

УДК 534-16:519.2

Применение схемы интегрального расширения пространства состояний для стохастического анализа линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

Данная работа посвящена применению модификации схемы интегрального расширения пространства состояний для изучения стохастических поперечных колебаний шарнирно закрепленной линейной вязкоупругой балки, возникающих под воздействием случайной осевой нагрузки, а также внутреннего и внешнего трения. Методика исследования включает разложение профиля балки в ряд Фурье по синусам и вывод системы стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения. На основании этой системы построены уравнения для первых моментных функций этих коэффициентов. Демонстрируются результаты расчетов на основе алгоритма, реализующего предложенную методику.

Ключевые слова: расширение пространства состояний; стохастическое интегро-дифференциальное уравнение в частных производных; стохастическое обыкновенное дифференциальное уравнение; балка; вязкоупругость; поперечное колебание; продольная нагрузка; модель Фойгта внутреннего трения.

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-3-80-88

Введение

Известно, что математические модели в форме (систем) детерминированных и стохастических интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ, СИДУ), обыкновенных и в частных производных (ОИДУ, СОИДУ; ИДУ_{вЧП}, СОИДУ_{вЧП}), интересны как с теоретической, так и практической точек зрения вследствие того, что эти уравнения описывают значительное число явлений в различных областях, в частности, в теории колебаний с учетом наследственности мате-

риала [1], аэроавтоупругости [2], вязкоупругости [3] и др. Общая теория и первичная классификация детерминированных интегро-дифференциальных уравнений была разработана Вито Вольтерра [4] в первой половине XX в. Некоторые современные общие приложения ИДУ рассмотрены в [5,6]. С начала 70-х гг. прошлого века последовательно развивается теория СОИДУ [7–9].

Вязкоупругое поведение и свойства присущи многим материалам, которые чрезвычайно важны для приложений: зольной пыли, биоматериалам (биополимеры, целлюлоза, соединительная ткань, лигнин), кол-

лоидным растворам, композитам, природным и синтетическим жидкостям, продуктам питания, стеклу, строительным и дорожным материалам (асфальт, битум, цемент, бетон), смарт-материалам, металлам и сплавам при повышенных температурах, бумаге, пластмассам (оргстекло, полистирол, нейлон, поливинилхлорид), натуральным и искусственным полимерам (хлопок, кожа, резина, шелк, дерево, шерсть), полимерным нанокомпозитам, полиэфирам, смолам, почвам, в т.ч., мерзлым грунтам (вечной мерзлоте) и скальным породам, суспензиям и т.д. Поэтому методы анализа моделей вязкоупругого поведения материалов постоянно развиваются, а соответствующая проблематика стала особенно актуальной в последние годы (см. библиографию в [10, 11, 21]).

В данной работе представлены компактная схема, алгоритм и результаты расчета статистических характеристик стохастических линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки для случая неразностного ядра. Использование разложения смещения балки из невозмущенного состояния по синусам пространственной координаты дало возможность свести задачу анализа стохастического интегро-дифференциального уравнения в частных производных к исследованию системы обыкновенных СИДУ для коэффициентов разложения, зависящих от времени. Для оценки первых моментных функций последних применяется модификация метода интегрального расширения пространства состояний [10, 13–17], позволяющая построить цепочку систем обыкновенных дифференциальных уравнений для искомым моментов. Приведены результаты расчетов, проведенных на основе применения изложенной схемы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим поперечные колебания балки длины L , сжатой случайной продольной силой $P(t)$. Пусть: а) внешняя распределенная нагрузка отсутствует; б) материал балки вязкоупругий; в) масса единицы длины балки $m = \rho S$ [кг/м], площадь поперечного сечения S [м²], жесткость на изгиб $E I$ (E [н/м²] – модуль упругости, I [м⁴] – мо-

мент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний) и момент инерции I_0 [н/м²] единицы длины балки относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости колебаний, постоянны. Тогда уравнение колебаний балки при наличии сплошного упругого основания (модель Винклера), внешнего трения, а также внутреннего трения по закону Фойхта [18] может быть приведено к следующему виду:

$$m \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + \beta U(x, t) + P(t) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + 2m \left[\alpha_0 \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - \alpha_1 \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x^2 \partial t} + \alpha_2 \frac{\partial^5 U(x, t)}{\partial x^4 \partial t} \right] + E I \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x^4} - I \rho \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} = \gamma \int_0^t R(t, s) \frac{\partial^4 U(x, s)}{\partial x^4} ds, \\ 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T < +\infty. \quad (1.1)$$

