МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

Производные числа функций одной переменной

Г. Г. Иванов, Г. В. Алфёров, П. А. Горовенко
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский проспект, 35
alferovgv@gmail.com; +7-911-246-57-87

Обобщаются теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа на класс недифференцируемых функций, приводятся необходимые и достаточные условия монотонности и выпуклости функций одной переменной.

Ключевые слова: *производное число; периодические решения; почти периодические решения; негладкий анализ, производные Дини-Гёльдера.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-3-5-19

Введение

В работе развивается основанный на идеях функционального анализа метод исследования периодических и почти периодических обыкновенных дифференциальных уравнений. И.П. Натансон кратко изложил аппарат производных чисел [1–2]. Развивая этот аппарат, исследователи доказали несколько теорем математического анализа. Применение этого аппарата позволило снизить ограничения на степень гладкости правых частей рассматриваемых уравнений, что привело к расширению области применения полученных результатов [3–15]. Отметим также, что во многих задачах классической и небесной механики, робототехники и мехатроники встречаются процессы, в которых зависимость от времени не является периодической [16–21].

В связи с этим возник интерес к применению аппарата производных чисел, к исследованиям периодических и почти периодических решений дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами [22–25].

1. Основные понятия

Пусть f – определенная на открытом интервале (a,b) функция, принимающая значения в множестве вещественных чисел R, т.е. $f:(a,b)\to R$, $a,b\in R$, $a<b$. Выберем в (a,b) произвольную точку x_0.

Число λ будем называть производным числом функции f в точке x_0, если существует последовательность $\{x_k\}$ такая, что $x_k\to x_0$ при $k\to\infty$ и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}=\lambda.$$

То обстоятельство, что λ есть производное число функции f в точке x_0, будем записывать так: $\lambda=\lambda[f](x_0)$.

Множество всех производных чисел функции f в точке x_0 будем обозначать через $\Lambda[f](x_0)$. Если в определении производного числа потребовать, чтобы последовательность $\{x_k\}$ удовлетворяла еще одному дополнительному условию, а именно: чтобы для всех k выполнялось неравенство

$x_k - x_0 > 0$, то такое производное число будем называть правым производным числом и обозначать через $\lambda^+[f](x_0)$. Если же при всех k $x_k - x_0 < 0$, то такое производное число будем называть левым производным числом функции f в точке x_0 и обозначать через $\lambda^-[f](x_0)$.

Множество правых производных чисел функции f в точке x_0 будем обозначать через $\Lambda^+[f](x_0)$, а множество левых производных чисел – через $\Lambda^-[f](x_0)$.

Ясно, что $\sup_{\lambda\in\Lambda^+[f](x_0)}\lambda$ определяет $D^+f(x_0)$ – правую верхнюю производную Дини функции f в точке x_0. Аналогичным образом можно ввести и остальные три производные Дини функции f в точке x_0.

Положим

$$\lambda^\alpha = \lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)-f(x_0)}{(x_k-x_0)^\alpha}.$$

В этом соотношении выберем α таким, что для любого $\varepsilon > 0$ будут иметь место равенства: $\lambda^{\alpha-\varepsilon} = 0$ и $\lambda^{\alpha+\varepsilon} = \infty$. Если функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, то, очевидно, что такое α существует. Величина α может зависеть только от выбора сходящейся к x_0 подпоследовательности $\{x_k\}$.

Число λ будем называть производным числом Гёльдера функции f в точке x_0, если существуют $\alpha \le 0$ и сходящаяся к x_0 последовательность $\{x_k\}$ такие, что

$$\lambda = \lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)-f(x_0)}{(x_k-x_0)^\alpha},$$

причем для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)-f(x_0)}{(x_k-x_0)^{\alpha-\varepsilon}} = 0,$$

а

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)-f(x_0)}{(x_k-x_0)^{\alpha+\varepsilon}} = \infty.$$

Число α, фигурирующее в определении производного числа Гёльдера, будем называть показателем этого производного числа.

То обстоятельство, что λ является производным числом Гёльдера функции f в точке x_0, будем записывать так:

$$\lambda = \lambda_H[f](x_0).$$

Множество производных чисел Гёльдера функции f в точке x_0 будем обозначать через $\Lambda_H[f](x_0)$.

Если в определении производного числа Гёльдера потребовать, чтобы при всех k было $x_k - x_0 > 0$, то такое производное число будем называть *правым производным числом Гёльдера* и обозначать через $\lambda_H^+[f](x_0)$. Если же при всех k $x_k - x_0 < 0$, то такое производное число будем называть *левым производным числом Гёльдера* и обозначать через $\lambda_H^-[f](x_0)$.

