

УДК 539.374.376

О влиянии повреждающихся связей на объемную упругость и деформационную анизотропию зернистых композитов

К. Ф. Комков

Военно-технический университет (расформирован в 2014 г.)

Россия, 142455, Московская область, г. Электроугли, ул. Октября, 3-49

06kfk38@mail.ru

Рассматривается развитие математической модели, основанной на тензорно-нелинейных уравнениях для проведения исследований механических свойств сред, деформация которых сопровождается изменением внутренних связей. Результаты статических испытаний под действием активной пропорциональной нагрузки при растяжении, сжатии с определением коэффициентов поперечной деформации и кручении образцов композита до разрушения, а также крестообразных образцов при повторно статическом растяжении, позволяют выявить эффект изменения упругости, который вызван разрывом связей при положительных напряжениях и их возрастанием при отрицательных. Анализ результатов испытаний и экспериментальных работ других авторов с помощью математической модели привел к выводу, что основной причиной этой особенности является поведение слабых связей, которые разрушаются при малых положительных деформациях. После их разрушения возникает анизотропия с осями симметрии, совпадающими с главными напряжениями, которая проявляется различием продольных модулей упругости, коэффициентами поперечных деформаций и объемных модулей упругости по каждому направлению. Упомянутые уравнения, преобразованные к матричному виду, дают возможность получить уравнение связи средней деформации с главными напряжениями, включающее в себя три модуля объемной упругости, два из которых названы "кажущимися". Преобразованные уравнения позволяют найти соотношения для определения продольных модулей упругости и коэффициентов поперечных деформаций, на основе которых разработана методика определения модулей объемной упругости и параметра разрыхления.

Высокие значения "кажущихся" модулей, превышающих значение "классического", найденного по начальным опытным данным при растяжении, говорят не о возрастающей жесткости материала при разрыве связей, а свидетельствуют о малости линейной объемной деформации и больших значениях нелинейной части объемной деформации – дилатансии, вызванной процессом разрушения внутренних связей между частицами наполнителя. Податливости объемной упругости, как величины, обратные модулям, представляются плавными и неразрывными функциями главных напряжений. Податливости позволяют определять общую объемную деформацию для любого напряженного состояния и уровня нагрузки. По начальным значениям "кажущихся" модулей или податливостей определяются три параметра изменяющейся упругости, характеризующие состояние связей, как отношение "классического" модуля к модулям объемной упругости. Последние дают представление о сохранившихся связях и приобретенных в результате изменения взаимодействия частиц наполнителя.

Ключевые слова: *формоизменение; дилатансия; модуль объемной упругости; податливость; "классический" модуль; параметр разрыхления; параметр изменяющейся упругости; анизотропия.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-3-39-53

1. Введение

1.1. Историческая справка

Еще в 1970-х годах прошлого столетия L. Mullins [1] посвятил несколько работ изучению эффекта размягчения резин с разными наполнителями. Сравнивая диаграммы растяжения повторного нагружения одного и того же образца до напряжений ниже предельных, ему удалось выявить целый спектр связей разных по адгезионной прочности. Заметную роль в этом спектре проявляют короткие связи, названные им "водными", разрушающиеся при весьма малых деформациях. Примерно в те же годы В.В. Мошев [2], изучая подобный эффект по результатам испытаний зернистых композитов показал, что поведение этого композита соответствует структурно-феноменологической модели, представленной в работе [2]. Она отчетливо показывает процесс образования повреждений, который сопровождается последовательным разрывом связей разной жесткости, названных им повреждающимися, с освобождением их и связанных с ними частиц материала от передачи напряжений. Показана возможность подбора таких повреждающихся элементов модели, которые способны описать поведение реального композита при одноразовом непрерывном испытании без разгрузки.

Подобные исследования проводились в Учебно-экспериментальном Центре МГТУ им. Баумана. Испытания образцов из плоских пластин и цилиндрических заготовок с размером сечения, в котором укладываются более 10 зерен наполнителя на растяжение и сжатие с измерением поперечных деформаций и при простом сдвиге, описанных в работе [3]. А также испытания крестообразных образцов при повторно статическом нагружении позволили показать, что процесс деформирования этих сред сопровождается последовательным разрывом связей как по направлению действующего напряжения, так и по взаимно перпендикулярным направлениям, что приводит к изменению технических характеристик материала.

По результатам этих исследований получила развитие математическая модель [3], основанная на тензорно-нелинейных уравнениях В.В. Новожилова [4].

1.2. О деформационной анизотропии при растяжении, вызванной разрыхлением

На рис. 1, а приведена кривая 1 – восходящая и нисходящая ветви диаграммы при первом цикле активной деформации по оси 1–1 и кривая 2 – диаграмма второго цикла, где P – сила в N , Δl – удлинение в миллиметрах. При разгрузке кривая резко снижается, что говорит о существенном снижении количества слабых, повреждающихся связей. Восходящая ветвь второго цикла иллюстрирует сопротивление оставшихся "длинных" и восстановившихся "повреждающихся" связей.

На рис. 1, б кривая 1 является восходящей ветвью диаграммы испытания образца по оси 2–2 при первом цикле растяжения. Для сравнения приведена диаграмма – штриховая кривая, отмечающая исходные свойства композита.

Разница диаграмм первых циклов по разным направлениям говорит о том, что разрыв связей происходит и в поперечном направлении по оси 2-2, при растяжении по оси 1–1. Первая кривая показывает, что повреждающиеся связи по направлению оси 2–2 сохраняются не полностью.

Разница диаграмм (восходящих ветвей) растяжения по оси 1–1 и 2–2 представляет реальную, как отмечал В.В. Новожилов в работе [4], "настоящую" деформационную анизотропию. Отрезок прямой между началом нагрузки и концом разгрузки – остаточное удлинение – при эластичной матрице свидетельствует не о наличии пластической деформации, а о возрастании стартовых дефектов и, как обнаружил В.В. Мошев [2], присутствии внутренних сил трения при разгрузке. Анализ кривых на рис. 1, а показывает, что для зернистых композитов линии разгрузки и повторной нагрузки не являются прямыми, а модули, не имея соответствующей геометрической интерпретации (как секущие модули пластических материалов) являются математическими величинами, связывающими деформации с вызвавшими их напряжениями. Термин "разрыхление", используемый здесь, а ранее введенный В.В. Новожиловым [4], вместо "размягчения", находит распространение, и в большей степени отражает эффект, приводящий к росту объемной деформации, он относится к композитам и другим материалам с изменяющейся структурой. Повреждаемость связей, последующее разрыхление, утрата

упругости составляют основной внутренний механизм деформации таких материалов, существенно отражающийся на объемной деформации. Его проявление зависит от скорости деформации: при постоянной нагрузке он объединяется с ползучестью, а при постоянной деформации – с релаксацией напряжений. Считая, что временные эффекты и влияние внешнего давления могут быть учтены в будущем, как предлагается, например, в работе [2], разрабатываемая модель материала опирается на соотношения механики деформиру-

емой идеально упругой среды. Результаты испытаний для нее проведены при одной скорости деформации до разрушения. Представление об идеальной упругости эластомера и возможность использования деформационной модели является необходимым шагом, чтобы найти путь к учету главной его особенности – разрыхлению, вызванному повреждением физических и химических связей на границе минерального наполнителя с полимерной матрицей и внутри ее объема.

