

УДК 62-50

# К задаче об управляемых вращениях динамически симметричного твердого тела

**Н. А. Стрелкова, О. С. Агибалова**

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

strelkova@psu.ru; (342) 2 396 309

Исследуется задача гашения экваториальной составляющей угловой скорости динамически симметричного твердого тела. Предполагается, что осевая составляющая угловой скорости является заданной функцией времени. Критерием оптимальности является минимизация энергетических затрат. С использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина и метода усреднения в аналитическом виде построено приближенное решение. Определены оптимальные управления в форме синтеза, угловые скорости, минимальные энергетические затраты. Указано условие, когда решение рассматриваемой задачи не существует.

**Ключевые слова:** оптимальное управление; вращение твердого тела; минимум энергетических затрат; принцип максимума Понтрягина; метод усреднения.

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-3-89-94

## 1. Постановка задачи

Уравнения управляемого вращения динамически симметричного твердого тела относительно центра масс имеют вид [1, 2]

$$\begin{cases} J\dot{p} + (J_3 - J)qr = M_1, & p(0) = p^0, \\ J\dot{q} - (J_3 - J)pr = M_2, & q(0) = q^0, \\ J_3\dot{r} = M_3, & r(0) = r^0. \end{cases}$$

Здесь  $J, J_3$  ( $J \neq J_3$ ) - главные центральные моменты инерции твердого тела,  $p, q, r$  - проекции вектора угловой скорости на главные центральные оси инерции,  $M_i$  ( $i=1,2,3$ ) - управляющие моменты:  $|M_i| \leq M_i^0$ . Предполагается, что управляющий момент мал, т. е.

$$M^0 = \sqrt{M_1^{02} + M_2^{02} + M_3^{02}} \ll \frac{1}{2} J (p^{02} + q^{02}) + \frac{1}{2} J_3 r^{02}.$$

После перехода к безразмерным переменным и параметрам по формулам [1, 2]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{p}{\omega^0}, \quad \omega_2 = \frac{q}{\omega^0}, \quad \omega_3 = \frac{r}{\omega^0}, \quad u_i = \frac{M_i}{M^0}, \\ I &= \frac{J_3}{J}, \quad t = \omega^0 t', \quad \omega^0 = \sqrt{\omega_1^{02} + \omega_2^{02} + \omega_3^{02}}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 + (I-1)\omega_2\omega_3 = \varepsilon u_1, & \omega_1(0) = \omega_1^0, \\ \dot{\omega}_2 - (I-1)\omega_1\omega_3 = \varepsilon u_2, & \omega_2(0) = \omega_2^0, \\ I\dot{\omega}_3 = \varepsilon u_3, & \omega_3(0) = \omega_3^0, \quad \varepsilon = \frac{M^0}{J\omega^{02}} \ll 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени  $t'$ , однако в дальнейшем для упрощения записи штрих опускаем.

Рассматривается задача гашения экваториальной составляющей угловой скорости, в конечный момент времени  $t = T$ :

$$\omega_1(T) = \omega_2(T) = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функция  $\omega_3(t)$  является заданной функцией времени  $t$ , а управление изменением экваториальной составляющей угловой скорости осуществляется при помощи одного фиксированного двигателя. Введем скалярное управление  $u$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= u \cos \alpha, \quad u_2 = u \sin \alpha, \\ |u| &\leq u^0, \quad \alpha = \text{const}. \end{aligned} \quad (3)$$

Требуется найти управляющие функции  $u_1(t), u_2(t)$ , удовлетворяющие соотношениям

(3) и доставляющие минимум функционалу энергетических затрат

$$J = \varepsilon \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt = \varepsilon \int_0^T u^2 dt, \quad (4)$$

где время перехода  $T$  задано.

## 2. Построение оптимального решения

С помощью замены переменных

$$\omega_1 = a \cos \varphi - b \sin \varphi,$$

$$\omega_2 = a \sin \varphi + b \cos \varphi, \quad \varphi = \int_0^t (I-1)\omega_3(\tau) d\tau \quad (5)$$

первые два уравнения системы (1) и краевые условия преобразуем к следующему виду [1, 2]:

$$\begin{cases} \dot{a} = u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi, \\ \dot{b} = -u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi, \end{cases} \quad (6)$$

$$a(0) = \omega_1^0, \quad b(0) = \omega_2^0, \quad (7)$$

$$a(T) = b(T) = 0. \quad (8)$$

Для решения задачи (3), (4), (6)–(8) воспользуемся принципом максимума Л.С. Понтрягина [3]. Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = -\varepsilon u^2 + p_a \varepsilon (u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi) + p_b \varepsilon (-u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi). \quad (9)$$

Так как функция  $H$  не зависит от  $a$  и  $b$ , то из сопряженной системы дифференциальных уравнений следует, что  $p_a, p_b = \text{const}$ .