Множество всех правых производных чисел Гёльдера функции f в точке x_0 будем обозначать через $\Lambda_H^+[f](x_0)$, а множество всех левых производных чисел Гёльдера в той же точке будем обозначать через $\Lambda_H^-[f](x_0)$.

Обозначим через α^+ минимальный из показателей производных чисел, входящих в $\Lambda_H^+[f](x_0)$, а через $\Lambda_H^{\alpha^+}[f](x_0)$ – множество производных чисел, принадлежащих множеству $\Lambda_H^+[f](x_0)$ и имеющих показатель α^+. Аналогично для множества $\Lambda_H^-[f](x_0)$ вводится число α^- и множество $\Lambda_H^{\alpha^-}[f](x_0)$.

Число $\lambda = \sup\limits_{\mu\in\Lambda_H^{\alpha^+}[f](x_0)}\mu$

будем называть *правой верхней производной Дини–Гёльдера* функции f в точке x_0 и обозначать через $DH^+[f](x_0)$.

Число $\lambda = \inf\limits_{\mu\in\Lambda_H^{\alpha^+}[f](x_0)}\mu$

будем называть *правой нижней производной Дини–Гёльдера* функции f в точке x_0.

Аналогично вводятся понятия левой верхней и левой нижней производных Дини–Гёльдера функции f в точке x_0, которые будем обозначать через $DH^-[f](x_0)$ и $DH_-[f](x_0)$ соответственно. Через DH^*f будем обозначать любую из четырех производных Дини–Гёльдера функции f.

Теорема 1. Для того чтобы функция f была непрерывной справа в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы либо обе правые производные Дини–Гёльдера $DH^{+}[f](x_0)$ и $DH_{+}[f](x_0)$ были равны нулю, либо показатель α^{+} из определения производной Дини–Гёльдера был больше нуля.

Доказательство.

Необходимость. Пусть функция f непрерывна справа в точке x_0. Рассмотрим правые производные Дини–Гёльдера в этой точке, и пусть хотя бы одна из них, например $DH^{+}[f](x_0)$, отлична от нуля. Это означает, что существуют последовательность $\{x_k\}$, сходящаяся к x_0, и число α^{+} такие, что

$$DH^{+}[f](x_0)=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)-f(x_0)}{(x_k-x_0)^{\alpha^{+}}}.$$

Если бы оказалось, что в этом выражении $\alpha^{+}=0$, то из него, очевидно, следовало бы, что функция f терпит разрыв в точке x_0, откуда и следует справедливость утверждения этой части теоремы.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы, и пусть, вопреки нашему утверждению, функция f терпит разрыв в точке x_0. Тогда найдутся $\varepsilon>0$ и сходящаяся к x_0 последовательность $\{x_k\}$ такие, что будет иметь место неравенство

$$\lim_{k\to\infty}|f(x_k)-f(x_0)|\geq\varepsilon.$$

Из этого соотношения следует: 1) что реализующееся на этой последовательности производное число Гёльдера имеет показатель равный нулю, и 2) что хотя бы одна из правых производных Дини–Гёльдера в этой точке отлична от нуля. Полученное противоречие и доказывает непрерывность справа функции f в точке x_0, а вместе с этим и справедливость утверждения теоремы.

Аналогично доказывается непрерывность функции f в точке x_0 слева.

Очевидно, для того чтобы функция f была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна как справа, так и слева.

Сопоставляя определение производной Дини–Гёльдера с определением производного числа функции f или просто производной функции f, легко видеть, что из теоремы 1 следует справедливость следующего утверждения.

Функция f непрерывна в точке x_0, если выполнено одно из следующих условий:

1. Множество $\Lambda[f](x_0)$ ограничено;
2. Каждая из производных Дини $D^{*}f(x_0)$ ограничена;
3. Производная $f^{'}(x_0)$ ограничена.

Теорема 2. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, а функция g определена в окрестности точки $f(x_0)$. Тогда, если множества $\Lambda_H[g](f(x_0))$ и $\Lambda_H[f](x_0)$ ограничены, то каждое производное число Гёльдера функции $h=g\circ f$ в точке x_0 представимо в виде

$$\lambda_H^{\gamma}[h](x_0)=\lambda_H^{\alpha}[g](f(x_0))\cdot\lambda_H^{\beta^{\alpha}}[f](x_0),$$

где показатель γ равен произведению показателей α и β, т.е. $\gamma=\alpha\beta$, а $\lambda_H^{\alpha}[g](f(x_0))$ и $\lambda_H^{\beta}[f](x_0)$ – некоторые производные числа Гёльдера из множеств $\Lambda_H[g](f(x_0))$ и $\Lambda_H[f](x_0)$ соответственно.