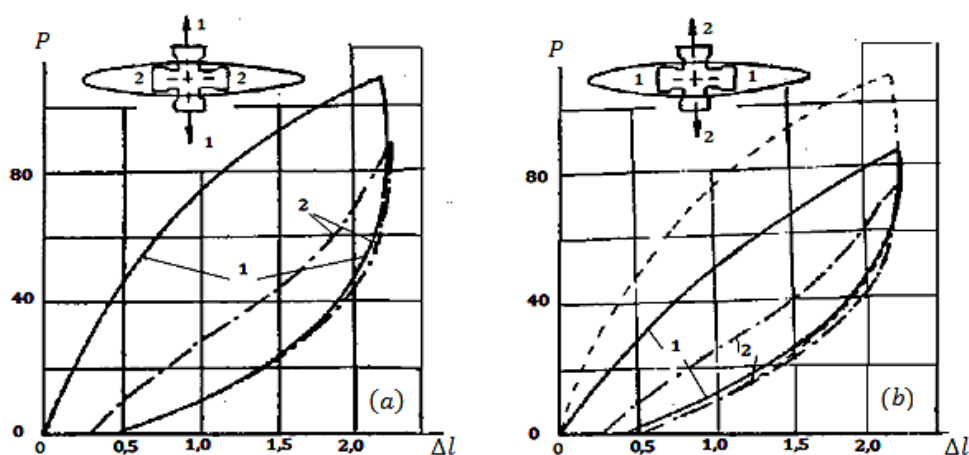


Рис. 1. Графики испытаний крестообразных образцов при повторно статическом растяжении до 6 % (а) по оси 1 – 1; (б) по оси 2 – 2; сплошная линия – первый цикл с разрушкой, штрих – пунктирная – второй цикл с разгрузкой после 3-минутного отдыха

1.2. Постановка задачи исследования

Цель данной работы – показать, что при разрыхлении происходит не только хаотичная потеря внутренних связей, которая снижает упругость, но и процесс, который создает деформационную анизотропию с осями, совпадающими с направлениями главных напряжений. Наличие этого процесса выявляется техническими характеристиками, найденными с помощью математической модели: теоретическими коэффициентами поперечных деформаций, модулями продольной упругости и объемной упругости и параметра разрыхления, после сравнения с результатами испытаний. Параметры изменяющейся упругости дают возможность количественно оценить деформационную анизотропию и степень поврежденности в зависимости от вида напряженного состояния.

Их достоверность подтверждается совмещением кривых, рассчитанных методикой,

с кривыми, полученными по результатам испытаний. Подробное описание закона изменения объемной деформации и закона формоизменения с учетом эффекта разрыхления свидетельствует о взаимосвязи этих деформаций и показывает, что при этом проявляется существенное различие названных законов.

1.3. О подготовке исходных данных для расчетов характеристик упругости

Испытания стандартного образца до разрушения с определением поперечных деформаций позволяют получить диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$ и опытные кривые $\nu_i \sim \varepsilon$, где σ – напряжение, ε – продольная деформация, ν – коэффициент поперечных деформаций, которые представляют исходные свойства материала. Предельная деформация при растяжении рассматриваемого композита составляет примерно 15 %. Если она при разрушении превышает 10 %, то приходится ограничиться частью этой диаграммы, например 8 %, чтобы

не выходить за пределы используемой ниже теории. Пропорциональное изменение напряжений при испытаниях и использование диаграмм (одноразового испытания) [2] в качестве исходных данных, полностью снимают вопросы об остаточных деформациях и модулях при разгрузке. С их помощью подготавливаются диаграммы $S_0 \sim e_0$ в виде графиков или таблиц, где интенсивность напряжений

$$S_0 = \left(\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right)^{1/2}, \quad (1.1)$$

интенсивность деформации

$$e_0 = \left(2 \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}{9} \right)^{1/2}, \quad (1.2)$$

ε_i – главные деформации; σ_i – главные напряжения.

Следует отметить, что для чистого сдвига подобные данные не всегда могут быть в наличии или они получены при испытаниях с помощью другой оснастки и способа измерения деформаций. Для восстановления отсутствующей информации иногда можно воспользоваться приближенными выражениями. Приводим формулы для определения интенсивности напряжений при сдвиге,

$$S_{0\tau} = \sqrt{2} S_{0p} S_{0c} \left(\left(\frac{S_{0p} e_{0c}}{e_{0\tau}} \right)^2 + \left(\frac{S_{0c} e_{0p}}{e_{0\tau}} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (1.4)$$

и данные об инварианте $e_{0\tau}$ определяются так же:

$$e_{0\tau} = \sqrt{3} \frac{S_{0\tau}}{c_\tau} \left(\frac{e_{0p}}{S_{0p}} + \frac{e_{0c}}{S_{0c}} \right), \quad (1.5)$$

где $c_\tau = 3 \cos \psi + \sqrt{3} \sin \psi$. При допущении, что при углах $\theta = \pi / 6$, $\theta \cong \psi$, значение $c_\tau \cong 3.464$, θ и ψ – углы вида напряженного и деформированных состояний.

Сравнение результатов испытаний при простом сдвиге с расчетами по (1.5) показало, что они отличаются незначительно. Обоснование вывода этих соотношений будет проведено в разделах 2 и 3. Дискретные значения переменных S_0 , σ_0 , e_0 , ε_0 являются исходными данными для методики определения характеристик и параметров. Используя математическую модель, они позволяют провести совмещение кривых по данным о коэффициентах поперечных деформаций, полученных испытаниями и расчетом, что будет описано подробнее ниже.

2. О математической модели зернистых композитов

Структурно-феноменологическая модель В.В. Мошева качественно отражает механизм деформации зернистых композитов при растяжении. Однако для решения практических задач требуется математическая модель, которая давала бы возможность определять деформационные характеристики, в том числе и параметры, введенные в нее, в широком диапазоне изменений напряжений и напряженных состояний. Первые варианты подобной модели представлены в работах [5] и [6], которые в последнее время получили существенное развитие.

2.1. Уравнения связи девиатора деформаций с девиатором напряжений

В основу математической модели положены тензорно-нелинейные уравнения связи девиатора деформаций e_{ij} с девиатором напряжений S_{ij} [4], которые после приведения к осям, совпадающими с главными касательными напряжениям, принимают следующую форму:

$$e_{ij} = \frac{\Phi_m}{2} S_{ij} + \frac{\Phi_d}{S_0} \left(S_{ia} S_{aj} - \frac{2}{9} S_0^2 \delta_{ij} \right). \quad (2.1)$$

Теория В.В. Новожилова излагается здесь применительно к малым деформациям. Их материальные функции имеют физический смысл характеристик материала: Φ_m – средней податливости сдвигу и Φ_d – средне-квадратической податливости.

2.2. Определение характеристик формоизменения

Использование уравнений (2.1) и определения (1.2), дает вывод связи между интенсивностью деформаций с интенсивностью напряжений (1.1), который позволяет найти обобщенную податливость [5]:

$$\Phi_\theta = \left(\Phi_m^2 + \frac{4}{3} \Phi_m \Phi_d \cos 3\theta + \frac{4}{9} \Phi_d^2 \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Она является обратной величиной обобщенного модуля сдвига G , введенного в [4], который вместе с фазой подобия девиаторов

$$\omega = \arctg \frac{2\Phi_d \sin 3\theta}{3\Phi_m + 2\Phi_d \cos 3\theta} \quad (2.3)$$

предложены в работе [4], как основные характеристики нелинейной теории упругости.