Преобразуем функцию Гамильтона–Понтрягина (9):

$$\begin{aligned} H &= -\varepsilon u^2 + \varepsilon u p \cos(\varphi - \alpha + \gamma) = \\ &= \varepsilon \left[ -\left(u - \frac{p \cos(\varphi - \alpha + \gamma)}{2}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p^2 \cos^2(\varphi - \alpha + \gamma)}{4} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\cos \gamma = \frac{p_a}{p}, \quad \sin \gamma = \frac{p_b}{p}, \quad p = \sqrt{p_a^2 + p_b^2}. \quad (11)$$

Введем в рассмотрение функцию насыщения  $\text{sat}\{\}$  [4]. Из условия максимума функции Гамильтона–Понтрягина (10) и соотношения (3) получим оптимальное управление

$$u^* = \text{sat}\left(\frac{p \cos \psi}{2}\right), \quad (12)$$

где

$$\text{sat}\left(\frac{p \cos \psi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{p \cos \psi}{2}, & \text{если } \left|\frac{p \cos \psi}{2}\right| \leq u^0, \\ u^0 \text{sign} \cos \psi, & \text{если } \left|\frac{p \cos \psi}{2}\right| > u^0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\psi = \varphi - \alpha + \gamma. \quad (14)$$

Тогда

$$u_1^* = \cos \alpha \text{sat}\left(\frac{p \cos \psi}{2}\right), \quad (15)$$

$$u_2^* = \sin \alpha \text{sat}\left(\frac{p \cos \psi}{2}\right).$$

Подставим  $u_1^*, u_2^*$  в систему уравнений (6) и воспользуемся методом усреднения для построения приближенного решения задач оптимального управления с фиксированным временем окончания процесса [1, 2]. Усредняя по фазе  $\varphi$ , получим уравнения

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \alpha) \text{sat}\left(\frac{p \cos \psi}{2}\right) d\varphi, \\ \dot{b} = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\varphi - \alpha) \text{sat}\left(\frac{p \cos \psi}{2}\right) d\varphi. \end{cases} \quad (16)$$

Используя замену переменных (14) и учитывая периодичность подынтегральных функций, найдем

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \alpha + \gamma) \text{sat}\left(\frac{p \cos \psi}{2}\right) d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\psi_1} u^0 \cos \psi d\psi + 2 \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} p \cos^2 \psi d\psi = \\ &= 2u^0 \sin \psi_1 + p \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1\right), \\ &\int_0^{2\pi} \sin(\varphi - \alpha + \gamma) \text{sat}\left(\frac{p \cos \psi}{2}\right) d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $\psi_1$  удовлетворяет равенству

$$\frac{p \cos \psi_1}{2} = u^0. \quad (18)$$

Введем обозначение

$$2u^0 \sin \psi_1 + p \left(\frac{\pi}{2} - \psi_1\right) = A \quad (19)$$

и вычислим, используя соотношения (17), (19), интегралы правых частей системы (16). Тогда уравнения для усредненных фазовых переменных примут вид

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon \frac{A}{2\pi} \cos \gamma, \\ \dot{b} = \varepsilon \frac{A}{2\pi} \sin \gamma. \end{cases}$$

Найдем решение данной системы дифференциальных уравнений, учитывая начальные условия (7)

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon \frac{A}{2\pi} \cos \gamma t + \omega_1^0, \\ b &= \varepsilon \frac{A}{2\pi} \sin \gamma t + \omega_2^0. \end{aligned} \quad (20)$$

Из граничных условий (8) следует, что

$$A = \frac{2\pi}{\varepsilon T} \omega^0, \quad (21)$$

$$\cos \gamma = -\frac{\omega_1^0}{\omega^0}, \quad \sin \gamma = -\frac{\omega_2^0}{\omega^0}, \quad (22)$$

где  $\omega^0 = \sqrt{\omega_1^{0^2} + \omega_2^{0^2}}$ .