В уравнении (1.1) t – время; x – продольная координата; $U(x, t)$ – отклонение центральной оси балки от прямолинейного невозмущенного состояния; $P(t)$ [н] – случайная осевая нагрузка; $R(t, s) \geq 0$ – ядро, определяющее вязкоупругие свойства материала; $2\alpha_0 > 0$, $2\alpha_1 > 0$ – коэффициенты сопротивления среды и изгибу; $2m\alpha_2 = \epsilon E I$, $\epsilon > 0$ – коэффициент внутреннего трения; $\beta > 0$ – модуль упругого основания; γ – положительная постоянная. Предположим, что осевая нагрузка выражается соотношением

$$P(t) = p_0(t) + p(t) V(t),$$

где $p_0(t)$ и $p(t)$ – известные непрерывные функции времени t , $V(t)$ – случайный процесс типа гауссовского белого шума с единичной интенсивностью:

$$\mathbb{E}[V(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[V(t) V(t')] = \delta(t - t'),$$

$\mathbb{E}[\dots]$ – оператор математического ожидания, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, а начальные и граничные условия определяются следующими соотношениями:

$$U(x, 0) = \bar{U}_1(x), \\ \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = \bar{U}_2(x), \quad 0 < x < L, \quad (1.2)$$

$$U(0, t) = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.3)$$

$$U(L, t) = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad (1.4)$$

т.е. концы балки шарнирно закреплены. В равенстве (1.2) $\bar{U}_1(x)$, $\bar{U}_2(x)$ – случайные функции x с известными статистическими характеристиками.

Задача состоит в вычислении первых моментных функций (функций математического ожидания и дисперсии) случайного отклонения $U(x, t)$.

2. Решение задачи

Представим функцию $U(x, t)$ для $t > 0$, $0 \leq x \leq L$ в следующем виде:

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t) \sin \frac{\pi k x}{L}. \quad (2.1)$$

Несложно видеть, что ряд в правой части последнего равенства удовлетворяет крайевым условиям (1.3), (1.4). Для того чтобы выполнялись равенства (1.2), требуется, чтобы тождественно

$$U_k(0) = U_{k1}^0, \quad \dot{U}_k(0) = U_{k2}^0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где случайные величины U_{1k}^0 и U_{2k}^0 являются коэффициентами разложений

$$\bar{U}_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_{k1}^0 \sin \frac{\pi k x}{L},$$

$$\bar{U}_2(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_{k2}^0 \sin \frac{\pi k x}{L},$$

точкой обозначена производная по времени, а равенство между случайными величинами здесь и далее понимается в смысле почти на-верное.

Для вывода системы счетного числа уравнений для нахождения коэффициентов $U_k(t)$ ряда в правой части равенства (2.1) подставим этот ряд вместо функции $U(x, t)$ в уравнение (1.1) и соберем коэффициенты при синусах с одинаковыми аргументами. В результате получим линейные параметрические стохастические интегродифференциальные уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} m \ddot{U}_k(t) + \beta U_k(t) + P(t) (-1) \frac{\pi^2 k^2}{L^2} U_k(t) + \\ + 2m \left[\alpha_0 \dot{U}_k(t) - \alpha_1 (-1) \frac{\pi^2 k^2}{L^2} \dot{U}_k(t) + \right. \\ \left. + \alpha_2 \frac{\pi^4 k^4}{L^4} \dot{U}_k(t) \right] + EI \frac{\pi^4 k^4}{L^4} U_k(t) - \\ - I \rho (-1) \frac{\pi^2 k^2}{L^2} \ddot{U}_k(t) = \\ = \gamma \frac{\pi^4 k^4}{L^4} \int_0^t R(t, s) U_k(s) ds, \\ 0 < t \leq T < +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

или

$$\ddot{U}_k(t) + 2\bar{\alpha}_k \dot{U}_k(t) + \bar{\beta}_k U_k(t) = \quad (2.2)$$

$$= \bar{\gamma}_k \int_0^t R(t, s) U_k(s) ds + \mu_k U_k(t) V(t),$$

где

$$\bar{\alpha}_k = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\pi^2 k^2}{L^2} + \alpha_2 \frac{\pi^4 k^4}{L^4},$$

$$\bar{\beta}_k = \left[\beta - p_0(t) \frac{\pi^2 k^2}{L^2} + EI \frac{\pi^4 k^4}{L^4} \right] / m_k,$$

$$\mu_k = p(t) \frac{\pi^2 k^2}{L^2} / m_k,$$

$$\bar{\gamma}_k = \gamma \frac{\pi^4 k^4}{L^4} / m_k, \quad m_k = m + I \rho \frac{\pi^2 k^2}{L^2}.$$

Заметим, что структура уравнений (2.2) такова, что случайные процессы $U_k(t)$ с различными k являются независимыми, и их характеристики можно получать для каждого k отдельно.

Теперь для того, чтобы перейти от СОИДУ (2.2) к системе СОДУ, применим приближенную схему интегрального расширения пространства состояний.