Опыт проведенных ранее исследований [3, 5 и 6], показал, что их место вполне может быть занято характеристиками формоизменения Φ_m и Φ_d , поскольку в настоящее время найдены пути их определения по результатам испытаний при простых напряженных состояниях, например при растяжении и сжатии [5]. Из соотношения (2.2) для обобщенной податливости при частных случаях, а именно трех упомянутых состояний, находим выражения соответствующих им податливостей:

$$\begin{aligned}\Phi_p &= \Phi_m + \frac{2}{3}\Phi_d, \\ \Phi_c &= \Phi_m - \frac{2}{3}\Phi_d, \\ \Phi_\tau &= \left(\Phi_m^2 + \frac{4}{9}\Phi_d^2\right)^{1/2},\end{aligned}\quad (2.4)$$

допуская условие независимости от угла θ характеристик формоизменения Φ_m и Φ_d , сумма квадратов первых двух равна удвоенному квадрату третьей податливости. Заменив податливости в (2.4), учитывая их определение

$$\Phi_i = \frac{3e_{0i}}{S_{0i}},$$

получим формулу (1.4), при использовании $e_{0\tau} = e_{0i} / 2$ среднего значения интенсивностей деформации, где $i = p, c$, то есть (растяжение и сжатие). Два первых выражения (2.4), позволяют получить простые формулы для характеристик формоизменения в качестве первого приближения:

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \frac{1}{2}(\Phi_p + \Phi_c), \\ \Phi_d &= \frac{3}{4}(\Phi_p - \Phi_c).\end{aligned}\quad (2.5)$$

Для исследований свойств материалов, которые имеют существенное различие диаграмм при растяжении и сжатии, следует применить методику работы [5], которая приводит к более точным формулам:

$$\Phi_m = \Phi_\theta \sin(2\theta + \psi) / \sin 3\theta = \phi_i / 3, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}\Phi_d &= 3\Phi_\theta \sin(\theta - \psi) / 2 \sin 3\theta = \\ &= \{[(\phi_j - \phi_\alpha)^2] / 8\}^{1/2},\end{aligned}\quad (2.7)$$

где ϕ_i – податливость сдвигу в направлении главных касательных напряжений. Первая итерация при угле $\theta = 0$, используя следующее приближение: $\phi_1 = \Phi_{qp}$, $\phi_2 = \Phi_{qc}$ и $\phi_3 = \Phi_{q\tau}$, по (2.6) и (2.7) позволяет найти от-

ношение $\varphi = \Phi_d / \Phi_m$, которое становится единым для любого угла θ , где q – номер опытной точки вдоль диаграмм. Для упрощения расчетов принято, что обобщенная податливость Φ_θ является заранее заданной функцией

$$\Phi_\theta = a_1 - a_2 \sin 3\theta + a_3 \sin^2 3\theta. \quad (2.8)$$

Ее коэффициенты определяются по значениям податливостей ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_3 . Эта функция позволяет для каждого уровня нагрузки q расставить податливости ϕ_i к углам θ равным $0, \pi/6$ и $\pi/3$. Обоснованием подобного упрощения является тот факт, что подобный подход используется при решении уравнений математической физики, когда вид функции по одной из координат принимается заранее известным, если при этом выполняются условия на границах, что в (2.8) обеспечивается.

Далее определяется фаза подобия девиаторов по (2.3) и угол ψ . Средняя податливость без итераций определяется для любого угла θ по первому равенству соотношения (2.6). Затем среднеквадратическая податливость устанавливается по формуле $\Phi_d = \varphi \Phi_m$. Проверкой точности определения характеристик формоизменения является описание диаграмм $S_0 \sim e_0$.

2.3. Уравнения связи деформаций с напряжениями

Необходимость учета разрыхления, требует описания общей объемной деформации как суммы линейной части и дополнительной части – дилатансии, возникающей вследствие потери внутренних повреждающихся связей. Предлагается вначале принять уравнение связи средней деформации с средним напряжением в виде

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{0y} + \varepsilon_g = \frac{\sigma_0}{3K_\theta} + \frac{2\chi\Phi_d S_0}{9}. \quad (2.9)$$

Здесь $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} / 3$ – средняя (объемная) деформация, K_θ – модуль объемной упругости, названный теоретическим, χ – параметр разрыхления и податливость Φ_d , отражающая зависимость объемной деформации от формоизменения. Уравнение (2.9) по форме соответствует аналогичной формуле В.В. Мошова [2], но с другим параметром для учета степени поврежденности (разрыхления).

При этом уравнения связи тензора деформаций с тензором напряжений как сумма

уравнений (2.1) и уравнением (2.9) принимают вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\Phi_k \sigma_0 \delta_{ij}}{3} + \frac{\Phi_m S_{ij}}{2} + \frac{\Phi_d}{S_0} [S_{ia} S_{aj} - \frac{2}{9} (1 - \chi) S_0^2 \delta_{ij}] \quad (2.10)$$

Здесь $\Phi_k = 1/K_\theta$ – податливость объемной упругости.

2.4. О связи материальных функций дифференциальными соотношениями

Выше уже высказано, что место двух последних вполне может быть занято характеристиками формоизменения Φ_m и Φ_d .

В уравнениях В.В. Новожилова работы [8] обобщенные материальные характеристики (объемный модуль, модуль сдвига и фаза подобия девиаторов) являются функциями инвариантов тензора напряжений, которые подчиняются трем дифференциальным уравнениям. Эти связи устанавливаются выражением приращения удельной работы при малых изменениях главных напряжений:

$$\begin{aligned} \delta A &= \varepsilon_1 \delta \sigma_1 + \varepsilon_2 \delta \sigma_2 + \varepsilon_3 \delta \sigma_3 = \\ &= \frac{\delta A}{\delta \sigma_0} \delta \sigma_0 + \frac{\delta A}{\delta S_0} \delta S_0 + \frac{\delta A}{\delta \theta} \delta \theta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Привлекая выражения связи инвариантов S_0 и θ с выражениями для тригонометрических коэффициентов c_i по (3.8), полученное соотношение приводится к виду

$$\delta A = 3e_0 \delta \sigma_0 + e_0 (\cos \omega - S_0 \sin \omega \delta \theta), \quad (2.12)$$

который полностью совпадает с аналогичным соотношением работы [8], при соблюдении равенства:

$$\frac{1}{G} = \frac{3e_0}{S_0}.$$

Из определений для характеристик формоизменения, представленных формулами (2.6) и (2.7), можно установить

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{S_0}{3e_0} (\Phi_m + \frac{2}{3} \Phi_d \cos 3\theta), \\ \sin \omega &= \frac{2}{9} \frac{S_0}{e_0} \Phi_d \sin 3\theta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставив эти выражения в (2.12), получим следующую связь материальных функций:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \frac{\delta A}{\delta \sigma_0}, \Phi_m = \frac{3}{S_0} \frac{\delta A}{\delta S_0}, \Phi_d = \frac{27 S_0}{2} \frac{\delta A}{\delta \theta}. \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} I &= S_0^3 \cos 3\theta, \\ \delta I &= 3S_0^2 (\cos 3\theta \delta S_0 - S_0^3 \sin 3\theta \delta \theta). \end{aligned}$$

Принимая приращение работы за полный дифференциал, имеем три равенства, связывающие характеристики упругости. Выбор формулы для объемной деформации в виде (2.9) не позволяет удовлетворить все равенства, следующие из (2.14), а именно:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{3\delta S_0} \left(\frac{\delta A}{\delta \sigma_0} \right) &= \frac{\delta}{\delta \sigma_0} \left(\frac{3}{S_0} \frac{\delta A}{\delta S_0} \right), \\ \frac{\delta}{3\delta \theta} \left(\frac{\delta A}{\delta \sigma_0} \right) &= \frac{27}{2} \frac{\delta}{\delta \sigma_0} \left(\frac{S_0 \delta A}{\delta I} \right), \\ \frac{\delta}{3\delta I} \left(\frac{\delta A}{S_0 \delta S_0} \right) &= \frac{27}{2} \frac{\delta}{\delta S_0} \left(\frac{S_0 \delta A}{\delta I} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Выбор потенциала деформаций в виде функции инвариантов тензора напряжений $\Phi = \Phi(\sigma_0, S_0, \theta)$, позволяет удовлетворить только одно равенство, которое приводит его к связи с характеристиками формоизменения:

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \frac{2}{S_0} \left\{ \frac{\delta \Phi}{\delta S_0} + \frac{\cos 3\theta}{S_0 \sin 3\theta} \frac{\delta \Phi}{\delta \theta} \right\}, \\ \Phi_d &= -\frac{9}{2S_0^2 \sin 3\theta} \frac{\delta \Phi}{\delta \theta}, \end{aligned}$$

указывающие на возможность выполнения третьего дифференциального равенства, относящегося к формоизменению. Проведенный анализ связи материальных функций дифференциальными соотношениями показывает, что учет нелинейности поведения материала, как с ростом напряжений, так и с изменением вида напряженного состояния, ведет к громоздким для них выражениям как функциям трех инвариантов, упрощение которых возможно найти только при дополнительных допущениях.

