

УДК 519.7

Об одной задаче управления тяжелой точкой, движущейся в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости

С. В. Лутманов, О. А. Хотько

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
mru@psu.ru; 8 (342)239-63-09

Решается задача построения программного управления полетом материальной точки в однородном поле тяжести с учетом сопротивления среды, пропорциональным квадрату величины скорости точки. На траекторию полета наложены фазовые ограничения, заключающиеся в том, что она лежит в некоторой полосе, непересекающейся с поверхностью земли и обрывающейся на заданной цели в конечный момент времени. Решение задачи реализовано в соответствии с методикой, разработанной в работе [2]. Приводятся результаты численного эксперимента, иллюстрирующего эффективность решения поставленной задачи.

Ключевые слова: базовое движение; возмущенное движение; линеаризованная модель; оптимальное управление; программное управление.

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-3-69-75

1. Уравнения движения управляемой точки

Предполагается, что движение управляемой материальной точки происходит в однородном поле тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости точки. Начало абсолютной системы координат $Oxyz$ помещаем на поверхность земли на место старта управляемой точки. Ось Oz направляем вертикально вверх (см. рис. 1).

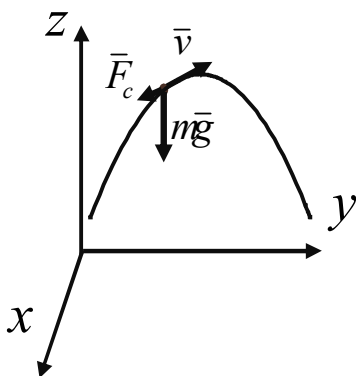


Рис. 1

Уравнения управляемого движения точки в выбранной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + v_1, \\ m\ddot{y} &= -k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} + v_2, \\ m\ddot{z} &= -k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \cdot \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - mg + v_3, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_1, \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \frac{1}{m} v_2, \\ \ddot{z} &= -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - g + \frac{1}{m} v_3, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где m – масса точки, $k = const$ – коэффициент

пропорциональности и $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in R^3$ – вектор управляющих параметров.

2. Описание кинематики полета и постановка задачи

Полет управляемой точки начинается в момент времени t_0 и заканчивается в момент времени $T > t_0$ на поверхности земли в положении x_T, y_T, z_T . Сначала точку подбрасывают вверх с поверхности земли. Этот этап ее движения в работе не моделируется. В результате точка принимает положение x_0, y_0, z_0 и приобретает начальную скорость $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. При этом точка должна находиться на расстоянии не менее $\varepsilon > 0$ и не более $2\varepsilon > 0$ от поверхности земли, а ее начальные горизонтальные координаты x_0, y_0 мало отличаться от нулей. Относительно вектора скорости принимается, что

$$\dot{x}_0 \approx \frac{x_T}{T-t_0}, \dot{y}_0 \approx \frac{y_T}{T-t_0}, \dot{z}_0 \approx \frac{z_T - z_0}{T-t_0}.$$

Рельеф местности моделируется гладкой функцией двух переменных $\varphi: R^2 \rightarrow R^1$. На начальном этапе полета должно выполняться двойное неравенство

$$\varphi(x(t), y(t)) + \varepsilon \leq z(t) \leq \varphi(x(t), y(t)) + 2\varepsilon, \\ t \in [t_0, t^*],$$

где $t^* \in [t_0, T]$ – заданный момент времени. Далее ε – полоса сужается и в конечный момент времени T вырождается в точку, совпадающую с целью полета. Указанное требование реализуется посредством выполнения двойного неравенства

$$\varphi(x(t), y(t)) + \varepsilon \cdot \left(\frac{T-t}{T-t^*} \right) \leq z(t) \leq \\ \leq \varphi(x(t), y(t)) + 2\varepsilon \cdot \left(\frac{T-t}{T-t^*} \right), \quad t \in [t^*, T]$$

на заключительном этапе полета.

Управление движением точки будем осуществлять в классе программных стратегий.

Определение 1. Произвольная интегрируемая вектор-функция $v: [t_0, T] \rightarrow R^3$, называется программным управлением точкой на промежутке времени $[t_0, T]$.

Сформулируем основную задачу, решаемую в данной статье.