Воспользуемся равенствами (21), (22) и преобразуем выражения (20):

$$\begin{aligned} a &= \omega_1^0 \left(1 - \frac{t}{T}\right), \\ b &= \omega_2^0 \left(1 - \frac{t}{T}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Из соотношений (18), (19), (21) получаем, что для определения неизвестной постоянной  $\psi_1$  следует найти корень трансцендентного уравнения

$$\sin \psi_1 + \frac{1}{\cos \psi_1} \left( \frac{\pi}{2} - \psi_1 \right) = \frac{\pi \omega^0}{\varepsilon T u^0}. \quad (24)$$

Используя выражения (5), (23), найдем угловые скорости  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) (\omega_1^0 \cos \varphi - \omega_2^0 \sin \varphi), \\ \omega_2 &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) (\omega_1^0 \sin \varphi + \omega_2^0 \cos \varphi), \\ \varphi &= \int_0^t (I-1) \omega_3(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

Воспользуемся равенством (18) и преобразуем формулы (12), (13) к виду

$$u^* = \begin{cases} \frac{u^0 \cos \psi}{\cos \psi_1}, & \text{если } \left| \frac{\cos \psi}{\cos \psi_1} \right| \leq 1, \\ u^0 \operatorname{sign} \cos \psi, & \text{если } \left| \frac{\cos \psi}{\cos \psi_1} \right| > 1. \end{cases} \quad (26)$$

Вычислим  $\cos \psi$ . Из соотношений (22), (23) следует, что

$$\cos \gamma = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \gamma = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Тогда, применяя равенства (14) и (5), получаем

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \cos(\varphi - \alpha + \gamma) = \\ &= -\cos \varphi \left( \frac{a \cos \alpha + b \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) - \\ &- \sin \varphi \left( \frac{-b \cos \alpha + a \sin \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \\ &= -\frac{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Используя соотношения (3), (26), (27), находим оптимальные управления  $u_1^*$ ,  $u_2^*$  в форме синтеза

$$\begin{aligned} u_1^* &= u^* \cos \alpha, \\ u_2^* &= u^* \sin \alpha, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$u^* = \begin{cases} \frac{u^0}{\cos \psi_1} \frac{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}, & \\ \text{если } \left| \frac{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \psi_1} \right| \leq 1, & \\ -u^0 \operatorname{sign}(\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha), & \\ \text{если } \left| \frac{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \psi_1} \right| > 1. & \end{cases} \quad (29)$$

Таким образом, оптимальное управление  $u^*$  является кусочно-гладкой функцией, принимающей, при выполнении неравенства  $\left| \frac{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \psi_1} \right| > 1$ , значения  $\pm u^0$  в зависимости от знака выражения  $\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha$ ; в противном случае – графиком функции является кривая, определяе-

мая уравнением  $u^* = \frac{-u^0}{\cos \psi_1} \frac{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$ .

Моменты времени, при которых происходит изменение режима оптимального управления,

находятся из условия  $\left| \frac{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \psi_1} \right| = 1$ ,

где  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$  согласно соотношениям (25) являются известными функциями времени.

В первом приближении минимальное значение функционала (4) вычисляется по формуле

$$J^* = \varepsilon \int_0^T \langle u^{*2} \rangle dt, \quad (30)$$

Здесь  $\langle u^{*2} \rangle$  – функция, полученная в результате подстановки в (30) управления  $u^*$  из (29) и усреднения по фазе  $\varphi$ . Из соотношения (29) получаем, что

$$\langle u^{*2} \rangle = \begin{cases} \frac{u^{02}}{2 \cos^2 \psi_1}, & \text{если} \\ \left| \frac{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \psi_1} \right| \leq 1, & \\ u^{02}, & \text{если} \left| \frac{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \psi_1} \right| > 1. \end{cases} \quad (31)$$

Рассмотрим два предельных случая, когда  $\psi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  и  $\psi_1 = 0$ .

Если  $\psi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$  (управление  $u^*$  является кусочно-постоянной функцией), то из уравнения (24) следует, что время окончания процесса должно удовлетворять равенству

$$T_1 = \frac{\pi}{2\varepsilon} \frac{\omega^0}{u^0}. \quad (32)$$

В этом случае оптимальный по энергетическим затратам режим совпадает с оптимальным по быстродействию режимом гашения экваториальной составляющей угловой скорости и синтез оптимального управления получаем в виде

$$\begin{aligned} u_1^* &= -u^0 \cos \alpha \operatorname{sign}(\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha), \\ u_2^* &= -u^0 \sin \alpha \operatorname{sign}(\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha). \end{aligned} \quad (33)$$

При  $T = T_1$  энергетические затраты равны

$J^* = \varepsilon u^{02} T_1 = \frac{\pi}{2} u^0 \omega^0$ . При  $T < T_1$  рассматриваемая задача решения не имеет.