Принимая во внимание замечание В.В. Новожилова, что за пределом пропорциональности законы, по которым твердые тела, сопротивляясь изменениям объема и формы, являются существенно отличающимися друг от друга [9], вполне приемлемо сделать одно допущение, состоящее в том, что связь объемной деформацией с формоизменением можно принять конечным выражением (2.9), отвечающим реальным испытаниям. Именно с его помощью после преобразования уравнений связи деформаций с напряжениями (2.10) к матричному виду удастся отразить экспериментальный факт, состоящий в том, что до-

грузки в поперечном направлении напряжением $\Delta\sigma_3$ происходит с большим модулем, чем при основной нагрузке – растяжении. Этот эффект проявляется при испытаниях специальных крестообразных образцов. Расчеты отображают его графиками рис. 3, а при всех напряженных состояниях.

3. Преобразование уравнений связи деформаций с напряжениями к матричному виду

3.1. Вывод соотношений для определения технических характеристик

Если уравнения (2.10) записать для главных деформаций, то они приводятся к виду, характерному для уравнений, описывающих деформацию анизотропной среды [6]. Для этого предварительно необходимо выразить их тензорные аргументы и инвариантные величины в главных напряжениях, а также слагаемые в больших скобках. Преобразование для третьего слагаемого с индексом 1 выполняется в следующей последовательности:

$$\begin{aligned} \Phi_d S_0 \left(S_1^2 - \frac{2}{9} S_0^2 \right) &= \\ &= \frac{\Phi_d}{9 S_0} (4\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 4\sigma_1\sigma_2 - 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2\sigma_3 + \\ &+ 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) = \\ &= \frac{\Phi_d}{3 S_0} (\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_3 + \sigma_3 S_2). \end{aligned}$$

Следующее слагаемое уравнения преобразуется аналогично, при этом оно учитывает влияние разрыхления на технические характеристики.

Дальнейшие алгебраические действия приводят к системе уравнений, которую удобно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Или сокращенно в форме уравнений для анизотропной среды:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_i} - \nu_{ji} \frac{\sigma_j}{E_j} - \nu_{ai} \frac{\sigma_a}{E_a}, \quad (3.2)$$

где a_{ij} – коэффициенты деформаций, которые в общем случае являются переменными величинами, связанными с коэффициентами (3.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{ii} E_i^{-1}, \quad a_{ij} = -\nu_{ji} E_j^{-1}, \\ i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где E_i и ν_{ij} – технические характеристики. Первые – три модуля продольной упругости среды в направлении главных напряжений, а вторые – шесть коэффициентов поперечных деформаций. При наличии характеристик формоизменения Φ_m , Φ_d и объемной податливости Φ_k они определяются для любого напряженного состояния по формулам:

$$E_i^{-1} = (3\Phi_m + \Phi_k + \Phi_d c_{ij}) / 9, \quad (3.4)$$

$$\nu_{ij} E_i^{-1} = (3\Phi_m / 2 - \Phi_k - \Phi_d c_{ij}) / 9, \quad (3.5)$$

$$c_{ii} = c_i (1 + \chi), c_{ij} = c_\alpha + \chi c_i; \quad (3.6)$$

где $i, j, \alpha = 1, 2, 3; i \neq j \neq \alpha$.

По исходным данным об интенсивности напряжений S_0 определяются значения главных напряжений по формуле

$$\sigma_i = S_0 c_i / 3 + \sigma_0 = S_0 (c_i / 3 + \zeta), \quad (3.7)$$

где $\zeta = \sigma_0 / S_0$ – параметр простого нагружения, а $c_i = 3S_i / S_0$ или

$$\begin{aligned} c_1 = 2 \cos \theta, \quad c_2 = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta, \\ c_3 = -(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следует отметить, что вывод соотношений (3.4) и (3.5) для первого варианта математической модели проведен уже ранее [6], допуская при этом, что дилатансия отсутствует. Применяя уравнения (3.2), определяются разности главных деформаций $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ для трех состояний, из которых следует соотношение (1.5) для определения интенсивности деформаций при чистом сдвиге.

Свертка уравнений (3.2) приводит уравнение связи средней деформации с напряжениями уже к другому виду, отличному от принятого выше уравнения (2.9), а именно:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{9} \left(\frac{\sigma_1}{K_1} + \frac{\sigma_2}{K_2} + \frac{\sigma_3}{K_3} \right), \quad (3.9)$$

где общая объемная деформация определяется с помощью трех модулей объемной упругости:

$$K_i = \frac{E_i}{3(1 - \nu_{ij} - \nu_{ia})}. \quad (3.10)$$

В этой формулировке три начальных продольных модуля упругости E_i в МПа и все шесть начальных теоретических коэффициентов поперечных деформаций ν_{ij} занимают

свое определенное место согласно индексам. Модули объемной упругости с индексами 2 и 3, названы "кажущимися", поскольку их значения могут существенно отличаться от "классического" модуля, найденного по начальным опытными данным при растяжении.

Кроме того, некоторые из них как функции главных напряжений имеют особенности, вызывающие математические трудности определения объемной деформации, избавиться от которых можно, если придать уравнению (3.9) другой вид:

$$\varepsilon_0 = (\sigma_1 \Phi_{k1} + \sigma_2 \Phi_{k2} + \sigma_3 \Phi_{k3}) / 9, \quad (3.11)$$

заменив модули K_i на их обратные величины – податливости:

$$\Phi_{ki} = \frac{1}{K_i} = 3 \frac{1 - \nu_{ij} - \nu_{i\alpha}}{E_i}. \quad (3.12)$$

Особенность "кажущихся" модулей K_i и податливостей по сравнению с "классическим" модулем K , состоит в том, что они, как и модули продольной упругости E_i , принадлежат соответствующим конкретным направлениям главных напряжений.

Если воспользоваться соотношениями (3.4) и (3.5) для продольных модулей упругости и теоретических коэффициентов поперечных деформаций, то выражения для податливостей упрощаются:

$$\Phi_{ki} = \Phi_k + \Phi_d \chi c_i, \quad (3.13)$$

где $i = 1, 2, 3$. Их достоинство состоит в том, что они позволяют провести проверку определения теоретической податливости объемной упругости Φ_k и параметра разрыхления, установленных методикой. Учитывая, что $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, среднее значение "кажущихся" податливостей дает определение теоретической податливости и модуля, который имеет положительные значения, изменяющиеся только от угла θ :

$$\Phi_k = 1 / K_\theta = \Phi_{ki} / 3, \quad (3.14)$$

а отношение разности первой и третьей податливости к среднеквадратической податливости с коэффициентами приводит к формуле для параметра разрыхления:

$$\chi = \frac{\Phi_{k1} - \Phi_{k3}}{\Phi_d (c_1 - c_3)}. \quad (3.15)$$

4. О методике определения параметра разрыхления и теоретического модуля объемной упругости

О данной методике написана и сдана в печать отдельная работа [7], которая посвящена ее развитию для определения технических характеристик, в том числе модулей объемной упругости и параметра разрыхления. Развитие методик первых вариантов, используемых в работах [5, 6] привело к новой формулировке уравнений (3.9) и (3.11). А также новому представлению об объемных модулях упругости с формулами (3.10) и податливостей (3.12–3.14). В первых вариантах, базирующихся на уравнении (2.9), предназначенных для стабильных материалов, в которых изменение "классического" модуля K совсем не предполагалось, больших затруднений в описании объемной деформации не возникало.

