положителен тогда и только тогда, когда спектр оператора PK не превосходит μ.

Пусть $q : \mathrm{R}^m \to \mathrm{W}_2$ такой конечномерный оператор, что матрица $\ell q : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^m$ обратима. Определим оператор $\Pi : \mathrm{W}_2 \to \mathrm{W}_2$ равенством $\Pi = I - q(\ell q)^{-1}\ell$.

Лемма 2. Оператор Π является проектором на ядро вектор-функционала ℓ.

Доказательство. Так как $\ell\Pi = 0$, то оператор Π отображает пространство W_2 на ядро вектор-функционала ℓ. При этом $\Pi q = 0$, тогда $\Pi^2 = \Pi(I - q(\ell q)^{-1}\ell) = \Pi$. Каждый $x \in \ker \ell$ оператор Π оставляет на месте: $\Pi x = x$, то есть сужение оператора Π на ядро вектор-функционала ℓ является тождественным оператором.

В случае если оператор $q : \mathbb{R}^m \to W_2$ биортогонален вектор-функционалу ℓ, (то есть если матрица $\ell q = E$ – единичная), проектор Π принимает вид $\Pi = I - q\ell$.

Отметим, что положительность оператора U на множестве $\ker \ell$ эквивалентна положительности оператора $\Pi^* U \Pi$ на всем пространстве.

3. Положительность квадратичной формы

Будем называть квадратичную форму $\Upsilon(x) = \langle Ux, x\rangle$ положительной, если положителен оператор $U : W_2 \to W_2$. Очевидно, что форма Υ положительна тогда и только тогда, когда экстремальная задача $\Upsilon(x) \to \min$ имеет тривиальное решение $x = 0$.

Лемма 3. Каждая квадратичная форма $\Upsilon : W_2 \to \mathbb{R}$ может быть преобразована к стандартному виду

$$\Upsilon(x) = \int_a^b (R\dot{x})(t)\dot{x}(t)dt + 2x(a)\int_a^b \rho(t)\dot{x}(t)\,dt + rx^2(a), \quad (5)$$

где $r \in \mathbb{R}^m$, $\rho \in L_2$ и оператор $R : L_2 \to L_2$ самосопряженный.

Доказательство. Обозначим $Dx = \dot{x}$, $(Vz)(t) = \int_a^t z(s)ds$, где $D : W_2 \to L_2$, $V : L_2 \to W_2$, причем $D^* = V$.

Тогда $x = x(a) + V\dot{x}$, $Ux = U1x(a) + UV\dot{x}$ и

$$\langle Ux, x\rangle = ((U1)(a)x(a) + (UV\dot{x})(a))x(a) + \\ + \int_a^b (DU(1)(t)x(a) + (DUV\dot{x})(t))\dot{x}(t)dt.$$

Следовательно,

$$\langle Ux, x\rangle = \int_a^b (R\dot{x})(t)\dot{x}(t)dt + 2x(a)\int_a^b \rho(t)\dot{x}(t)dt + rx^2(a),$$

где $R = DUV$, $r = DU(1)$, $r = U1(a)$.

Очевидно, положительность квадратичной формы Υ эквивалентна также положительности квадратичной формы вида $\upsilon : L_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где

$$\upsilon(z,\alpha) = \int_a^b (Rz)(t)\,z(t)\,dt + 2\alpha\int_a^b \rho(t)z(t)\,dt + r\alpha^2.$$

Отметим некоторые необходимые признаки положительности формы Υ.

1) Полагая $x(t) = 1$ получим, что $r \geq 0$.

2) Полагая $x(t) = \int_a^t y(s)\,ds$ получим, что оператор R является положительным.

3) Полагая $x(t) = -\frac{1}{r}\int_a^b \rho^2(\mathrm{s})\,ds + \int_a^t \rho(s)\,ds$ получим неравенство

$$\left(\int_a^b \rho^2(t)\,dt\right)^2 \leq r\int_a^b (R\rho)(t)\rho(t)\,dt.$$

Теорема 3. Квадратичная форма Υ положительна тогда и только тогда, когда

1) $r = 0$, $\rho = 0$ и оператор R положительный, или

2) $r > 0$ и оператор $\Re : L_2 \to L_2$, определяемый равенством

$$(\Re z)(t) = (Rz)(t) - \frac{\rho(t)}{r}\int_a^b \rho(s)z(s)\,ds,$$

положительный.

Доказательство. Пусть $r = 0$ и $\rho \neq 0$. Тогда положив $\dot{x} = \rho$ и выбрав такое $x(a)$, что $2x(a)\int_a^b \rho^2(t)\,dt < -\int_a^b (R\rho)(t)\rho(t)\,dt$, получим $\Upsilon(x) < 0$. В случае $r = 0$ и $\rho = 0$ положительность формы Υ эквивалентна положительности оператора R. Если $r > 0$, то при фиксированном $\dot{x}$ минимум формы Υ достигается при $x(a) = -\frac{1}{r}\int_a^b \rho(t)\dot{x}(t)\,dt$. Следовательно, минимум формы Υ совпадает с минимумом формы $\int_a^b (\Re z)(t)z(t)\,dt$.