Доказательство. Поскольку функция f определена в окрестности точки x_0, а g в окрестности точки $f(x_0)$, то функция h также определена в некоторой окрестности точки x_0.

Пусть $\{x_k\}$ – последовательность из области определения функции h такая, что на ней реализуется некоторое производное число Гёльдера с показателем γ $\lambda_H^{\gamma}[h](x_0)$. Не нарушая общности, можно считать, что на последовательности $\{x_k\}$ реализуется производное число Гёльдера функции f с показателем β $\lambda_H^{\beta}[f](x_0)$, а на последовательности $\{f(x_k)\}$ реализуется производное число Гёльдера с показателем α функции g $\lambda_H^{\alpha}[g](f(x_0))$. так как $h=g\circ f$, то

$$\lim_{k\to\infty}\frac{h(x_k)-h(x_0)}{(x_k-x_0)^{\alpha\beta}}=$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{g(f(x_k))-g(f(x_0))}{(f(x_k)-f(x_0))^{\alpha}}\cdot\right. \qquad (1)$$

$$\left.\cdot\frac{(f(x_k)-f(x_0))^{\alpha}}{(x_k-x_0)^{\alpha\beta}}\right).$$

Покажем, что на последовательности $\{x_k\}$ реализуется производное число Гёльдера функции h с показателем $\gamma=\alpha\beta$.

Выберем произвольное положительное число $\delta<\gamma$ и положительные числа $\alpha_0\le\alpha$ и $\beta_0\le\beta$ такие, что $\alpha_0\beta_0=\delta$. Подставляя α_0 и β_0 в (1.1) вместо α и β соответственно и учитывая определение производного числа Гёльдера, находим, что для любого $\delta<\gamma$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{h(x_k)-h(x_0)}{(x_k-x_0)^{\delta}}=0.$$

Выберем теперь $\varepsilon>\gamma$ и $\alpha_0\ge\alpha$ и $\beta_0\ge\beta$ такие, что $\alpha_0\beta_0=\varepsilon$, и повторяя приведенные выше рассуждения, находим, что для любого $\varepsilon>\gamma$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{h(x_k)-h(x_0)}{(x_k-x_0)^{\varepsilon}}=\infty.$$

Из последних двух равенств следует, что показатель производного числа Гёльдера функции h, реализуемого на последовательности $\{x_k\}$, равен γ.

Далее, пусть $\{x_k\}$ – такая последовательность, что при $x_k\ne x_0$ будет $f(x_k)\ne f(x_0)$. Не нарушая общности, можно считать, что на последовательности $\{x_k\}$ реализуются производные числа Гёльдера

$$\lambda_1=\lambda_H^{\alpha}[g](f(x_0))\in\Lambda_H[g](f(x_0))$$

и $$\lambda_2=\lambda_H^{\beta}[f](x_0)\in\Lambda_H[f](x_0).$$

Из ограниченности множеств $\Lambda_H[g](f(x_0))$ и $\Lambda_H[f](x_0)$ следует, что λ_1 и λ_2 являются конечными числами.

Тогда в силу [3] имеет место равенство

$$\lambda_H^{\gamma}[h](x_0)=\lim_{k\to\infty}\frac{h(x_k)-h(x_0)}{(x_k-x_0)^{\gamma}}=$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{g(f(x_k))-g(f(x_0))}{(f(x_k)-f(x_0))^{\alpha}}\cdot$$

$$\left(\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)-f(x_0)}{(x_k-x_0)^{\beta}}\right)^{\alpha}=\lambda_1\cdot\lambda_2^{\alpha},$$

что и утверждалось теоремой.

Наконец, пусть $\{x_k\}$ – такая сходящаяся к x_0 последовательность, что при $x_k\ne x_0$ будет $f(x_k)=f(x_0)$. Очевидно, в этом случае для функции f на последовательности $\{x_k\}$ реализуется производное число равное нулю. Тогда, учитывая ограниченность множества $\Lambda_H[g](f(x_0))$, находим, что для любого $\lambda_1\in\Lambda_H[g](f(x_0))$ будет иметь место равенство $\lambda_1\cdot 0=0$. Но так как для функции h на последовательности $\{x_k\}$ реализуется производное число равное нулю, то и в рассматриваемом случае можно считать, что утверждение теоремы остается в силе.