При исследовании разрыхляющихся сред, в частности композитных и чугунов, при испытаниях которых обнаруживались заметные изменения коэффициента поперечных деформаций, возникли существенные трудности совмещения опытных кривых с кривыми, полученными расчетом для коэффициентов поперечных деформаций при растяжении и сжатии. Их преодоление привело к необходимости изменения алгоритмов, в которых такие величины (с общим обозначением Q) как параметр разрыхления и модуль K_θ представляются функциями угла θ в виде трехчлена:

$$Q = a_1 + a_2 \theta + a_3 \theta^2. \quad (4.1)$$

Коэффициенты этих функций могут быть определены по их данным для простых напряженных состояний растяжения, сжатия и чистого сдвига. Соотношения (3.4) и (3.5), включающие в себя эти величины, позволяют найти их путем подбора значений коэффициентов a_1 , a_2 и a_3 . Вначале устанавливается параметр разрыхления, формируя по конфигурации кривые для коэффициентов поперечных деформаций при растяжении и сжатии. Затем можно добиться полного совмещения этих кривых, так же подбором значений модуля: $K_{\theta p}$, $K_{\theta c}$ и $K_{\theta t}$. В конечном итоге методика приводит к определению K_θ в МПа.

Расчеты объемных деформаций для других состояний выполнялись, допуская, что работа $A = S_0 \varepsilon_0 / 2$ тоже может быть в виде трехчлена по (4.1).

Для последней они вычисляются по исходным данным:

$$a_1 = A_p,$$

$$a_2 = \frac{3}{\pi}(4A_r - 3A_p - A_c),$$

$$a_3 = \frac{18}{\pi^2}(A_p + A_c - 2A_r),$$

определяя S_0 и e_0 как функции угла θ .

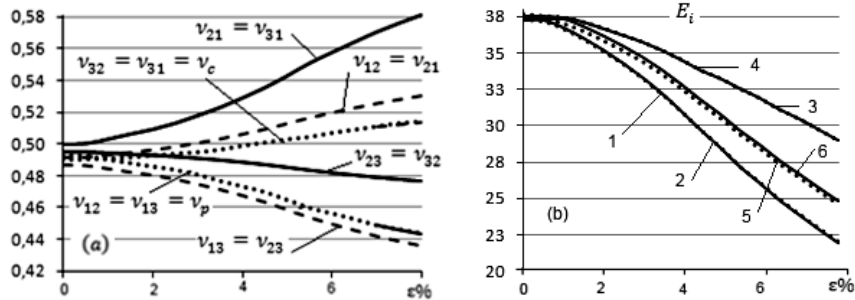


Рис. 2. Графики изменения: (а) коэффициентов поперечных деформаций сплошные линии – растяжение, штриховые линии – сжатие, линии из точек – опыт; (б) модулей продольной упругости: кривые 1 и 2 для растяжения, 3 и 4 – сжатия и 5 и 6 – сдвига; сплошные линии – расчет, линии из точек – опыт

На рис. 2, б показаны графики для модулей продольной упругости, совмещение которых выполняется "автоматически" вместе с кривыми для коэффициентов v_i , где $i = p, c$ (растяжение и сжатие). Кривая 5 (линия из точек) приводится по данным, полученным по испытаниям при простом сдвиге образца в виде пластины, а кривая 6 (сплошная линия), относящаяся тоже к сдвигу, для подтверждения, что допущения, содержащиеся в формулах (1.4) и (1.5), не приводят к заметным ошибкам.

4.1. О характеристиках упругости композита

Формулировки "кажущихся" модулей и податливостей потребовали исследования

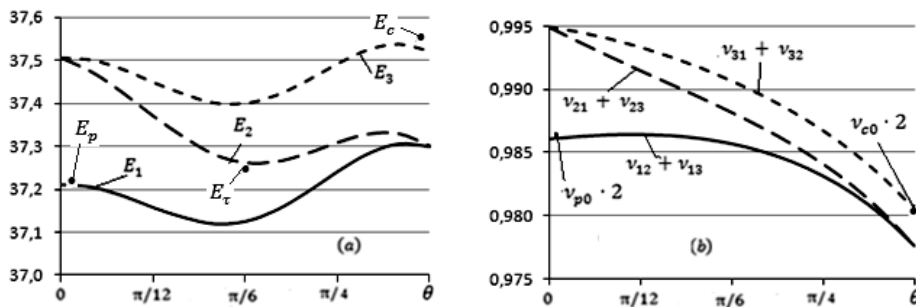


Рис. 3. Графики изменения начальных значений (а) модулей продольной упругости и (б) суммы двух коэффициентов поперечных деформаций в зависимости от вида напряженного состояния

На рис. 2, а представлены шесть кривых для разных коэффициентов поперечных деформаций: три из них (2 сплошные линии и 2-я снизу – линия из точек) относятся к растяжению, а три (2 штриховые линии и 3-я сверху – линия из точек) относятся к сжатию. Линии из точек показывают поведение коэффициентов, найденных при испытаниях, а остальные получены расчетом по соотношениям (3.4) и (3.5), которые сохраняют ту же конфигурацию, что и опытные.

трих теоретических модулей продольной упругости и коэффициентов поперечных деформаций, определяемых по соотношениям (3.4) и (3.5). Некоторые из них принимают значения, превышающее число 0,5, что наглядно показано на рис. 2, а кривыми при деформации $\epsilon > 2\%$.

На рис. 3, а представлены кривые для начальных значений (при $\epsilon = 0$) модулей продольной упругости, соответствующие направлениям главных напряжений. Точки, обозначенные символами E_p , E_r и E_c , соответствуют значениям модулей на оси ординат рис. 2, б для растяжения, сдвига и сжатия.

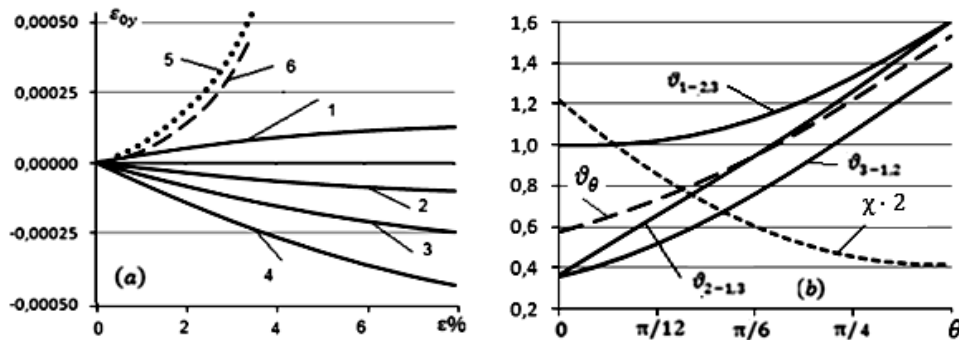


Рис. 4. Графики изменения (а) линейной части объемной деформации (кривые 1, 2, 3, 4 и 5 для состояний $\theta = 0, 50, 55$, и 60° – сплошные линии), дилатансии (штриховой) – расчет и общей объемной деформации (линия из точек) – опыт; (б) параметров изменяющейся упругости (сплошные линии и штриховая) и параметр разрыхления (мелкий штрих)

Конфигурация кривых E_1 , E_2 и E_3 существенно зависит от значения модуля K_{θ} , поэтому методика, учитывая этот факт, заканчивается не только проверкой по формулам (3.14) и (3.15), но и приведением в соответствующее положение точек, обозначенных на рис. 3.