Сформулируем достаточные условия положительности формы Υ.

Лемма 4. Если оператор R положителен и обратим, то форма Υ положительна тогда и только тогда, когда $\int_a^b (R^{-1}\rho)(t)\rho(t)dt \leq r.$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $r > 0$. В силу теоремы 1 при фиксированном $x(a)$ форма Υ достигает своего наименьшего значения если $R\dot{x}(t) = -\rho(t)x(a)$, $\dot{x}(t) = -(R^{-1}\rho)(t)x(a)$.

Следовательно, минимум формы Υ совпадает с минимумом выражения $\left(r - \int\limits_a^b \left(R^{-1}\rho\right)(t)\rho(t)dt\right)x^2(a)$.

Пример 1. Найдем условия положительности квадратичной формы

$$\Upsilon(x) = \int\limits_a^b (\dot{x}^2(t) - px^2(t))\,dt + x^2(a). \qquad (6)$$

Здесь

$$(Ux)(t) =$$

$$= x(a) - p\int\limits_a^b x(s)\,ds + \int\limits_a^t \left(\dot{x}(s) - p\int\limits_s^b x(\tau)\,d\tau\right)ds,$$

$$r = 1 - p(b-a),\ \rho(t) = -p(b-t), \text{ и}$$

$$(Rz)(t) = z(t) - p(b-t)\int\limits_a^t z(s)ds - p\int\limits_t^b (b-s)z(s)ds.$$

Спектр оператора U состоит из собственных значений λ, при которых однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$(\lambda - 1)\dot{x}(t) + p\int\limits_t^b x(s)\,ds = 0 \qquad (7)$$

с краевым условием

$$(\lambda - 1)x(a) + p\int\limits_a^b x(s)\,ds = 0$$

имеет нетривиальное решение. Отметим, что для положительности формы (6) интересен только случай $p > 0$. При $\lambda < 0$ решение уравнения (7) имеет представление вида

$$x(t) = c_1 \sin\sqrt{\frac{p}{1-\lambda}}(t-a) + c_2 \cos\sqrt{\frac{p}{1-\lambda}}(t-a),$$

отсюда получаем уравнение для отрицательных собственных значений оператора U

$$\sqrt{\frac{p}{1-\lambda}}\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{p}{1-\lambda}}(b-a) = 1. \qquad (8)$$

Обозначим через $l(h)$ наименьшее положительное решение уравнения $\xi\,\mathrm{tg}\,\xi = h$. Тогда получаем, что уравнение (8) не имеет отрицательных решений и форма (6) положительна, если и только если

$$\sqrt{p} \le \frac{l(b-a)}{b-a}.$$

4. Положительность оператора на ядре вектор-функционала

Рассмотрим теперь вопрос о положительности оператора U на ядре вектор-функционала ℓ.

Справедливо следующее обобщение теоремы Фенслера [3, с. 104].

Теорема 4. Оператор U сильно положителен на $\ker\ell$ тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что оператор $U + \lambda\ell^*\ell$ сильно положительный.

Доказательство. Достаточность очевидна. Покажем необходимость. Рассмотрим функционал $\omega(x) = -\dfrac{\langle Ux, x\rangle}{\langle \ell x, \ell x\rangle}$ на сфере $\|x\| = 1$, причем $x \notin \ker\ell$. Покажем, что функционал ω ограничен сверху. Предположим противное, тогда существует такая последовательность точек x_i, что $\omega(x_i) > i$, $\|x_i\| = 1$, $\ell(x_i) \ne 0$. Так как последовательность x_i слабо компактна, то из нее можно выделить слабо сходящуюся к точке x^* подпоследовательность x_{i_k}. Из неравенства $\left\langle Ux_{i_k}, x_{i_k}\right\rangle + i_k\left\langle \ell x_{i_k}, \ell x_{i_k}\right\rangle < 0$, следует, что $\ell x^* = 0$. Но тогда $\left\langle Ux^*, x^*\right\rangle \le 0$, что противоречит сильной положительности оператора U на ядре вектор-функционала ℓ. Следовательно, существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $-\dfrac{\langle Ux, x\rangle}{\langle \ell x, \ell x\rangle} < \lambda$. Отсюда следует сильная положительность оператора $U + \lambda\ell^*\ell$.