Отметим, что задача оптимального по быстродействию управления гашением экваториальной составляющей угловой скорости рассматривалась в работах [1, 2] при произвольной зависимости осевой составляющей угловой скорости от времени, а в работе [4] – при  $\omega_3 = \text{const}$ .

Если  $\psi_1 = 0$ , то из уравнения (24) получаем, что время окончания процесса равно

$$T_2 = \frac{2}{\varepsilon} \frac{\omega^0}{u^0}. \quad (34)$$

При  $T = T_2$  управление  $u^*$  вычисляется по формуле

$$u^* = -u^0 \frac{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}. \quad (35)$$

Найдем оптимальное управление при  $T > T_2$ , используя условие максимума функции Гамильтона–Понтрягина (10),

$$u^* = \frac{p \cos \psi}{2}. \quad (36)$$

Вычислим  $u_1^*$ ,  $u_2^*$  по формулам (28), (36), подставим полученные выражения в систему уравнений (6) и произведем усреднение по фазе  $\varphi$ :

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon \frac{p_a}{4}, \\ \dot{b} = \varepsilon \frac{p_b}{4}. \end{cases} \quad (37)$$

Проинтегрируем эту систему дифференциальных уравнений, учтем краевые условия (7), (8) и найдем

$$p_a = -\frac{4\omega_1^0}{\varepsilon T}, \quad p_b = -\frac{4\omega_2^0}{\varepsilon T}, \quad (38)$$

а затем решение системы (37). Это решение описывается выражениями (23). Из соотношений (11), (14), (36), (38) следует, что

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{p \cos(\varphi - \alpha + \gamma)}{2} = \\ &= \frac{p_a \cos(\varphi - \alpha) - p_b \sin(\varphi - \alpha)}{2} = \\ &= 2 \frac{-\omega_1^0 \cos(\varphi - \alpha) + \omega_2^0 \sin(\varphi - \alpha)}{\varepsilon T}. \end{aligned} \quad (39)$$

Воспользуемся формулами (25), (39) и найдем оптимальное управление в форме синтеза

$$u^* = -2 \frac{\omega_1 \cos \alpha + \omega_2 \sin \alpha}{\varepsilon(T-t)}. \quad (40)$$

Отметим, что при  $T = T_2$  приходим к выражению (34), а при  $T > T_2$  управление  $u^*$  удовлетворяет неравенству  $-u^0 < u^* < u^0$ .

Оптимальные управления  $u_1^*, u_2^*$  и определяются из соотношений (28), в которые следует подставить  $u^*$  из (40).

Вычислим минимальные затраты энергии, используя соотношения (30), (40)

$$J^* = \frac{2\omega^0{}^2}{\varepsilon T}. \quad (41)$$

Угловые скорости  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$  при всех  $T = T_1$ ,  $T_1 < T < T_2$ ,  $T \geq T_2$  выражаются формулами (25).

### Примеры

Рассмотрим задачу оптимального управления экваториальной составляющей угловой скорости твердого тела из начального состояния  $\omega_1(0) = 0,5$ ,  $\omega_2(0) = 0,5\sqrt{3}$  в конечное положение (2). Предполагается, что отношение главных центральных моментов инерции твердого тела  $I = 2$ , малый параметр  $\varepsilon = 0,1$ , угол  $\alpha = 30^\circ$ , предельное значение управления  $u^0 = 1$ , а осевая составляющая угловой скорости изменяется по линейному закону  $\omega_3(t) = 0,08t$ .

Положим  $T = 17$ . Для определения оптимального решения воспользуемся формулами (25), (29)–(31) и найдем угловые скорости, оптимальное управление, минимальные энергетические затраты. На рис. 1 представлены графики зависимостей угловых скоростей  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и управления  $u^*$  от времени.

Моменты переключения оптимального управления  $u^*$  соответственно равны

$$\tau_1 = 2,908,$$

$$\tau_2 = 6,626, \quad \tau_3 = 9,327, \quad \tau_4 = 11,065, \quad \tau_5 = 12,866,$$

$$\tau_6 = 14,177, \quad \tau_7 = 15,623, \quad \tau_8 = 16,719.$$

Минимальное значение функционала энергетических затрат равно  $J^* = 1,203$ .