Теорема 3. Пусть для некоторого $\delta>0$ непрерывная в точке x_0 функция f взаимооднозначно отображает интервал $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ в интервал $(y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$, где $y_0=f(x_0)$. Тогда

$$\Lambda_H[f^{-1}](y_0)=\left(\Lambda_H[f](x_0)\right)^{-1},$$

где $\{\Lambda_H[f](x_0)\}^{-1}$ получается из множества $\Lambda_H[f](x_0)$ заменой каждого элемента $\lambda_H^{\alpha}\in\Lambda_H[f](x_0)$ на элемент $\mu_H^{\beta}=\dfrac{1}{\lambda_H^{\alpha}[f](x_0)^{\beta}}$, где $\beta=1/\alpha$.

Доказательство. Пусть $\{y_k\}$ – сходящаяся к y_0 последовательность, на которой реализуется некоторое производное число Гёльдера $\mu_H^{\beta}[f^{-1}](y_0)$ функции f^{-1} в точке y_0, а $\{x_k\}$ – соответствующая ей последовательность, задаваемая равенствами $x_k=f^{-1}(y_k)$.

Заметим, что из непрерывности в точке x_0 и взаимной однозначности отображения f следует, что последовательность $\{x_k\}$

сходится к x_0 при $k \to \infty$ и что если $y_k \neq y_0$, то и $x_k \neq x_0$. Тогда будем иметь

$$\mu_H^\beta[f^{-1}](y_0) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(y_0)}{(y_k - y_0)^\beta} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k - x_0}{(f(x_k) - f(x_0))^\beta} =$$

$$\left(\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{(x_k - x_0)^{1/\beta}} \right)^{-\beta} =$$

$$\frac{1}{\lambda_H^\alpha[f](x_0)^\beta} \in \left(\Lambda_H[f](x_0)\right)^{-1},$$

где $\alpha = 1/\beta$.

Из этого соотношения, ввиду произвольности выбора последовательности $\{y_k\}$, следует, что $\Lambda_H[f^{-1}](y_0) \subset \left(\Lambda_H[f](x_0)\right)^{-1}$.

Аналогично показывается, что имеет место и обратное включение. Объединяя эти два результата, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

Таким образом, **теоремы 2** и **3** не только являются обобщением известных теорем анализа о дифференцировании сложной функции и о производной обратной функции, но и показывают, как степень гладкости сложной функции зависит от гладкости входящих в нее функций.

2. Экстремум функции

Как известно, знание производной некоторой функции позволяет делать заключение о поведении самой функции. Подобные заключения можно делать, основываясь на значениях производных чисел функции. В этом разделе, рассматривая вопрос об экстремальных значениях функции, мы приведем некоторые обобщения теоремы Ферма.

Теорема 4. Пусть для некоторого $\delta > 0$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ определена функция f, принимающая в x_0 экстремальное значение. Тогда в этой точке будут выполняться неравенства: $DH^- f(x_0) \le 0 \le DH_+ f(x_0)$, если x_0 является точкой локального минимума функции f, и $DH_+ f(x_0) \le 0 \le DH^- f(x_0)$, если x_0 является точкой локального максимума функции f.

Доказательство. Пусть x_0 является точкой локального минимума. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x < x_0$ будет $f(x) \ge f(x_0)$. Пусть $\{x_k\}$ – последовательность, на которой реализуется левая верхняя производная Дини–Гёльдера с показателем α^-:

$$DH^- f(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{-|x_k - x_0|^{\alpha^-}}.$$

Так как при всех k $\dfrac{f(x_k) - f(x_0)}{-|x_k - x_0|^{\alpha^-}} \le 0$, то и $DH^- f(x_0) \le 0$.

Аналогично показывается, что если x_0 является точкой локального минимума функции f, то в этой точке имеет место неравенство $0 \le DH_+ f(x_0)$.

Подобным образом рассматривается случай, когда x_0 является точкой локального максимума функции f.

Ясно, что подобное утверждение справедливо и для производных Дини.

Анализируя доказательство **теоремы 4,** нетрудно сформулировать теорему, дающую достаточные условия того, что x_0 является точкой экстремума для функции f, т.е. теорему, являющуюся в некоторой степени обратной к теореме 4.

Теорема 5. Пусть для некоторого $\delta > 0$ на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ определена функция f. Тогда, если $D^- f(x_0) < 0 < D_+ f(x_0)$, то x_0 является точкой локального минимума функции f, а если $D_- f(x_0) > 0 > D^+ f(x_0)$, то x_0 является точкой локального максимума функции f.

Доказательство. Пусть x_0 не является точкой экстремума функции f. Тогда из определения экстремума следует, что существуют две сходящиеся к x_0 последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ такие, что сразу для всех k будет $f(x_k) > f(x_0)$, а $f(y_k) < f(x_0)$.

Причем, не нарушая общности, можно считать, что на каждой из этих последовательностей реализуется какое-то производное число функции f в точке x_0. Здесь возможны два случая: либо обе эти последовательности монотонно возрастающие или убывающие, либо одна из них монотонно возрастает, а другая – убывает.