Для этого разобьем отрезок $[0, T]$ точками $t_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, M$, $h = T/M$ так, чтобы с достаточной точностью на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, $i \geq 1$ ядро $R(t, s)$ можно было заменить на функцию (среднее значение) $\tilde{R}_i(t)$, которую вычислим следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_i(t) &= \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t, s) ds \approx \\ &\approx \frac{1}{h} \frac{\Delta s}{3} \sum_{\ell=0}^{2K} c_\ell R(t, s_{i\ell}) = \frac{1}{6K} \sum_{\ell=0}^{2K} c_\ell R(t, s_{i\ell}) \end{aligned}$$

(с точностью порядка $O(\Delta s)^4$), где

$$\begin{aligned} s_{i\ell} &= t_{i-1} + \ell \cdot \Delta s, & \ell &= 0, 1, \dots, 2K, \\ h &= 2K \cdot \Delta s, & K &\geq 1, \\ c_\ell &= \begin{cases} 1, & \text{если } \ell = 0 \text{ или } 2K; \\ 4, & \text{если } \ell \text{ нечетно}; \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, ядро $R(t, s)$ представляется кусочно-постоянной по второму аргументу функцией. В результате этого уравнение (2.2) на интервале $t_{i-1} < t \leq t_i$, $i = 1, 2, \dots, M$, приводится к следующей системе СОИДУ:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{k1}(t) &= U_{k2}(t), \\ \dot{U}_{k2} &= -2\bar{\alpha}_k U_{k2}(t) - \bar{\beta}_k^2 U_{k1}(t) + \\ &+ \bar{\gamma}_k \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{R}_j(t) \int_{t_{j-1}}^{t_j} U_{k1}(s) ds + \\ &+ \bar{\gamma}_k \tilde{R}_i(t) \int_{t_{i-1}}^t U_{k1}(s) ds + \mu_k U_{k1}(t) V(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $U_{k1}(t) = U_k(t)$, $U_{k2}(t) = \dot{U}_k(t)$.

Введем случайные процессы

$$Z_{ki}(t) = \int_{t_{i-1}}^t U_k(s) ds, \quad t_{i-1} < t \leq t_i.$$

С учетом последних равенств система СОИДУ (2.3) принимает форму

$$\begin{aligned} \dot{U}_{k1}(t) &= U_{k2}(t), \\ \dot{U}_{k2} &= -2\bar{\alpha}_k U_{k2}(t) - \bar{\beta}_k^2 U_{k1}(t) + \\ &+ \bar{\gamma}_k \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{R}_j(t) Z_{kj}(t) + \\ &+ \bar{\gamma}_k \tilde{R}_i(t) Z_{ki}(t) + \mu_k U_{k1}(t) V(t), \\ \dot{Z}_{ki}(t) &= U_{k1}(t), \end{aligned}$$

причем $Z_{ki}(t_{i-1}) = 0$.

Если обозначить $U_{k1}(t)$, $U_{k2}(t)$ и $V(t)$ через $U_{k\ell 1}(t)$, $U_{k\ell 2}(t)$ и $V_\ell(t)$ для $t_{\ell-1} < t \leq t_\ell$ соответственно, то окончательно получим

$$\dot{U}_{ki1}(t) = U_{ki2}(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ki2} &= -2\bar{\alpha}_k U_{ki2}(t) - \bar{\beta}_k^2 U_{ki1}(t) + \\ &+ \bar{\gamma}_k \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{R}_j(t) Z_{kj}(t) + \\ &+ \bar{\gamma}_k \tilde{R}_i(t) Z_{ki}(t) + \mu_k U_{ki1}(t) V_i(t), \\ \dot{Z}_{ki}(t) &= U_{ki1}(t), \end{aligned} \quad (2.4)$$

причем начальные условия для системы (2.4) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} U_{ki j}(t_{i-1}) &= U_{k, i-1, j}(t_{i-1}), \quad j = 1, 2, \\ Z_{ki}(t_{i-1}) &= 0. \end{aligned}$$

Теперь построим обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) для вычисления первых моментов случайных процессов $U_{ki1}(t)$, $U_{ki2}(t)$ и $Z_{ki}(t)$. Начнем с ОДУ для функций математического ожидания

$$\begin{aligned} m_{i1}(t) &\equiv m_{U_{ki1}}(t) = \mathbb{E}[U_{ki1}(t)], \\ m_{i2}(t) &\equiv m_{U_{ki2}}(t) = \mathbb{E}[U_{ki2}(t)], \\ m_{i3}(t) &\equiv m_{Z_{ki}}(t) = \mathbb{E}[Z_{ki}(t)]. \end{aligned}$$