Задача 1. Определить программное управление $v^0(\cdot)$ точкой, обеспечивающее выполнение требований, предъявляемых к кинематике полета точки сформулированных в данном пункте.

3. Построение базовой траектории и базового программного управления

Решение задачи 1 начинается с построения кинематического закона движения точки удовлетворяющего всем требованиям, предъявляемых к кинематике полета.

С этой целью полагаем

$$\hat{x}_0 = 0, \hat{y}_0 = 0, \quad \dot{\hat{x}}_0 = \frac{x_T - \hat{x}_0}{T-t_0}, \dot{\hat{y}}_0 = \frac{y_T - \hat{y}_0}{T-t_0}, \\ \hat{x}(t) = \hat{x}_0 + \dot{\hat{x}}_0(t-t_0), \\ \hat{y}(t) = \hat{y}_0 + \dot{\hat{y}}_0(t-t_0), \quad t \in [t_0, T]. \\ t_0^{Tr} = t_0, t_1^{Tr} = t_0^{Tr} + \Delta, \dots, t_s^{Tr} = t_{s-1}^{Tr} + \Delta = T, \\ \Delta = \frac{T-t_0}{s} \quad (3.1)$$

Не теряя общности, считаем, что для некоторого номера $s_c < s$ выполняется равенство $t_{s_c}^{Tr} = t^*$. В противном случае разбиение промежутка времени $[t_0, T]$ можно сделать частично неравномерным.

Далее набирается массив точек

$$(t_0^{Tr}, z_0^{Tr}), (t_1^{Tr}, z_1^{Tr}), \dots, (t_s^{Tr}, z_s^{Tr}), \quad (3.2)$$

где

$$z_0^{Tr} = \varphi(0, 0) + 2\varepsilon, \\ z_1^{Tr} \in \left[\varphi(\hat{x}(t_1^{Tr}), \hat{y}(t_1^{Tr})) + \varepsilon, \right. \\ \left. \varphi(\hat{x}(t_1^{Tr}), \hat{y}(t_1^{Tr})) + 2\varepsilon \right], \\ \dots \\ z_{s_c}^{Tr} \in \left[\varphi(\hat{x}(t_{s_c}^{Tr}), \hat{y}(t_{s_c}^{Tr})) + \varepsilon, \right. \\ \left. \varphi(\hat{x}(t_{s_c}^{Tr}), \hat{y}(t_{s_c}^{Tr})) + 2\varepsilon \right], \\ z_{s_c+1}^{Tr} \in \left[\varphi(\hat{x}(t_{s_c+1}^{Tr}), \hat{y}(t_{s_c+1}^{Tr})) + \varepsilon \cdot \frac{T-t_{s_c+1}^{Tr}}{T-t_{s_c}^{Tr}}, \right. \\ \left. \varphi(\hat{x}(t_{s_c+1}^{Tr}), \hat{y}(t_{s_c+1}^{Tr})) + 2\varepsilon \cdot \frac{T-t_{s_c+1}^{Tr}}{T-t_{s_c}^{Tr}} \right], \\ \dots \\ z_{s-1}^{Tr} \in \left[\varphi(\hat{x}(t_{s-1}^{Tr}), \hat{y}(t_{s-1}^{Tr})) + \varepsilon \cdot \frac{T-t_{s-1}^{Tr}}{T-t_{s_c}^{Tr}}, \right. \\ \left. \varphi(\hat{x}(t_{s-1}^{Tr}), \hat{y}(t_{s-1}^{Tr})) + 2\varepsilon \cdot \frac{T-t_{s-1}^{Tr}}{T-t_{s_c}^{Tr}} \right], \\ z_s^{Tr} = z_T$$

Функциональная зависимость

$$\hat{z}(t) = \hat{f}(t), \quad t \in [t_0, T]$$

устанавливается путем интерполяции массива точек (3.2). В результате получим

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i.$$

Определение 2. Кинематический закон движения точки

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{x}_0 + \dot{\hat{x}}_0(t-t_0), \\ \hat{y}(t) &= \hat{y}_0 + \dot{\hat{y}}_0(t-t_0), \\ \hat{z}(t) &= \hat{f}(t), \quad t \in [t_0, T] \end{aligned} \quad (3.3)$$

будем называть базовым законом движения.

Непосредственно проверяется, что он удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кинематике полета из пункта 2.