На рис. 3, б показаны графики для суммы двух коэффициентов поперечных деформаций, относящихся к модулям продольной упругости, показанных на рис. 3, а. Точки, обозначенные символами v_{p0} и v_{c0} с множителем 2, лежат достаточно близко к кривым, относящимся к коэффициентам, входящим в определения модулей объемной упругости K_1 и K_3 . Этот факт говорит об удовлетворительном согласии теории с опытными данными.

Кривые (сплошные линии) рис. 5, а иллюстрируют начальные значения K_1 и "кажущихся" модулей объемной упругости K_2 и K_3 , как функции угла θ , найденные по значениям E_i и v_{ij} , по которым построены кривые рис. 3. При значении угла $\theta = 0$, модуль $E_1 = E_p$, сумма коэффициентов $v_{12} + v_{13} = 2v_{p0}$, как опытные, ведут к начальному значению модуля $K_1 = K$, равного "классическому" модулю.

Большое отличие значений модулей K_2 и K_3 от K_1 при состояниях, близких к растяжению, с позиций структурной механики [2] можно объяснить наличием разной реакции повреждающихся связей на растяжение и сжатие. Это различие объясняется тем, что слабые, повреждающиеся связи в направлении действия напряжения σ_1 являются утра-

ченными (при их определении), как при одно-разовом испытании, а на взаимно перпендикулярных направлениях напряжения остаются нулевыми, все повреждающиеся связи сохранены, и поэтому: $v_{31} + v_{32} \cong 1$. На возможные напряжения материал проявляет себя как "несжимаемый", со значениями коэффициентов, близких к числу 0,5. Именно поэтому модули K_2 и K_3 имеют большие значения, чем модуль K_1 . А на сжимающие напряжения реакция нейтральная. Даже при небольшом росте напряжения σ_3 , модуль E_2 , и сумма коэффициентов $v_{21} + v_{23}$ снижаются. Модуль K_2 падает быстрее, чем модуль K_3 . Реакция композита на положительные и отрицательные напряжения выявляется расчетами при разных видах напряженного состояния. Сравнивая графики на рис. 3, б с кривыми на рис. 5, а, находим их различие по причине отличия модулей продольной упругости.

Среднее значение модулей K_i согласно соотношению (3.14), представляет теоретический модуль объемной упругости K_{θ} , показанный штриховой линией. Расчеты показывают, что при нулевом значении параметра разрыхления "кажущиеся" модули равны между собой и теоретическому модулю. Его значения не зависят от напряжений σ_i . Модули объемной упругости K_i , относятся не ко всему элементарному объему, как классический модуль, а к направлениям главных напряжений как модули продольной упругости E_i , являясь функциями главных напряжений.

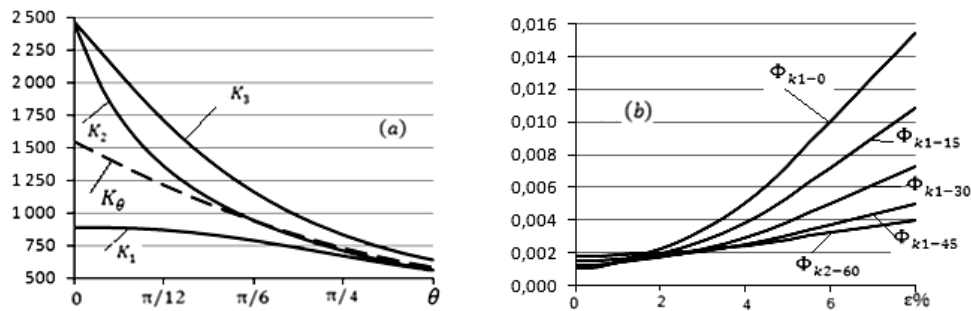


Рис. 5. Графики изменения (а) "кажущихся" модулей объемной упругости K_1, K_2 и K_3 и (б) теоретического модуля K_θ в зависимости от вида напряженного состояния; (б) податливостей объемной упругости $\Phi_{k1-\theta}$ с ростом главных напряжений для разных напряженных состояний, относящихся к углам $\theta = 0, 15, 30, 45$ и 60°

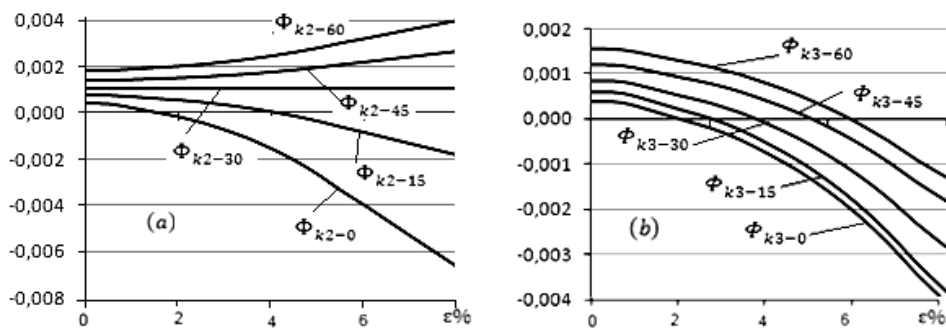


Рис. 6. Графики изменения податливостей объемной упругости (а) $\Phi_{k2-\theta}$ и (б) $\Phi_{k3-\theta}$ с ростом главных напряжений для разных напряженных состояний, относящихся к углам $\theta = 0, 15, 30, 45$ и 60°

Для определения объемной деформации необходимо пользоваться податливостями объемной упругости. На рис. 5, б приведены пять кривых для податливостей, соответствующих разным напряженным состояниям. Наибольшие значения имеет податливость, относящаяся к растяжению, то есть Φ_{k1-0} .

Кривые, показанные на рис. 6, а для податливостей $\Phi_{k2-\theta}$ и $\Phi_{k3-\theta}$ на рис. 6, б, являются неразрывными. Их физический смысл как характеристики упругости указывает на способность материала приобретать объемные деформации в направлении напряжения σ_2 и σ_3 , становясь векторной величиной.

4.2. Результаты исследований линейной объемной деформации и дилатансии

Располагая уравнением (2.9), значениями теоретического модуля K_θ , показанного на рис. 4, а и параметра разрыхления χ на рис. 4, б, как функций угла θ , можно определить линейную часть объемной деформации и дилатансию, которая снижается так же плавно, как и параметр разрыхления χ .

Расчет дилатансии можно уточнить, используя формулу

$$\epsilon_{gi} = \pm \frac{2}{3}(v_{ii} - v_i)\epsilon,$$

где плюс используется для растяжения, а минус – для сжатия. Методика совмещения кривых для коэффициентов поперечных деформаций обеспечивает очень близкое сходство опытных кривых с кривыми для общих объемных деформаций, найденных по известному выражению $\epsilon_{oi} = \pm \frac{1}{3}(1 - 2v_i)\epsilon$.

Коэффициенты поперечных деформаций определяются по формуле

$$v_{ii} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_i}{3K_{\theta i}} \right),$$

предполагающей изменение объемной деформации при отсутствии разрыхления, $K_{\theta i}$ – модули объемной упругости, уже найденные выше методикой, где $i = p, c$.

На рис. 4, а четыре плавные кривые (сплошные линии) представляют линейную часть объемной деформации в зависимости от продольной для разных углов θ . Их сравнение показывает, что кривая 1 для растяжения имеет ординаты во много раз меньшие, чем кривая 4 для сжатия (по абсолютной величине). Кривая 1 отличается от кривых 5 и 6, показанных в том же масштабе, и по форме и по ординатам. Кривая 5 (линия из точек) представляет собой общую объемную деформацию, а кривая 6 – дилатансию (штриховая линия), относящуюся тоже к растяжению. Положение и форма этих двух кривых иллюстрируют поведение повреждающихся связей при малых деформациях.