Если воспользоваться общими соотношениями, приведенными в [19, 20], получим:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{11}(t) &= m_{12}(t), \\ \dot{m}_{12} &= -2\bar{\alpha}_k m_{12}(t) - \bar{\beta}_k^2 m_{11}(t) + \\ &+ \bar{\gamma}_k \tilde{R}_1(t) m_{13}(t), \\ \dot{m}_{13}(t) &= m_{11}(t), \\ \dot{m}_{i1}(t) &= m_{i2}(t), \\ \dot{m}_{i2} &= -2\bar{\alpha}_k m_{i2}(t) - \bar{\beta}_k^2 m_{i1}(t) + \\ &+ \bar{\gamma}_k \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{R}_j(t) m_{j3}(t) + \\ &+ \bar{\gamma}_k \tilde{R}_i(t) m_{i3}(t), \\ \dot{m}_{i3}(t) &= m_{i1}(t), \end{aligned} \quad (2.5) \quad \left| \quad i > 1, \right.$$

причем начальные условия для системы (2.5) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_{11}(0) &= \mathbb{E}[U_{k1}^0], \\ m_{12}(0) &= \mathbb{E}[U_{k2}^0], \\ m_{13}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} m_{i1}(t_{i-1}) &= m_{i-1,1}(t_{i-1}), \\ m_{i2}(t_{i-1}) &= m_{i-1,2}(t_{i-1}), \\ m_{i3}(t_{i-1}) &= 0, \end{aligned} \quad \left| \quad i > 1. \right.$$

ОДУ для функций ковариации имеют более сложную структуру, что объясняется необходимостью учета предыстории:

– основные уравнения

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{D}}_{1111}(t) &= 2 \mathcal{D}_{1112}(t), \\
 \dot{\mathcal{D}}_{1112}(t) &= -2 \bar{\alpha}_k \mathcal{D}_{1112}(t) - \bar{\beta}_k^2 \mathcal{D}_{1111}(t) + \\
 &\quad + \bar{\gamma}_k \tilde{R}_1(t) \mathcal{D}_{1113}(t) + \mathcal{D}_{1212}(t), \\
 \dot{\mathcal{D}}_{1113}(t) &= \mathcal{D}_{1111}(t) + \mathcal{D}_{1213}(t), \\
 \dot{\mathcal{D}}_{1212}(t) &= 2 \left[-2 \bar{\alpha}_k \mathcal{D}_{1212}(t) - \bar{\beta}_k^2 \mathcal{D}_{1112}(t) + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\gamma}_k \tilde{R}_1(t) \mathcal{D}_{1213}(t) \right] + \mu_k^2 [\mathcal{D}_{1111}(t) + m_{11}^2(t)], \\
 \dot{\mathcal{D}}_{1213}(t) &= -2 \bar{\alpha}_k \mathcal{D}_{1213}(t) - \bar{\beta}_k^2 \mathcal{D}_{1113}(t) + \\
 &\quad + \bar{\gamma}_k \tilde{R}_1(t) \mathcal{D}_{1313}(t) + \mathcal{D}_{1112}(t), \\
 \dot{\mathcal{D}}_{1313}(t) &= 2 \mathcal{D}_{1113}(t), \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{D}}_{i1i1}(t) &= 2 \mathcal{D}_{i1i2}(t), \\
 \dot{\mathcal{D}}_{i1i2}(t) &= -2 \bar{\alpha}_k \mathcal{D}_{i1i2}(t) - \\
 &\quad - \bar{\beta}_k^2 \mathcal{D}_{i1i1}(t) + \\
 &\quad + \bar{\gamma}_k \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{R}_j(t) \mathcal{D}_{i1j3}(t, t_j) + \\
 &\quad + \bar{\gamma}_k \tilde{R}_i(t) \mathcal{D}_{i1i3}(t) + \mathcal{D}_{i2i2}(t), \\
 \dot{\mathcal{D}}_{i1i3}(t) &= \mathcal{D}_{i1i1}(t) + \mathcal{D}_{i2i3}(t), \\
 \dot{\mathcal{D}}_{i2i2}(t) &= 2 \left[-2 \bar{\alpha}_k \mathcal{D}_{i2i2}(t) - \right. \\
 &\quad \left. - \bar{\beta}_k^2 \mathcal{D}_{i1i2}(t) + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\gamma}_k \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{R}_j(t) \mathcal{D}_{i2j3}(t, t_j) + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\gamma}_k \tilde{R}_i(t) \mathcal{D}_{i2i3}(t) \right] + \\
 &\quad \mu_k^2 [\mathcal{D}_{i1i1}(t) + m_{i1}^2(t)], \\
 \dot{\mathcal{D}}_{i2i3}(t) &= -2 \bar{\alpha}_k \mathcal{D}_{i2i3}(t) - \\
 &\quad - \bar{\beta}_k^2 \mathcal{D}_{i1i3}(t) + \\
 &\quad + \bar{\gamma}_k \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{R}_j(t) \mathcal{D}_{i3j3}(t, t_j) + \\
 &\quad + \bar{\gamma}_k \tilde{R}_i(t) \mathcal{D}_{i3i3}(t) + \mathcal{D}_{i1i2}(t), \\
 \dot{\mathcal{D}}_{i3i3}(t) &= 2 \mathcal{D}_{i1i3}(t);
 \end{aligned}$$

$i > 1$.