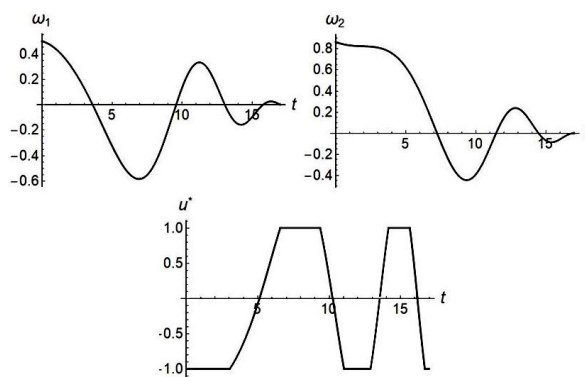


Рис. 1.  $T = 17$

Вычислим по формуле (32) момент окончания процесса  $T = 5\pi$  (минимальное время, при котором еще возможен переход из заданного начального положения в конечное (2)). Оптимальное управление  $u^*$  является кусочно-постоянной функцией:  $u^* = -1$  при  $t \in [0, 5,117] \cup [10,233, 13,537]$  и  $u^* = +1$  при  $t \in [5,117, 10,233] \cup [13,537, 5\pi]$ ; затраты энергии на управление равны  $J^* = 0,5\pi$ . На рис. 2 изображены графики, иллюстрирующие полученное решение.

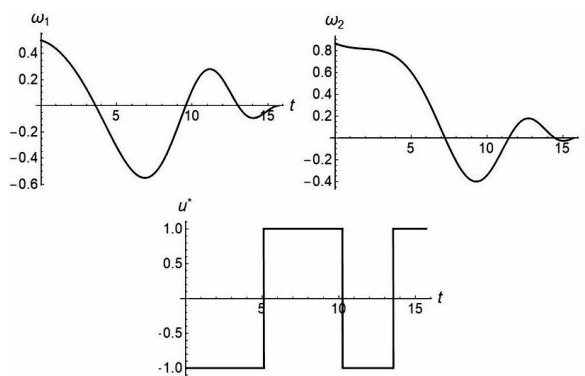


Рис. 2.  $T = 5\pi$

Примем  $T = 23$ . Для определения угловых скоростей, оптимального управления и энергетических затрат воспользуемся соотношениями (25), (40), (41). В этом случае оптимальное управление  $u^*(t)$  является непрерывной функцией, при всех  $t \in [0; 23]$ :  $-0,870 \leq u^*(t) \leq 0,870$ . Минимальные энергетические затраты равны  $J^* = 0,870$ . Графики зависимостей угловых скоростей  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$  и оптимального управления  $u^*(t)$  приведены на рис. 3.

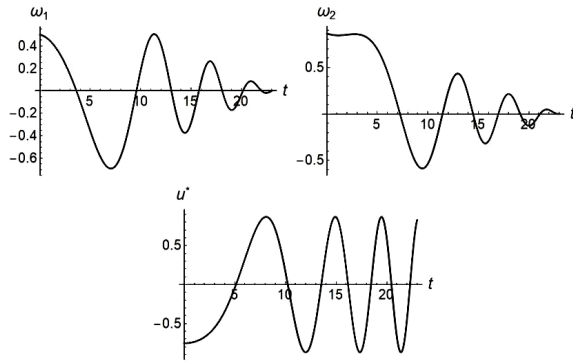


Рис. 3.  $T = 23$

### Заключение

В аналитическом виде получено приближенное решение задачи оптимального по энергетическим затратам управления гашением экваториальной составляющей угловой скорости динамически симметричного твердого тела.

С использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина и метода усреднения найдены оптимальные управления в форме синтеза,

угловые скорости, минимальные значения функционала энергетических затрат при трех режимах реализации управления.

Указано соотношение, при выполнении которого рассматриваемая задача решения не имеет.

Представлены конкретные примеры построения оптимального решения при заданных граничных условиях.

### Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
4. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.

## To the problem of controlled rotations of a dynamically symmetric rigid body

N. A. Strelkova, O. S. Agibalova

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia  
strelkova@psu.ru; 8 (342) 2396309

The paper studies the problem of damping the Equatorial component of the angular velocity of a dynamically symmetric solid. It is assumed that the axial component of the angular velocity is a given function of time. The optimality criterion is the minimization of energy costs. Using Pontryagin's maximum principle and the method of averaging in the analytical form, an approximate solution is constructed. The optimal controls in the form of synthesis, angular velocities, minimum energy costs are determined. The condition when the solution for the considered problem does not exist is specified.

**Keywords:** *optimal control; rotation of a rigid body; minimum energy costs; Pontryagin's maximum principle; averaging method.*