Определение 3. Программное управление

$$v = \hat{v}(t), \quad t \in [t_0, T],$$

реализующее базовый закон движения точки, назовем базовым программным управлением.

Для построения базового программного управления уравнения (1.1) разрешаем относительно управлений:

$$\begin{aligned} v_1 &= m\ddot{x} + k\dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \\ v_2 &= m\ddot{y} + k\dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \\ v_3 &= m\ddot{z} + k\dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + mg. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Базовый закон движения (3.3) подставим в уравнения (3.4). В результате получаем искомые базовые управления

$$\begin{aligned} \hat{v}_1(t) &= m\ddot{\hat{x}}(t) + \\ &+ k\dot{\hat{x}}(t) \cdot \sqrt{\dot{\hat{x}}^2(t) + \dot{\hat{y}}^2(t) + \dot{\hat{z}}^2(t)}, \\ \hat{v}_2(t) &= m\ddot{\hat{y}}(t) + \\ &+ k\dot{\hat{y}}(t) \cdot \sqrt{\dot{\hat{x}}^2(t) + \dot{\hat{y}}^2(t) + \dot{\hat{z}}^2(t)}, \\ \hat{v}_3(t) &= m\ddot{\hat{z}}(t) + \\ &+ k\dot{\hat{z}}(t) \cdot \sqrt{\dot{\hat{x}}^2(t) + \dot{\hat{y}}^2(t) + \dot{\hat{z}}^2(t)} + mg. \end{aligned}$$

4. Возмущенные движения и возмущения

Из приближенных равенств

$$\begin{aligned} x_0 &\approx \hat{x}_0, y_0 \approx \hat{y}_0, z_0 \approx \hat{z}(t_0), \\ \dot{x}_0 &\approx \dot{\hat{x}}_0, \dot{y}_0 \approx \dot{\hat{y}}_0, \dot{z}_0 \approx \dot{\hat{z}}(t_0) \end{aligned}$$

следует корректность представления

$$\begin{aligned} x_0 &= \hat{x}_0 + \delta x_0, y_0 = \hat{y}_0 + \delta y_0, z_0 = \hat{z}(t_0) + \delta z_0, \\ \dot{x}_0 &= \dot{\hat{x}}_0 + \delta \dot{x}_0, \dot{y}_0 = \dot{\hat{y}}_0 + \delta \dot{y}_0, \dot{z}_0 = \dot{\hat{z}}(t_0) + \delta \dot{z}_0, \end{aligned}$$

где величины $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta \dot{x}_0, \delta \dot{y}_0, \delta \dot{z}_0$ малы.

Определение 4. Решение

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}(t), \quad y(t) = \tilde{y}(t), \quad z = \tilde{z}(t), \\ t &\in [t_0, T] \end{aligned}$$

системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \\ &+ \frac{1}{m} \hat{v}_1(t), \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \\ &+ \frac{1}{m} \hat{v}_2(t), \\ \ddot{z} &= -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \\ &-g + \frac{1}{m} \hat{v}_3(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 \end{aligned}$$

назовем возмущенным движением.

Определение 5. Разности

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= \tilde{x}(t) - \hat{x}(t), \quad \delta y(t) = \tilde{y}(t) - \hat{y}(t), \\ \delta z(t) &= \tilde{z}(t) - \hat{z}(t), \quad t \in [t_0, T] \end{aligned}$$

назовем возмущениями.

В случае, если в некоторый момент времени возмущения и их производные обратятся в ноль, то начиная с этого момента времени возмущенное движение совпадет с базовым и, следовательно, удовлетворит требованиям, предъявляемым к кинематическому закону движения точки. Обращение в ноль возмущений будем осуществлять посредством дополнительных управлений u_1, u_2, u_3 , которые введем в дифференциальные уравнения движения (1.1) аддитивно основным управлением, т. е.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m} \dot{x} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \\ &+ \frac{1}{m} (v_1 + u_1), \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m} \dot{y} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \\ &+ \frac{1}{m} (v_2 + u_2), \end{aligned}$$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m} \dot{z} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - g + \frac{1}{m}(v_3 + u_3). \quad (4.2)$$

Динамика возмущений с высокой степенью точности описывается линеаризованной в окрестности пары "базовое движение, базовое управление" системы дифференциальных уравнений (1.1).