Графики найденных деформаций отчетливо показывают, что большая часть общей объемной деформации относится к дилатансии, вызванной разрывом повреждающихся связей, ординаты которой в несколько раз больше линейной. Соотношения этих объемных деформаций дают возможность провести баланс, который указывает на основную причину малости линейной части объемной деформации и большого значения модуля объемной упругости $K_{\theta p}$, превосходящего аналогичный модуль при сжатии $K_{\theta c}$. К высоким значениям "кажущихся" модулей привел этот баланс деформаций, а не возросшая жесткость материала при растяжении. Это противоречие физическому смыслу можно снять, предполагая наличие снижения объемной упругости материала при растяжении. Полагаем, что линейная объемная деформация имеет малое значение потому, что материал потерял свою упругость вследствие утраты упругих связей при наличии достаточно большой общей объемной деформации. На возможность такого эффекта указывал В.В. Мошев [2] при анализе деформаций структурно-феноменологической модели с повреждаемыми упругими элементами.

4.3. О параметрах изменяющейся упругости

С практической точки зрения предлагается принять, что объемная жесткость остается неизменной, несмотря на утверждение, что среда теряет или приобретает упругость. "Классический" модуль выбран для сравнения в силу необходимости, для того чтобы приближенно оценить возникающую деформационную анизотропию, которая после испыта-

ния до напряжений, меньших предельных, реально наблюдается. Жесткость предлагается характеризовать "классическим" модулем K , а теоретический модуль K_{θ} и модули K_i с индексами 2 и 3 следует рассматривать как математические величины, отражающие собой два свойства среды: объемную упругость и ее изменение вследствие утраты повреждаемых связей или пополнения. То есть их прироста и изменения взаимодействия частиц наполнителя при отрицательных напряжениях и увеличения контакта между частицами. Поэтому можно ввести величину, а именно, параметр изменяющейся упругости, который связывает эти модули. Можно было бы принять за эталонный модуль K_1 , но он начинается с "классического", а затем, снижаясь, приводит к высоким значениям параметра изменяющейся упругости. На рис. 4, б четыре кривые, полученные по начальным значениям модулей K_i , которые определяют три параметра изменяющейся упругости, характеризующие состояния связей, как отношение "классического" модуля к "кажущимся" модулям или произведения модуля с соответствующей податливостью, согласно формуле

$$\mathcal{G} = K / K_i = K \Phi_{k_i}, \Phi_{k_i} = 1 / K_i. \quad (4.2)$$

На рис. 4, б штриховая кривая относится к параметру $\mathcal{G}_{\theta} = K / K_{\theta}$. Параметры со значениями $\mathcal{G}_i < 1$ указывают на сохранившуюся часть связей, а $\mathcal{G}_i > 1$ – на приобретенные в результате их возрастания и изменения взаимодействия частиц наполнителя.

Индексы параметров изменяющейся упругости означают: первый тот же, что и у модуля, второй и третий определяют площади элементарного объема, в которых происходит потеря или приобретение связей. Так, при простом растяжении ($\theta = 0$) параметр $\mathcal{G}_{1-2,3} = 1$ означает, что в горизонтальных площадках элементарного объема изменений числа связей нет, а обе вертикальные площадки 1,3 и 1,2, имея значение параметров $\mathcal{G}_{2-1,3} = \mathcal{G}_{3-1,2} = 0.36$, свидетельствуют о большой их утрате. Поэтому во всех горизонтальных площадках 2,3 они раскрывают "дефекты" подготавливая материал к еще большим изменениям и даже расслоению. При чистом сдвиге ($\theta = \pi/6$) изменения происходят в трех плоскостях, параметры имеют значения больше единицы, а именно: $\mathcal{G}_{1-2,3} = 1.03$,

$\mathcal{Q}_{2-1,3} = 0.846$, $\mathcal{Q}_{3-1,2} = 0.634$ число связей незначительно возрастает в площадках, перпендикулярных напряжению σ_1 , а им перпендикулярных – падает.

При простом сжатии ($\theta = \pi/3$) они соответственно равны: $\mathcal{Q}_{1-2,3} = 1.6$, $\mathcal{Q}_{2-1,3} = 1.6$, $\mathcal{Q}_{3-1,2} = 1.39$ во всех плоскостях наблюдается возрастание связей.

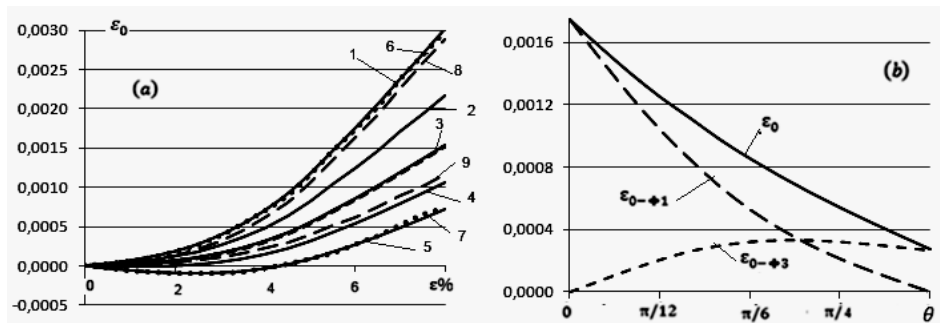


Рис. 7. Графики изменения (а) общей объемной деформации с ростом главных напряжений для разных напряженных состояний, относящихся к углам $\theta = 0, 15, 30, 45$ и 60° , сплошные линии – расчет, линии из точек – опыт, штриховые линии – дилатансия; (б) общей объемной деформации и ее составляющих, вызванных разными главными напряжениями

Предварительные исследования показали, что в качестве обобщенного показателя эффекта изменяющейся упругости имеет смысл принять отношение податливостей $\Phi_{k3-\theta} / \Phi_{k1-\theta}$ для количественной оценки состояния связей при всех напряженных состояниях от растяжения до сжатия.

Расчеты показывают, что податливость ($\Phi_{k3-0} + \Phi_p$), графически являясь ниспадающей кривой, которая пересекаясь с осью абсцисс, принимает нулевое значение, при деформации, равной предельной при растяжении поперечной деформации. Эта податливость представляет собой всю полноту связей до приложения нагрузки (Φ_p – тоже податливость, она показывает сохранившиеся связи к моменту разрушения образца при растяжении), найденную по (3.12) и данным о последних значениях продольного модуля упругости и коэффициента поперечной деформации.

Таким образом, результаты исследования параметров изменяющейся упругости указывают на то, что предельные состояния материала при разных напряженных состояниях можно связать с предложенными податливостями и показать их физический смысл с позиций структурной механики.

Податливости объемной упругости как функций главных напряжений (что можно видеть на рис. 4, б для $\Phi_{k1-\theta}$, на рис. 5, а для

$\Phi_{k2-\theta}$ и на рис. 5, б для $\Phi_{k3-\theta}$) позволяют получить плавные кривые.

4.4. Результаты расчетов объемных деформаций

Располагая "кажущимися" податливостями $\Phi_{ki-\theta}$, есть возможность определить объемную деформацию при тех напряжениях, при которых получены эти характеристики, а именно второго квадранта плоского напряженного состояния, где $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 < 0$, которые связаны с интенсивностью напряжений формулой (3.7), включающей параметр, характеризующий процесс простого пропорционального изменения напряжений, в пределах $1/3 \geq \zeta \geq -1/3$.

Для растяжения и сжатия кривые 1 и 5, полученные расчетом, почти совпадают с кривыми 6 и 7 (линии из точек), построенными по опытными данным для коэффициентов поперечных деформаций. Влияние разрыхления (дилатансии) на объемную деформацию представляют кривые 8 для растяжения, 9 для сжатия и 3 для сдвига (штриховые линии). Тот факт, что кривые 1 и 8 близко находятся относительно друг друга, говорит о том, что большую часть объемной деформации составляет дилатансия. [10, 11, 12].

При чистом сдвиге они являются одной кривой 3, а при сжатии расхождение значительно большее (кривая 9), поскольку дилатансия имеет положительные значения при всех θ .