– вспомогательные уравнения для $i > 1$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{D}}_{i1j3}(t, t_j) &= \mathcal{D}_{i2j3}(t, t_j), \\
 \dot{\mathcal{D}}_{i2j3}(t, t_j) &= -2 \bar{\alpha}_k \mathcal{D}_{i2j3}(t, t_j) - \\
 &\quad - \bar{\beta}_k^2 \mathcal{D}_{i1j3}(t, t_j) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \bar{\gamma}_k \sum_{\ell=1}^{i-1} \tilde{R}_\ell(t) \mathcal{D}_{\ell3j3}(t_\ell, t_j) + \tag{2.8} \\
 &\quad + \bar{\gamma}_k \tilde{R}_i(t) \mathcal{D}_{i3j3}(t, t_j), \\
 \dot{\mathcal{D}}_{i3j3}(t, t_j) &= \mathcal{D}_{i1j3}(t, t_j), \\
 &\quad j = 1, 2, \dots, i-1,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{ipjq}(t) &\equiv \mathcal{D}_{U_{kip}U_{kjq}}(t) = \mathbb{E} \left[\dot{U}_{kip}(t) \dot{U}_{kjq}(t) \right], \\
 \mathcal{D}_{ipj3}(t, t_j) &\equiv \mathcal{D}_{U_{kip}U_{kj3}}(t, t_j) = \\
 &= \mathbb{E} \left[\dot{U}_{kip}(t) \dot{U}_{kj3}(t_j) \right], \\
 &\quad i \geq j, \quad p, q = 1, 2, 3,
 \end{aligned}$$

с учетом обозначения $\dot{Y}(t) = Y(t) - m_Y(t)$. Начальные условия для систем ОДУ (2.7), (2.8) можно представить так:

$$\mathcal{D}_{ipiq}(t_{i-1}) = \mathcal{D}_{i-1,p,i-1,q}(t_{i-1}),$$

$$\mathcal{D}_{ipj3}(t_{i-1}, t_j) = \mathcal{D}_{i-1,p,j3}(t_{i-1}, t_j), \quad j < i.$$

Учитывая выбранную форму решения (2.1), несложно получить искомые статистические характеристики случайной функции $U(x, t)$:

– математического ожидания

$$\begin{aligned}
 m_U(x, t) &\equiv \mathbb{E}[U(x, t)] = \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} m_{U_k}(t) \sin \frac{\pi k x}{L}; \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

– дисперсии

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(x, t) &\equiv \mathbb{E} \left[\{U(x, t) - m_U(x, t)\}^2 \right] = \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathcal{D}_{U_k}(t) \sin^2 \frac{\pi k x}{L}. \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

При этом на этапе практического применения соотношений (2.9), (2.10) необходимо ограничиться конечными отрезками соответствующих рядов ($1 \leq k \leq N$).

3. Данные и результаты расчетов

Пусть балка имеет длину $L = 1$ м и квадратное поперечное сечение со стороной 0,01 м. В этом случае предпоследний член в левой части уравнения (1.1) может быть опущен. Кроме того, будем считать, что сплошное упругое основание отсутствует, а сопротивление изгибу пренебрежимо мало. При

этих дополнительных предположениях для проведения расчетов использовались следующие значения параметров задачи:

$$\begin{aligned} \rho &= 8 \cdot 10^3 \frac{\kappa z}{\mathcal{M}^3}; & S &= 10^{-4} \mathcal{M}^2; \\ L &= 10,0; & \alpha_0 &= 0,05 c^{-1}; \\ \alpha_1 &= 0,0 \frac{\mathcal{M}^2}{c}; & \alpha_2 &= 0,00125 \frac{\mathcal{M}^4}{c}; \\ p_0(t) &= 10 \frac{\kappa z \cdot \mathcal{M}}{c^2}; & p(t) &= 0,5 \frac{\kappa z}{c^2}; \\ E &= 2 \cdot 10^{11} \frac{\kappa z}{\mathcal{M} \cdot c}; & I &= \frac{1}{12} 10^{-8} \mathcal{M}^4; \\ \beta &= 0,0; & \gamma &= 0,5; \\ N &= 50; & K &= 4; & T &= 1,0; \\ M &= 10; & h &= 0,001. \end{aligned}$$