Заменой переменных

$$x = y_1, \quad y = y_2, \quad z = y_3,$$

$$\dot{x} = y_4, \quad \dot{y} = y_5, \quad \dot{z} = y_6$$

нормализуем уравнения (1.1). В результате получим

$$\dot{y}_1 = y_4,$$

$$\dot{y}_2 = y_5,$$

$$\dot{y}_3 = y_6,$$

$$\dot{y}_4 = -\frac{k}{m} \dot{y}_4 \cdot \sqrt{\dot{y}_4^2 + \dot{y}_5^2 + \dot{y}_6^2} + \frac{1}{m}(v_1 + u_1),$$

$$\dot{y}_5 = -\frac{k}{m} \dot{y}_5 \cdot \sqrt{\dot{y}_4^2 + \dot{y}_5^2 + \dot{y}_6^2} + \frac{1}{m}(v_2 + u_2),$$

$$\dot{y}_6 = -\frac{k}{m} \dot{y}_6 \cdot \sqrt{\dot{y}_4^2 + \dot{y}_5^2 + \dot{y}_6^2} - g + \frac{1}{m}(v_3 + u_3).$$

Обозначим

$$\hat{y}_1(t) = \hat{x}(t), \quad \hat{y}_2(t) = \hat{y}(t), \quad \hat{y}_3(t) = \hat{z}(t),$$

$$\hat{y}_4(t) = \dot{\hat{x}}(t), \quad \hat{y}_5(t) = \dot{\hat{y}}(t), \quad \hat{y}_6(t) = \dot{\hat{z}}(t),$$

$$t \in [t_0, T],$$

$$Y_4(y_4, y_5, y_6, v_1) = -\frac{k}{m} \dot{y}_4 \cdot \sqrt{\dot{y}_4^2 + \dot{y}_5^2 + \dot{y}_6^2} +$$

$$+\frac{1}{m}v_1,$$

$$Y_5(y_4, y_5, y_6, v_1) = -\frac{k}{m} \dot{y}_5 \cdot \sqrt{\dot{y}_4^2 + \dot{y}_5^2 + \dot{y}_6^2} +$$

$$+\frac{1}{m}v_2,$$

$$Y_6(y_4, y_5, y_6, v_1) = -\frac{k}{m} \dot{y}_6 \cdot \sqrt{\dot{y}_4^2 + \dot{y}_5^2 + \dot{y}_6^2} -$$

$$-g + \frac{1}{m}v_3.$$

Тогда искомая линеаризованная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (4.3)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Y_4}{\partial y_4} & \frac{\partial Y_4}{\partial y_5} & \frac{\partial Y_4}{\partial y_6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Y_5}{\partial y_4} & \frac{\partial Y_5}{\partial y_5} & \frac{\partial Y_5}{\partial y_6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial Y_6}{\partial y_4} & \frac{\partial Y_6}{\partial y_5} & \frac{\partial Y_6}{\partial y_6} \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Y_4}{\partial v_1} & \frac{\partial Y_4}{\partial v_2} & \frac{\partial Y_4}{\partial v_3} \\ \frac{\partial Y_5}{\partial v_1} & \frac{\partial Y_5}{\partial v_2} & \frac{\partial Y_5}{\partial v_3} \\ \frac{\partial Y_6}{\partial v_1} & \frac{\partial Y_6}{\partial v_2} & \frac{\partial Y_6}{\partial v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

5. Приведение вектора возмущений в начало координат и решение основной задачи

Поставим задачу о построении дополнительного управления $u(\cdot)$, приводящего вектор возмущений в начало координат в момент времени t^* .

Эту задачу аппроксимируем задачей о приведении фазового вектора линейного управляемого объекта (4.2) из начального положения

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= \delta x_0, \quad x_2(t_0) = \delta y_0, \\ x_3(t_0) &= \delta z_0, \quad x_4(t_0) = \delta \dot{x}_0, \\ x_5(t_0) &= \delta \dot{y}_0, \quad x_6(t_0) = \delta \dot{z}_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

в начало координат в момент времени t^* . Предполагая, что на вектор управляющих параметров u не налагается геометрических

ограничений, дополнительно потребуем, чтобы среди всех других программных управлений, решающих задачу наведения фазового вектора линейного объекта на начало координат, искомое программное управление доставляло наименьшее значение функционалу

$$I[u(\cdot)] = \left[\int_{t_0}^{t^*} \langle u(\tau), u(\tau) \rangle d\tau \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.2)$$

В литературе, например [1], величина (5.2) считается пропорциональной энергетическим затратам, и поэтому задача управления по критерию (5.2) носит название задачи управления на "минимум энергии".