Располагая новым уравнением (3.11), вывод которого после преобразования уравнений связи деформаций с напряжениями, проведен выше, расчет проводился при состояниях $\theta = 0 \div 60^\circ$ с шагом в $\Delta\theta = 15^\circ$.

На рис. 7, а приведены пять кривых для общей объемной деформации. Данные для кривых (сплошные линии), рассчитаны как по уравнению (3.11), так и (2.9), и приводят к одним и тем же результатам.

Уравнение (3.11) делит объемную деформацию на три части, относящиеся к главным напряжениям. А уравнения (2.10) делит эту же деформацию на две части: линейную и нелинейную (дилатансию), что в равной мере полезно для анализа. Кривая 3 представляет для сдвига одновременно и объемную деформацию и дилатансию, поскольку в (4.3) параметр $\zeta = 0$.

На рис. 7, б кривая ε_0 построена по значениям объемных деформаций, соответствующих постоянной деформации $\varepsilon > 6\%$, то есть вертикальному сечению кривых рис. 7, а.

Кривая $\varepsilon_{0-\Phi_1}$ является первой частью общей объемной деформации, зависящей от напряжения σ_1 , а кривая $\varepsilon_{0-\Phi_3}$ представляет ее третью слагаемое в (3.11), которое зависит от напряжения σ_3 и связана с податливостью $\Phi_{k3-\theta}$.

Учитывая, что напряжение $\sigma_2 = 0$, то и деформация $\varepsilon_{0-\Phi_2} = 0$ в этом направлении. Сумма первой и третьей частей представляет общую объемную деформацию ε_0 . Эти графики раскрывают сущность возникших характеристик и их предназначение. Кривая $\varepsilon_{0-\Phi_1}$ показывает, что наибольший вклад в общую деформацию вносят положительные напряжения, в том числе за счет дилатансии.

Заключение

Исследования, изложенные в данной работе, показывают, что разрыв связей и разрыхление структуры материала, вызванное деформацией, приводит к изменению объемной упругости, которое обнаруживает себя различием продольных модулей упругости по каждому направлению и коэффициентов поперечных деформаций, что приводит к существенному отличию модулей объемной упругости. Эти характеристики дают возможность выявить анизотропию, которая проявляется параметрами изменяющейся упругости, ха-

рактеризующими состояние повреждающихся связей.

Процесс разрыва слабых связей, изменяющий объемную упругость вследствие разрыхления, является причиной существенного различия закона формоизменения от закона изменения объемных деформаций. Податливости объемной упругости с обобщенными податливостями при формоизменении отличаются даже знаком. Деформационная анизотропия, названная В.В. Новожиловым "кажущейся", проявляет себя только зависимостью характеристик формоизменения от вида напряженного состояния.

А анизотропия, вызванная объемной деформацией, проявляется параметрами изменяющейся объемной упругости. Математическая модель, включающая в себя упомянутые выше уравнения и методики, подтверждает предположение о различии упомянутых законов и способна найти все деформационные характеристики, параметр разрыхления, параметры изменяющейся упругости и выявить анизотропию.

Список литературы

1. *Mullins L.* Softening of rubber by deformation // *Rub. Chem. Techn.* 1969. Vol. 42. № 1. P. 339–362.
2. *Мошев В.В.* Структурная механика зернистых композитов на эластомерной основе. М.: Наука, 1992. 79 с.
3. *Комков К.Ф.* О тензорной нелинейности структурно-неоднородных материалов // *Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электронный журнал.* 2012. № 8.
4. *Новожилов В.В.* О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // *Известия АН СССР. Прикладная математика и механика.* 1951. Т. 15. С.183–194.
5. *Комков К.Ф.* О тензорной нелинейности сред, проявляющих существенное различие в сопротивлении растяжению и сжатию // *Наука и образование.* 2013. № 10. DOI: 10.7463/0513.0571202.
6. *Комков К.Ф.* Описание анизотропии изотропных материалов, вызванной пластической деформацией // *Известия РАН. Механика твердого тела.* 2008. № 1. С. 147–153.
7. *Комков К.Ф.* О разрыхлении, изменении объемной упругости и деформационной

- анизотропии квазиизотропных сред // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. (В печати).
8. Новожилов В.В. О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов. Прикладная математика и механика. Т. XV. 1951. С. 709–722.
 9. Ягн Ю.И., Митрохин Н.М. О систематическом отклонении от законов пластичности // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135, № 4. С. 796–799. С. 126–135.
 10. Richard G. The Mechanical Behavior of a Solid Microsphere Filled Composite //J. Composite Materials, Vol. 9 (April 1975). P. 108–113.
 11. Rivlin R.S. The elements of non-linear continuum mechanics//Lehigh University Bethlem, Pa., U. S. A., Continuum Mechanics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics. NATO Adv. Studi Inst. in Reyjavik, 11–20. 1974. P. 151–175.
 12. Schwarzl F.R. On mechanical properties of unfilled and filled elastomers // Mechanics and chemistry of solid propellants. Proceeding of the fourth symposium of naval structural mechanics. 1965. P. 503–538.

On the impact of damaged bonds on bulk elasticity and deformation anisotropy of granular composites

К. Ф. Комков

Military-Technical University, Balashikha, Russia (disbanded in 2014)

06kfk38@mail

This paper deals with the development of a phenomenological mathematical model based on tensor-nonlinear equations intended for the study of mechanical properties of media whose deformation is accompanied by a change in internal bonds. The results of static tests on stretching, compression with determination of coefficients of transverse deformation and torsion of specimens before fracture, as well as cruciform samples with repeated static stretching, allow us to reveal the effect of elasticity change, which is caused by rupture of weak damaged bonds at positive stresses and their increase at negative ones. Analysis of test results and experimental work of other authors with the help of a mathematical model led to the conclusion that the main reason for the revealed feature is the behavior of weak bonds that break at small positive deformations. Their discontinuity creates an anisotropy of the elastic properties with symmetry axes that coincide with the directions of the principal stresses. These equations, transformed to a matrix form, make it possible to obtain another equation for the connection of the mean deformation with principal stresses, including three bulk moduli called "apparent". They allow us to find the relationships for determining the longitudinal moduli of elasticity and the coefficients of transverse deformations.

High values of some "apparent" moduli are several times higher than the value of the "classical" one, found from the initial experimental data in tension. They do not speak of the increasing rigidity of the material in the breaking of bonds, but indicate the smallness of the linear volume strain due to the loss of internal bonds between the particles, which causes the growth of the nonlinear part of the volume deformation-dilatancy, substantially exceeding the linear part. To determine all of these characteristics, a technique is used that makes it possible to achieve an almost complete coincidence of the theoretical curves with the experimental data for the longitudinal elastic moduli and the coefficients of transverse deformations found from the results of the tests. It is designed to determine the loosening parameter and the average value of the "apparent" moduli. Compliances, being the reciprocal of the magnitude of the moduli, as functions of the principal stresses, are smooth and inextricable. Their values can be positive, zero and negative. They allow us to determine the total volumetric deformation for any stress state and load level. According to the initial values of the "apparent" moduli or compliances, three parameters of varying elasticity quantifying the state of the bonds are determined as the ratio of the "classical" moduli to the "apparent" moduli. The latter give an idea of the extant relationships and the interactions acquired as a result of the interaction of the filler particles. At zero value of the disintegration parameter, the "apparent" moduli are equal to each other. Such calculations make it possible to determine the linear part of the average deformation, to reveal the dependence of the elastic properties on the breaking of bonds and the form of the stressed state. The anisotropy indicated by the parameters of variable elasticity and "apparent" moduli indicates the emergence of a new structure due to the development of defects.

Keywords: *shape change; dilatancy; bulk modulus; compliance; "classical" modulus; loosening parameter; variable elasticity parameter; anisotropy.*