Вязкоупругий член разобьем на две части и представим в форме, сходной с использовавшейся в работе [21], с соответствующими изменениями в расчетных формулах:

$$\begin{aligned} & \int_0^t R(t, s) \frac{\partial^4 U(x, s)}{\partial x^4} ds = \\ & = b_0(t, t) \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x^4} + \int_0^t b(t, s) \frac{\partial^4 U(x, s)}{\partial x^4} ds, \\ & \quad b(t, s) = \frac{\partial b_0(t, s)}{\partial s}, \\ & b_0(t, s) = \\ & = h(\theta) \left[1 - \sum_{\ell=1}^2 \mu_\ell(\theta) \left(1 - e^{-s/T_\ell(\theta)} \right) \right], \\ & h(\theta) = \frac{h_1}{h_2 \theta - 1}, \quad \theta = \theta_1 + \theta_2 \frac{t}{T_0}, \\ & \mu_1(\theta) = \mu_{10}, \quad T_1(\theta) = T_{10}, \\ & \mu_2(\theta) = \mu_{21} - \mu_{22} \theta, \\ & T_2(\theta) = \frac{T_{21}}{T_{22} \theta + (T_{23}/\theta) T_{24}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= 10,0; & h_2 &= 0,04; \\ T_0 &= 10,0; & \theta_1 &= 40,0; & \theta_2 &= 110,0; \\ \mu_{10} &= 0,08; & T_{10} &= 320,0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{21} &= 0,63; & \mu_{22} &= 0,0013; \\ T_{21} &= 60,0; & T_{22} &= 3,0; \\ T_{23} &= 73,0; & T_{24} &= 11,0. \end{aligned}$$

Далее, будем считать, что в начальный момент времени балка находилась в неподвижности, а ее неслучайный профиль описывался функцией

$$\phi(x) = \frac{x(L-x)(L/4-x)(x-2L/3)}{3L^4}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_k(0)] &= \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin \frac{\pi k x}{L} dx, \\ \mathbb{E}[U_k^2(0)] &= \{ \mathbb{E}[U_k(0)] \}^2, \\ \mathbb{E}[\dot{U}_k(0)] &= 0, \quad \mathbb{E}[\dot{U}_k^2(0)] = 0, \\ & k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Расчеты проводились в среде пакета *Mathematica* [22]. Результаты этих расчетов отображены на рис. 1 и 2, где представлено изменение математического ожидания и дисперсии (увеличено в 10^9 раз) случайной функции $U(x, t)$ с течением времени. Сравнение с поведением этих характеристик без учета вязкоупругости показывает на значимое различие этих переходных процессов.

Заключение

В данной работе были представлены алгоритм и результаты расчета первых моментов стохастических линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки для случая неразностного ядра. Анализ алгоритма показывает, что в случае необходимости он без труда может быть модифицирован для расчета моментных функций порядка выше второго. Кроме того, необходимо отметить, что изложенная схема решения стохастической задачи является полностью детерминистической, а следовательно, является более эффективной, чем любая из вариаций метода статистического моделирования [20].