Таким образом, дополнительное программное управления $u^0(\cdot)$ находится как решение следующей задачи.

Задача 2. *Определить программное управление $u^0(\cdot)$, переводящее фазовый вектор управляемого линейного динамического объекта (4.3) из начального положения (5.1) в начало координат в момент времени t^* и при этом доставляющее минимум функционалу (5.2).*

Следуя монографии [1] и учебному пособию [3] изложим кратко алгоритм решения задачи 2. Пусть

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} x_{11} t, \tau & \dots & x_{16} t, \tau \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{61} t, \tau & \dots & x_{66} t, \tau \end{pmatrix}, \quad t, \tau \in t_0, T$$

– фундаментальная матрица Коши для однородного векторного дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)$.

Полагаем

$$H[T, t] = X[T, t]B(t) = \begin{pmatrix} h^{(1)}(t) \\ \dots \\ h^{(6)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)}(t) & h_2^{(1)}(t) & h_3^{(1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_1^{(6)}(t) & h_2^{(6)}(t) & h_3^{(6)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0, T].$$

Матрицу $H[T, t]$, $t \in [t_0, T]$ назовем переходной матрицей линейного динамического объекта. Символом

$$h^{(i)}(t) = (h_1^{(i)}(t) \quad h_2^{(i)}(t) \quad h_3^{(i)}(t)), \quad i = 1, \dots, 6$$

обозначим i -ю строку переходной матрицы.

Оптимальное управление $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, строится по формуле

$$u^0(\cdot) = \sum_{i=1}^6 \gamma_i^0 (h^{(i)}(\cdot))^T,$$

в которой числа $\gamma_1^0, \dots, \gamma_6^0$ являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{16} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{61} & \dots & \alpha_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_6 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_{t_0}^{t^*} \langle (h^{(i)}(\tau))^T, (h^{(j)}(\tau))^T \rangle d\tau, \quad i, j = 1, \dots, 6,$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_6 \end{pmatrix} = -X[t^*, t_0]x_0.$$

Программное управление $v^0(\cdot)$, решающее основную задачу 1, строится по формуле

$$v^0(t) = \begin{cases} \hat{v}(t) + u^0(t), & t \in [t_0, t^*] \\ \hat{v}(t) & t \in (t^*, T] \end{cases}.$$

6. Численный эксперимент

Изложенная выше теория иллюстрируется на следующих числовых данных:

$$k = 0.45, m = 100 \text{ кг}, g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2},$$

$$\varepsilon = 30 \text{ м}, t_0 = 0, T = 10 \text{ сек},$$

$$\varphi(x, y) = 50 \cdot \sin(0.00005 \cdot x \cdot y) \text{ м},$$

$$x_0 = -40 \text{ м}, y_0 = 20 \text{ м}, z_0 = 40 \text{ м},$$

$$x_T = 3000 \text{ м}, y_T = 100 \text{ м},$$

$$z_T = \varphi(x_T, y_T) = 32.51 \text{ м},$$

$$\dot{x}_0 = 310 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \dot{y}_0 = -10 \frac{\text{м}}{\text{сек}},$$

$$\dot{z}_0 = -12.75 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, s = 100,$$

$$t^* = 5 \text{ сек} \Rightarrow s_c = 50, n = 15.$$

Приведем графики совместной реализации во времени координаты $z(t)$ точки и

профиля рельефа местности $\varphi(x(t), y(t))$ вдоль траектории движения точки (профиль рельефа местности вдоль траектории изображен на графиках жирной линией).