Пусть имеет место первый случай, и пусть, для определенности, обе последовательности возрастают. Тогда сразу для всех k будет

$$\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}<0$$

и

$$\frac{f(y_k)-f(x_0)}{y_k-x_0}>0.$$

Из полученных оценок и предположения о том, что на $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ реализуются производные числа функции f, следует, что

$$\lambda_1=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}\le 0,$$

$$\lambda_2=\lim_{k\to\infty}\frac{f(y_k)-f(x_0)}{y_k-x_0}\ge 0.$$

Так как последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ по предположению возрастающие, то $\lambda_1\in\Lambda_-[f](x_0)$ и $\lambda_2\in\Lambda_-[f](x_0)$. Учитывая, что $D_-f(x_0)\le\lambda_1\le 0\le\lambda_2\le D^-f(x_0)$, заключаем, что в рассматриваемом случае $0\in[D_-f(x_0),D^-f(x_0)]$, и, следовательно, ни одно из условий теоремы не может выполняться.

Пусть теперь имеет место второй случай, и пусть, для определенности, последовательность $\{x_k\}$ возрастает, а последовательность $\{y_k\}$ убывает. Тогда сразу для всех k будет

$$\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}<0$$

и

$$\frac{f(y_k)-f(x_0)}{y_k-x_0}<0.$$

Повторяя рассуждения, приведенные при рассмотрении первого случая, получим $\lambda_1\le 0$ и $\lambda_2\le 0$. Так как по предположению последовательность $\{x_k\}$ возрастающая, а последовательность $\{y_k\}$ убывающая, то $D_-f(x_0)\le\lambda_1\le 0$, а $D_+f(x_0)\le\lambda_2\le 0$.

Таким образом, и во втором случае точка 0 не разделяет интервалы $[D_-f(x_0),D^-f(x_0)]$ и $[D_+f(x_0),D^+f(x_0)]$, т.е. снова не выполняется ни одно из условий теоремы.

Итак, если x_0 не является точкой экстремума функции f, то либо точка 0 является производным числом функции f в точке x_0, либо оба интервала $[D_-f(x_0),D^-f(x_0)]$ и $[D_+f(x_0),D^+f(x_0)]$ лежат по одну сторону от точки 0. Если же выполнены условия теоремы, то в точке x_0 не реализуется ни одна из этих двух возможностей, и, следовательно, точка x_0 является точкой экстремума функции f.

Выделить точки, в которых функция f может принимать экстремальные значения, можно, основываясь на поведении какой-нибудь односторонней, например правой, производной. Правда, в этом случае уже недостаточно знания значения этой производной только в одной точке, чтобы отнести эту точку к множеству точек, в которых функция f может принимать экстремальные значения или нет. Более точное представление о сказанном дает следующая теорема.

Теорема 6. Пусть для некоторого $\delta>0$ на $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ определена непрерывная функция f, достигающая в точке x_0 своего экстремального значения. Если в некоторой окрестности точки x_0 функция f имеет непрерывную правую производную f'^{+}, то необходимо $f'^{+}(x_0)=0$.

Доказательство. Пусть для определенности в точке x_0 функция f принимает максимальное значение. Тогда для всех $x>x_0$ будет $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0.$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x\to x_0+0$, который существует в силу предположения о существовании в точке x_0 правой производной, получим $f'^{+}(x_0)\le 0$.

Предположим, что $f'^{+}(x_0)<0$.

В силу непрерывности правой производной функции f в окрестности точки x_0 найдется такое $\delta^{'} > 0$, что неравенство $f^{'+}(x) < 0$ будет иметь место сразу для всех $x \in [x_0 - \delta^{'}, x_0 + \delta^{'}]$.

Выберем в $[x_0 - \delta^{'}, x_0)$ произвольную точку x_1. Так как функция f непрерывна, то на $[x_1, x_0]$ она достигает своего минимума в некоторой точке x_2.

Покажем, что $x_2 \neq x_0$. Действительно, если бы это было не так, то, учитывая, что в точке x_0 функция f достигает своего максимума, мы пришли бы к заключению, что для всех $x \in [x_1, x_2]$ должно выполняться равенство $f(x) = f(x_0)$, которое несовместимо с предположением о том, что для всех $x \in [x_1, x_2]$ $f^{'+}(x) < 0$.