Каждый линейный вектор-функционал $\ell : \mathrm{W}_2 \to \mathbb{R}^m$ представим в виде

$$\ell x = \ell\left(x(a) + \int\limits_a^{\bullet} \dot{x}(s)\,ds\right) = \varphi x(a) + \int\limits_a^b \psi(s)\dot{x}(s)\,ds,$$

где $\varphi = \left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\right) \in \mathbb{R}^m$ – вектор, а $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m) \in \mathrm{L}_2^m$ – вектор-функция.

Из теорем 3 и 4 получаем следующее утверждение.

Следствие. Оператор U сильно положителен на $\ker\ell$ тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что оператор $\wp : \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2$,

$$(\wp z)(t) = (Rz)(t) + \lambda\int\limits_a^b \sum_{i=1}^m \psi_i(t)\psi_i(s)z(s)\,ds -$$

$$-\frac{\rho(t)+\lambda\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\psi_i(t)}{r+\lambda\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^2}\int_a^b\left(\rho(s)+\lambda\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\psi_i(s)\right)z(s)\,ds$$

сильно положительный.

В общей ситуации вопрос о положительности оператора U на ядре вектор-функционала ℓ, или положительность квадратичной формы

$$\upsilon(z,\alpha)=\int_a^b(Rz)(t)z(t)\,dt+2\alpha\int_a^b\rho(t)z(t)\,dt+r\alpha^2$$

при условии $\varphi\alpha+\int_a^b\psi(t)z(t)\,dt=0$ возможно свести к вопросу о положительности некоторой квадратичной формы на всем пространстве W_2.

Если компоненты вектор-функции ψ линейно независимы, то существует вектор-функция ω, биортогональная вектор-функции ψ для которой $\int_a^b\omega_i(t)\psi_j(t)dt=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$ Введем функцию $\phi\in L_2$ и оператор $G:L_2\to L_2$ с помощью равенств $\phi(t)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\omega_i(t)$ $G=I-K$, где $(Kz)(t)=\int_a^b\sum_{i=1}^{m}\omega_i(t)\psi_i(s)z(s)ds$ Определим теперь параметры новой квадратичной формы: функцию $\bar\rho=G^*(\rho-R\phi)$, константу $\bar r=r-2\int_a^b\rho(t)\phi(t)\,dt+\int_a^b\phi(t)(R\phi)(t)\,dt$ и оператор $\bar R=G^*RG$.

Теорема 5. Оператор U положителен на $\ker\ell$ тогда и только тогда, когда квадратичная форма

$$\bar r\alpha^2+2\alpha\int_a^b\bar\rho(t)z(t)\,dt+\int_a^b(\bar Ry)(t)z(t)\,dt$$

положительна на всем пространстве $L_2\times\mathbb{R}$.

Доказательство. Оператор $q:\mathbb{R}^m\to W_2$, $(q\gamma)(t)=(Q(t),\gamma)$, где вектор-функция $Q=(Q_1,\dots,Q_m)$ определена равенством $Q_i(t)=\int_a^t\omega_i(s)\,ds$, биортогонален вектор-функционалу ℓ. Следовательно, в силу леммы 2 оператор $\Pi x=x-(Q,\ell x)$ является проектором на ядро вектор-функционала ℓ. Тогда уравнение $\ell x=0$ эквивалентно уравнению $x=\Pi y$, а положительность оператора U на множестве $\ker\ell$ эквивалентна положительности оператора $\Pi^*U\Pi$ то есть квадратичной формы $\langle\Pi^*U\Pi y,y\rangle=$

$$=\bar r y(a)^2+2y(a)\int_a^b\bar\rho(t)\dot y(t)\,dt+\int_a^b(\bar R\dot y)(t)\dot y(t)\,dt.$$

Теорема доказана.

Пример 2. Рассмотрим задачу о положительности квадратичной формы

$$\begin{aligned}&\int_a^b\left(\dot x^2(t)-p(t)x(h_1(t))x(h_2(t))\right)dt,\\ &x(\xi)=0,\ \text{если } \xi\notin[a,b],\end{aligned}\tag{8}$$

при условии $x(c)=0$, где $c\in[a,b]$, $p\in L_2$ и функции $h_1,h_2:[a,b]\to\mathbb{R}$, измеримы. Редуцируем эту задачу к задаче без ограничений с помощью проектора $x(t)=y(t)-y(c)$, $\dot y(t)=z(t)$ на ядро функционала $x(c)$ или подстановки $x(t)=\int_a^b W(t,s)z(s)\,ds$, где ядро интегрального оператора

$$W(t,s)=\begin{cases}1, & \text{если } c\le s\le t\le b,\\ -1, & \text{если } a\le t\le s\le c,\\ 0, & \text{если } s\notin[\min(t,c),\max(t,c)].\end{cases}$$