На рис. 2 изменение координаты $z(t)$ отвечает базовому движению точки

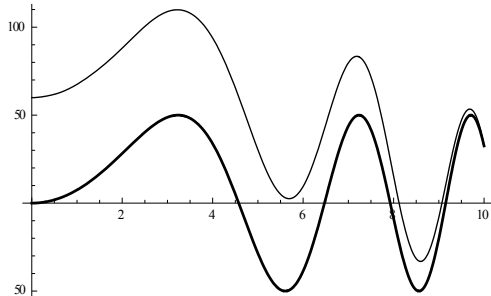


Рис. 2

На рис. 3 изменение координаты $z(t)$ отвечает возмущенному движению точки

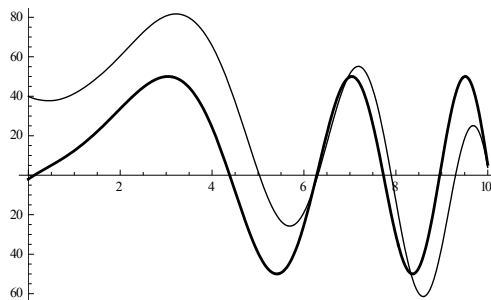


Рис. 3

Из графика видно, что в случае возмущенного движения на втором этапе полета точка врзается в землю, не долетев до цели.

На рис. 4 изменение координаты $z(t)$ отвечает откорректированному движению точки.

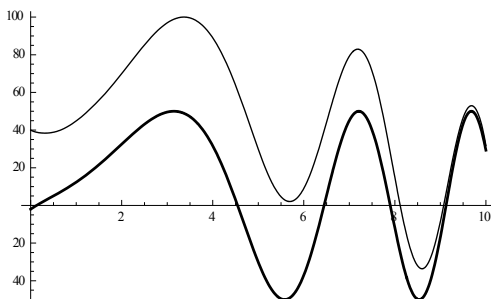


Рис. 4

На рис. 5 приведен график высоты полета точки в зависимости от времени для откорректированного движения.

Из графика видно, что откорректированный закон движения точки удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым в пункте 2 к кинематике полета.

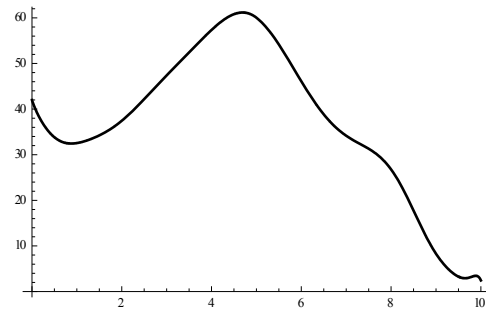


Рис. 5

В заключение вычислим величину промаха по цели для возмущенного полета (в предположении, что столкновение с землей полет не прервало) с промахом в откорректированном движении.

Величина промаха для возмущенного движения

$$\sqrt{(\tilde{x}(T) - x_T)^2 + (\tilde{y}(T) - y_T)^2 + (\tilde{z}(T) - z_T)^2} = 70.49 \text{ м.}$$

Величина промаха для откорректированного движения

$$\sqrt{(x^0(T) - x_T)^2 + (y^0(T) - y_T)^2 + (z^0(T) - z_T)^2} = 2.81 \text{ м.}$$

Заключение

В статье решена задача наведения на цель управляемой точки, движущейся в однородном поле тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату величины скорости точки и с учетом фазовых ограничений на траекторию полета. В случае не точного выполнения начальных условий на старте в работе предусмотрено введение дополнительного программного управления, возвращающего точку на базовую траекторию. Дополнительное управление при этом является оптимальным в смысле критерия "минимум энергии".

Результаты численного эксперимента подтверждают корректность примененных алгоритмов решения задачи.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

2. Лутманов С.В. Об одной методике исследования управляемой динамической системы лиц // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(36). С. 13–20.
3. Лутманов С.В. Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях: учеб. пособие / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2010. 200 с.

On a problem of control of a heavy point moving in a medium with resistance proportional to the square of the speed

S. V. Lutmanov, O. A. Khot'ko

Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
mpu@psu.ru; 8 (342) 239-63-09

The article solves the problem of aiming at the target of a material point in a uniform gravity field, taking into account the resistance of the medium proportional to the square of the point velocity. The flight path is subject to phase constraints, which are that it lies in a certain band that does not intersect with the earth's surface and breaks off at a given target at a finite time. The results of a numerical experiment illustrating the effectiveness of the solution of the problem are presented.

Keywords: *basic motion; perturbed motion; linearized model; optimal control; software control.*