Итак, мы показали, что $x_2 \in (x_1, x_0)$. Тогда существует сходящаяся к x_2 монотонно убывающая последовательность $\{y_k\}$ такая, что для всех k будет

$$\frac{f(y_k) - f(x_2)}{y_k - x_2} \geq 0.$$

Но, по предположению, $f^{'+}(x_2) < 0$, и, следовательно, для всех $x > x_2$ и достаточно близких к x_2 будет

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} < 0.$$

Из сказанного заключаем, что последовательности $\{y_k\}$, обладающей перечисленными выше свойствами, не существует.

Таким образом, предположение, что выполняется неравенство $f^{'+}(x_0) < 0$, приводит к противоречию, и, следовательно, $f^{'+}(x_0) = 0$.

3. Монотонные функции

Функцию f будем называть монотонной, если из $x < y$ следует $f(x) \leq f(y)$ или $f(x) \geq f(y)$. В первом случае функцию f будем называть возрастающей, а во втором – убывающей. Если же из $x < y$ следует выполнение строгого неравенства $f(x) < f(y)$ или $f(x) > f(y)$, то f будем называть строго монотонной. Желая подчеркнуть при необходимости, о какой монотонности идет речь, будем говорить, что функция f строго возрастает, если из $x < y$ следует $f(x) < f(y)$, и строго убывает, если реализуется вторая возможность.

Теорема 7. Для того чтобы непрерывная функция f была строго монотонной, необходимо и достаточно, чтобы все ее производные Дини были знакопостоянными и не существовало интервала, в каждой точке которого хотя бы одна из производных Dini функции f обращалась в ноль.

Доказательство.

Необходимость. Пусть f непрерывна, и для определенности будем считать ее строго возрастающей. Выберем произвольную точку x_0 и сходящуюся к ней последовательность $\{x_k\}$. Не нарушая общности, последовательность $\{x_k\}$ можно выбрать такой, чтобы существовал предел $\lim_{k\to\infty} \dfrac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$.

По предположению функция f строго возрастает, и потому сразу для всех k будет

$$\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} \geq 0.$$

Откуда, в силу произвольности выбора точки x_0 и последовательности $\{x_k\}$, и следует знакопостоянство всех производных Дини функции f. Случай, когда f строго убывает, рассматривается аналогично.

Покажем теперь, что если f строго монотонна и непрерывна, то выполняется и второе условие теоремы.

Пусть, напротив, существует интервал $[a, b]$, в каждой точке которого хотя бы одна из производных Дини функции f имеет нулевое значение.

В силу непрерывности и монотонности f переводит интервал $[a, b]$ в некоторый интервал $[\alpha, \beta]$ с мерой $m[\alpha, \beta] = \beta - \alpha > 0$.

Как следует из [4], если для некоторого $p \geq 0$ строго монотонная функция f в каждой точке множества $E \subset [a,b]$ имеет хотя бы одну производную Дини такую, что $|D^*[f](x)| \leq p,$ то $m^* f(E) \leq p \cdot m^* E,$ где через m^* обозначается внешняя мера соответствующего множества.

Применяя этот результат к рассматриваемому случаю при $p = 0$, будем иметь

$$m^* f([a,b]) = mf([a,b]) =$$
$$m[\alpha,\beta] = |\beta - \alpha| = 0 \cdot |\beta - \alpha| = 0.$$

Но это противоречит полученному выше неравенству $|\beta - \alpha| > 0$, и, следовательно, интервала $[a,b]$, в каждой точке которого хотя бы одна из производных Дини функции f обращается в ноль, существовать не может.

<u>*Достаточность.*</u> Пусть выполнены условия теоремы. Покажем, что в этом случае функция f является строго монотонной. Предположим противное, т.е., что f не является монотонной. Тогда она не является монотонно возрастающей, следовательно, найдутся две точки x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, такие, что $f(x_1) > f(x_2)$. Через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ проведем прямую $l(x) = qx + r$. Заметим, что так как $f(x_1) > f(x_2)$, то q обязательно меньше нуля.

Рассмотрим все ситуации, которые возникают при таком построении. Предположим сначала, что существует убывающая последовательность $\{x_k'\}$, сходящаяся к x_1, и такая, что для всех k будет $f(x_k') \leq l(x_k')$. Тогда, учитывая, что $f(x_1) = l(x_1)$, имеем

$$\frac{f(x_k') - f(x_1)}{x_k' - x_1} \leq \frac{l(x_k') - l(x_1)}{x_k' - x_1} = q < 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, его, не нарушая общности, можно считать существующим, придем к заключению, что функция f в точке x_1 имеет отрицательное производное число, не превосходящее q.

Пусть такой последовательности $\{x_k'\}$ не существует, но существует возрастающая последовательность $\{x_k''\}$, сходящаяся к x_2, и такая, что для всех k $f(x_k'') \geq l(x_k'')$. Повторяя для последовательности $\{x_k''\}$ рассуждения, которые были приведены для последовательности $\{x_k'\}$, снова придем к заключению, что функция f в точке x_2 имеет производное число, не превышающее q.