Тогда задача о положительности квадратичной формы (8) на множестве $x(c)=0$ редуцируется к вопросу о положительности оператора $R=I-K$, $R:L_2\to L_2$, где $(Kz)(t)=\int_a^b K(t,s)z(s)\,ds$ – интегральный оператор с ядром

$$K(t,s)=\frac{1}{2}\int_a^b\left(W_1(\tau,s)W_2(\tau,t)+W_1(\tau,t)W(\tau,s)\right)p(\tau)\,d\tau,$$

где

$$W_i(t,s)=\begin{cases}1, & \text{если } c\le s\le h_i(t)\le b,\\ -1, & \text{если } a\le h_i(t)\le s\le c,\\ 0, & \text{если } s\notin[\min(h_i(t),c),\max(h_i(t),c)],\\ 0, & \text{если } h_i(t)\notin[a,b].\end{cases}$$

Таким образом, для того что форма (8) при условии $x(c)=0$ была положительна, необходимо и достаточно чтобы все точки спектра оператора K были не больше единицы.

Оценка нормы оператора $\|K\|<1$ дает достаточное условие разрешимости задачи.

В частном случае когда $h_1(t)=h_2(t)=t$ ядро оператора K имеет вид

$$K(t,s)=\begin{cases} \int_s^b p(\tau)\,d\tau, \text{ если } t\le s, t\ge c,\\ \int_t^b p(\tau)\,d\tau, \text{ если } t\ge s, s\ge c,\\ -\int_a^t p(\tau)\,d\tau, \text{ если } t\le s, s\le c,\\ -\int_a^s p(\tau)\,d\tau, \text{ если } s\ge t, t\le c,\\ 0, \quad \text{если } s\ge c,\ t\le c,\\ 0, \quad \text{если } s\le c,\ t\ge c. \end{cases}$$

оценка нормы этого оператора дает условие

$$\int_a^c (c-t)\left(\int_a^t p(\tau)\,d\tau\right)^2 dt+\int_c^b (t-c)\left(\int_t^b p(\tau)\,d\tau\right)^2 dt\le\frac{1}{2}.$$

Если компоненты вектор-функции ψ линейно зависимы, то хотя бы одна из компонент φ_i вектора φ ненулевая (в противном случае компоненты вектор-функционала ℓ были бы также линейно зависимы). Тогда подстановка $x(a)=-\frac{1}{\varphi_i}\int_a^b \psi_i(s)\dot{x}(s)\,ds$ редуцирует задачу о положительности оператора U на $\ker\ell$ к задаче, для которой возможно применение теоремы 5.

Пример 3. Рассмотрим квадратичную задачу вида

$$\int_a^b\left(\dot{x}^2(t)-\int_a^b d_s r_1(t,s)x(s)\int_a^b d_s r_2(t,s)x(s)\right)ds\to\min,\qquad(9)$$
$$x(a)=\alpha_1,$$
$$\int_a^b \psi(t)\dot{x}(t)dt=\alpha_2,$$

где измеримые функции $r_i:[a,b]\to\mathrm{R}$, суммируемы с квадратом по первому аргументу и имеют ограниченную вариацию по второму, $\psi\in\mathrm{L}_2$, $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathrm{R}^2$. Квадратичная форма (5) здесь задается равенствами

$$r=-\int_a^b r_1(t,a)r_2(t,a)dt,$$

$$\rho(t)=-\frac{1}{2}\int_a^b\big(r_1(s,a)r_2(s,t)+r_2(s,a)r_1(s,t)\big)ds,$$

$$(Rz)(t)=z(t)-\int_a^b r(t,s)z(s)ds,$$

где $r(t,s)=\frac{1}{2}\int_a^b\big(r_1(\tau,s)r_2(\tau,t)+r_1(\tau,t)r_2(\tau,s)\big)d\tau.$

Тогда для однозначной разрешимости задачи (9) при всех α_1,α_2 необходимо и достаточно, чтобы спектр интегрального оператора $(Mz)(t)=\int_a^b M(t,s)z(s)ds$, где

$$M(t,s)=r(t,s)+\frac{\psi(s)\left(\psi(t)-\int_a^b r(t,\tau)\psi(\tau)d\tau\right)}{\int_a^b \psi^2(s)ds}$$

был меньше единицы.

Список литературы

1. *Михлин С.Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1952. 216 с.
2. *Гусаренко С.А.* Оптимальное управление: экстремальные и вариационные задачи. Пермь: Изд-во Перм. техн. ун-та, 2001. 86 с.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

On the solvability of quadratic variational problems with linear restrictions

S. A. Gusarenko
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
sagusarenko@mail.ru +79026393256

The problems of solvability of quadratic variational problems with linear restrictions in the space of absolutely continuous functions are considered. Necessary and sufficient conditions for the solvability of problems, as well as conditions for the positivity of linear operators and quadratic forms are obtained.

Keywords: *variational problems; quadratic extremal problems; positive operator; quadratic form.*