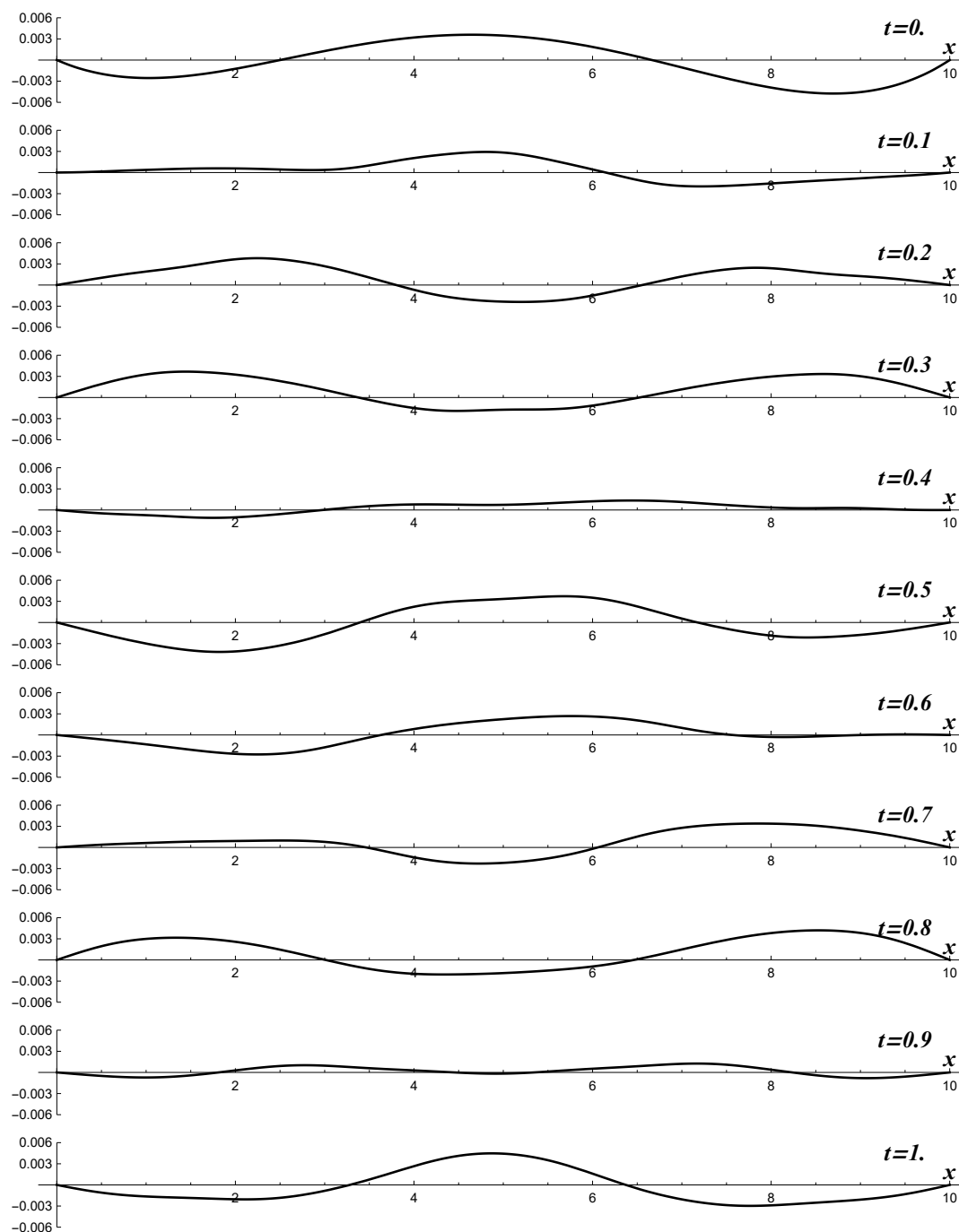


Рис. 1

Список литературы

1. *Кхием Н.Т.* Нелинейные колебания вязкоупругих пластин под действием стационарных случайных сжимающих сил // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 12. С. 115–118.
2. *Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А. и др.* Введение в аэроаэроупругость. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. *Потапов В.Д.* Устойчивость движения стохастической вязкоупругой системы // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 3. С. 137–145.
4. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
5. *Grigoriev Y.N., Ibragimov N.H., Kovalev V.F. et al.* Symmetries of integro-differential equations with applications in mechanics and plasma physics. Dordrecht: Springer, 2010.