Наконец, если не существуют ни последовательности $\{x_k'\}$, ни последовательности $\{x_k''\}$, то это означает, что для всех $x > x_1$ и расположенных в достаточно малой окрестности точки x_1, $f(x) > l(x)$, а для всех $x < x_2$ и расположенных в достаточно малой окрестности точки x_2, $f(x) < l(x)$. Тогда, в силу непрерывности функции f, существуют точка $x_0 \in (x_1, x_2)$ и убывающая последовательность $\{x_k^*\}$, сходящаяся к x_0, такие, что $f(x_0) = l(x_0)$ и для всех k $f(x_k^*) \leq l(x_k^*)$. Но эта ситуация полностью совпадает с ситуацией, в которой рассматривалась последовательность $\{x_k'\}$, и, следовательно, для точки x_0 справедлив тот же вывод, который был сделан для точки x_1 при наличии последовательности $\{x_k'\}$.

Таким образом, в любой из возможных ситуаций существует хотя бы одна точка, в которой функция f имеет отрицательное производное число, а значит существует хотя бы одна точка, в которой хотя бы одна из производных Дини функции f отрицательна.

Далее, функция f, не являясь монотонной, не является и убывающей. Следовательно, найдутся две точки y_1 и y_2, $y_1 < y_2$, такие, что $f(y_1) < f(y_2)$. Практически повторяя для точек y_1 и y_2 приведенные выше рассуждения, найдем, что существует хотя бы одна точка, в которой хотя бы одна из производных Дини функции f положительна.

Итак, если функция f не является монотонной, то она обязательно имеет производные Дини разных знаков, что противоречит требованиям теоремы.

Следовательно, если выполнены условия теоремы, то функция f является монотонной.

Пусть f монотонная функция, но не строго монотонная. Тогда найдутся две точки z_1 и z_2 такие, что $f(z_1) = f(z_2)$. Поскольку f – монотонная, то и для всех $x \in [z_1, z_2]$ будет $f(x) = f(z_1)$. В этом случае для всех $x \in (z_1, z_2)$ будет $D^*[f](x) = 0$, что противоречит предположению теоремы об отсутствии интервалов такого типа.

Таким образом, если выполнены условия теоремы, то функция f обязательно является строго монотонной.

Из приведенного только что доказательства и того факта, что если какая-нибудь из производных Дини непрерывной на $[a,b]$ функции f знакопостоянна на (a,b), то это же самое условие справедливо и для трех остальных производных Dini [5], следует, что теорема 7 может быть переформулирована так:

Для того чтобы непрерывная на $[a,b]$ *функция* f *была строго монотонной, необходимо и достаточно, чтобы какая-нибудь из производных Дини этой функции была знакопостоянной на* (a,b) *и чтобы не существовало интервала, на котором функция* f *имела бы производную равную нулю.*

Теорема 8. Если в каждой точке интервала $[a,b]$ непрерывная функция f имеет положительную правую производную, то f на $[a,b]$ строго возрастает.

Доказательство. Пусть f не является возрастающей на $[a,b]$ функцией. Тогда, в силу непрерывности, она достигает своего локального максимума в некоторой точке $x_0 \in [a,b)$. Но, как было показано при доказательстве теоремы 6, в этой точке правая производная функции f не превосходит нуля.

Это противоречие показывает, что f является возрастающей функцией.

Если f возрастает, но не строго, то, как было показано при доказательстве достаточности условий теоремы 7, существует интервал, в каждой точке которого правая производная функции f равна нулю. Снова приходим к противоречию.

Таким образом, если правая производная функции f положительна, то f обязательно является строго возрастающей.

Теорема 9. Пусть f определена на $[a,b]$. Если $D_+ f \geq 0$, и f не имеет скачков вниз, то она возрастает на $[a,b]$.

Доказательство. Пусть f удовлетворяет условиям теоремы. Построим функцию ϕ, положив

$$\phi(x) = f(x) + \varepsilon x, \qquad \varepsilon > 0.$$

Ясно, что ϕ определена на $[a,b]$ и также не имеет скачков вниз.

Пусть $\phi(a) > \phi(b)$. Построим прямую $y = \frac{1}{2}[\phi(a) + \phi(b)]$. Поскольку ϕ не имеет скачков вниз, то в (a,b) существуют точки, являющиеся корнями уравнения $\phi(x) = y$. Обозначим через c точную нижнюю границу множества корней этого уравнения. $\phi(c) = y$, потому что, если $\phi(c) > y$, то, как нетрудно видеть, в точке c функция ϕ будет иметь правое производное число равное $-\infty$, что невозможно, ибо из самого определения функции ϕ следует, что все ее правые производные числа неотрицательны; если же $\phi(c) < y$, то в силу предположения об отсутствии у функции f скачков вниз должна существовать точка $c' < c$ такая, что $\phi(c') = y$, что противоречит выбору точки c.