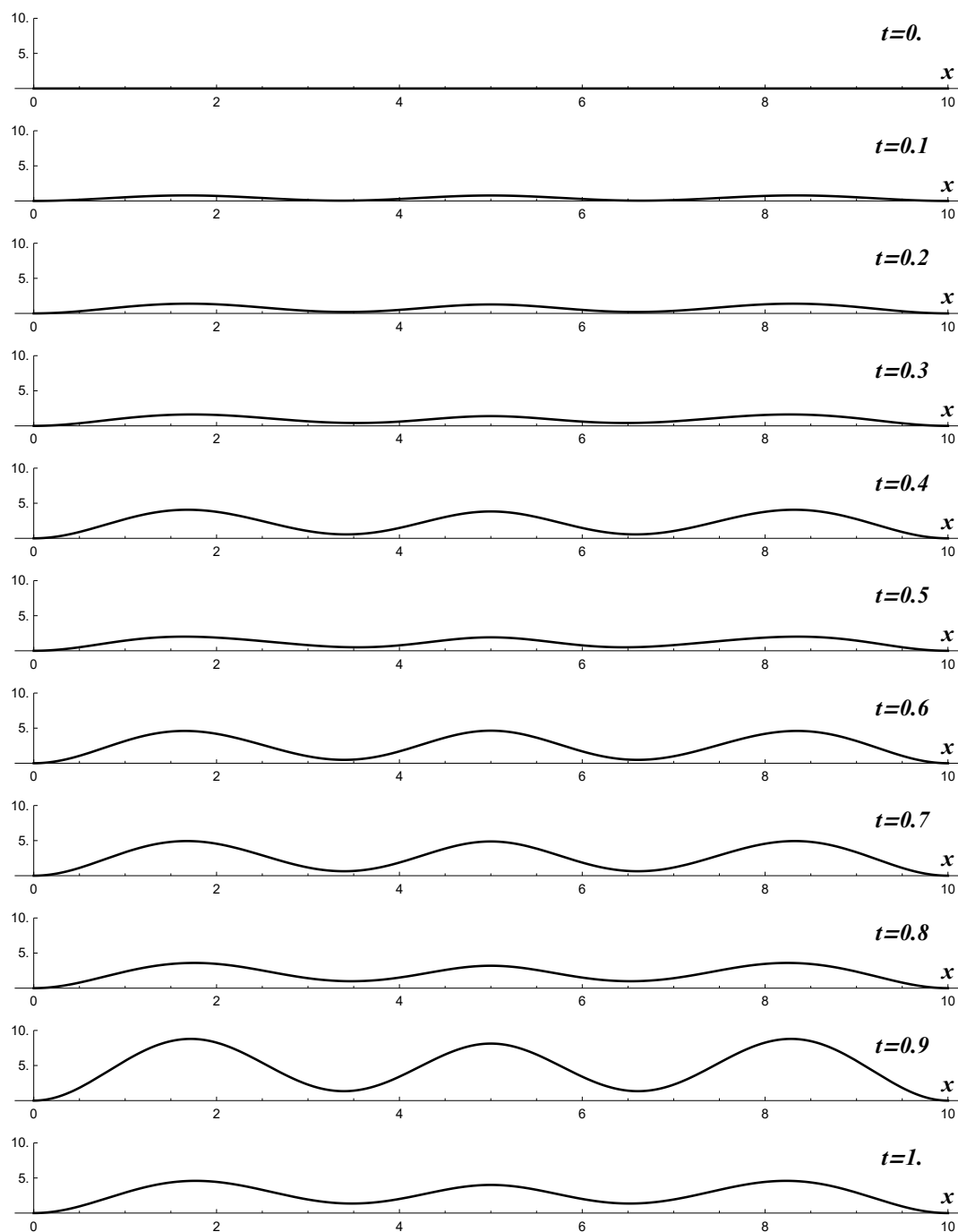


Рис. 2

- XIII, 305 p.
6. *Lakshmikantham V., Rao M.R.M.* Theory of integro-differential equations. Reading, UK: Gordon and Breach, 1995. 384 p.
 7. *Padgett W.J., Tsokos C.P.* Stochastic integro-differential equations of Volterra type // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1972. Vol. 23, № 4. P. 499–512.
 8. *Tsokos C.P., Padgett W.J.* Random integral equations with applications to stochastic systems // *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 233. Berlin: Springer, 1971. VIII, 176 p.
 9. *Tsokos C.P., Padgett W.J.* Random integral equations with applications to life sciences and engineering // *Mathematics in science and engineering*, Vol. 108. New York: Academic Press, 1974. X, 278 p.
 10. *Soize C., Poloskov I.* Time-domain formulation in computational dynamics for linear viscoelastic media with model uncertainties and stochastic excitation // *Computers & Mathe-*

- matics with Applications. 2012. Vol. 64, № 11. P. 3594–3612.
11. Полосков И.Е. Численно-аналитическая схема применения матричной функции Грина для анализа линейных систем стохастических интегро-дифференциальных уравнений // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1 (41). С. 102–117.
 12. Poloskov I.E, Soize C. Symbolic and numeric scheme for solution of linear integro-differential equations with random parameter uncertainties and Gaussian stochastic process input // Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 56, April. P. 15–31.
 13. Полосков И.Е. Об анализе некоторых классов стохастических интегро-дифференциальных уравнений // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2003. Вып. 35. С. 99–106.
 14. Полосков И.Е. О расчете первых моментов линейных интегро-дифференциальных систем с параметрическими возмущениями // Там же. Пермь, 2006. Вып. 38. С. 133–142.
 15. Полосков И.Е. О численно-аналитическом моделировании линейных поперечных колебаний вязкоупругой балки // Там же. Пермь, 2014. Вып. 46. С. 124–138.
 16. Poloskov I.E. Symbolic-numeric algorithms for analysis of stochastic systems with different forms of aftereffect // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM). 2007. Vol. 7, № 1. P. 2080011–2080012.
 17. Poloskov I.E. Numerical and analytical methods of study of stochastic systems with delay // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230, № 5. P. 746–750.
 18. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Наука, 1960. 193 с.
 19. Маланин В.В., Полосков И.Е. Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах: учеб. пособие. Ижевск: РХД, 2005. 296 с.
 20. Полосков И.Е. Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.
 21. Poloskov I.E, Soize C. Symbolic and numeric scheme for solution of linear integro-differential equations with random parameter uncertainties and Gaussian stochastic process input // Applied Mathematical Modelling. 2018. Vol. 56, April. P. 15–31.
 22. Mangano S. Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly, 2010. XXIV, 800 p.

An application of the scheme of the state space integral extension for a stochastic analysis of linear transverse vibrations for a viscoelastic beam

I. E. Poloskov

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
 polosk@psu.ru; (342) 239 65 60

This paper is devoted to an application of a modification for the scheme of the state space integral extension for the study of stochastic transverse oscillations of a hinged fixed linear viscoelastic beam arising under the influence of a random axial load as well as internal and external frictions. The research technique involves the decomposition of the beam profile into a Fourier series of sines and a derivation of a system of stochastic ordinary differential equations for the expansion coefficients. On the basis of this system, equations for the first moment functions for these coefficients are constructed. We demonstrate the results of calculations based on an algorithm that implements the proposed methodology.

Keywords: *extension of the state space; stochastic partial integro-differential equation; stochastic ordinary differential equation; beam; viscoelasticity; transverse vibration; longitudinal load; Voigt model for internal friction.*