Рассмотрим теперь интервал $[a,c]$. Ясно, что $\phi(a) > \phi(c)$. Повторим для интервала $[a,c]$ построения, которые мы сделали для интервала $[a,b]$.

В результате в (a,c) найдем минимальную точку c_1, для которой

$$\phi(c_1) = \frac{1}{2}[\phi(a) + \phi(c)].$$

Продолжая этот процесс, построим убывающую последовательность $c > c_1 > c_2 > \ldots$. Эта последовательность ограничена снизу числом a и, следовательно, имеет предел, который мы обозначим через c_0. Точно так же, как и для точки c, показывается, что $\phi(c_0) = \phi(a)$.

Из проведенного построения следует, что для любого n

$$\frac{\phi(c_n) - \phi(c_0)}{c_n - c_0} < 0.$$

Откуда заключаем, что в точке c_0 функция ϕ имеет неположительную нижнюю правую производную Дини.

Но как следует из определения функции ϕ, все ее правые производные в $[a,b]$ не меньше ε. Полученное противоречие показывает, что неравенство $\phi(a) > \phi(b)$ невозможно. Значит, $\phi(a) \le \phi(b)$, или, что то же самое, $f(a) + \varepsilon a \le f(b) + \varepsilon b.$

Поскольку ε – произвольное, то, переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим:

$$f(a) \le f(b),$$

что доказывает теорему, ибо вместо $[a,b]$ можно было бы взять любой интервал $[x,y] \subset [a,b]$.

Отметим, что если $D_+ f \ge 0$, то условие отсутствия у функции f скачков вниз, в частности, выполняется, если $D_- f$ ограничена снизу.

В качестве примера исследуем функцию f, производная которой на отрезке $I = [0,1]$ определяется следующим образом:

$$f'(x) = 1, x \in E_1 0, x \in E_2, 1.2,$$

где E_1 – множество меры нуль всюду плотное на I, а $E_2 = I \setminus E_1$.

Согласно теоремам 1 и 7, в силу плотности E_1 в I функция f непрерывна и строго возрастает на I. Но тогда имеет место цепочка неравенств [4]:

$$m^* f(I) \le m^* f(E_1) + m^* f(E_2) \le$$
$$1 \cdot m^* E_1 + 0 \cdot m^* E_2 = 0,$$

где через $m^* E$ обозначена внешняя мера множества E. Из полученного неравенства, очевидно, следует, что имеет место равенство $mf(I) = 0$, которое противоречит выводу о строгом возрастании функции f на I, так как если бы f была непрерывна и строго возрастала, то она переводила бы интервал $[0,1]$ в некоторый интервал $[\alpha, \beta]$ с мерой $m[\alpha, \beta] = \beta - \alpha > 0$.

Таким образом, мы получили противоречие, так как, с одной стороны, на основании теорем 1 и 7 функция f является непрерывной и строго возрастающей на I, а, с другой стороны, согласно теории монотонных функций из равенства $mf(I) = 0$, следует, что $f(0) = f(1)$, т.е., что f – постоянна на I. Это противоречие показывает, что функции f, производная которой задавалась бы соотношением (1.2), не существует. В частности, не существует функции f, для которой роль производной играла бы функция Дирихле.

Функцию f будем называть почти непрерывной на интервале $[a,b]$, если существует непрерывная на $[a,b]$ функция g такая, что $mE(f \ne g) = 0$, т.е. если изменением значений функции f на множестве меры нуль ее можно сделать непрерывной.

Теорема 10. Если все производные Дини функции f есть почти непрерывные и ограниченные на интервале $[a,b]$ функции, то f непрерывно дифференцируема на $[a,b]$.

Доказательство. Если выполнены условия теоремы, то, очевидно, почти непрерывной будет и функция $\Lambda[f](x)$. Представим $\Lambda[f](x)$ в виде

$$\Lambda[f](x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x),$$

где g_1 – непрерывная на $[a,b]$ функция такая, что

$$mE(\Lambda[f] \ne g) = 0,$$
$$g_3(x) = \min(0, \Lambda[f](x)),$$
$$g_2(x) = \Lambda[f](x) - g_1(x) - g_3(x).$$

функцию f представим в виде:

$$f = f_1 + f_2 + f_3,$$

где $\dfrac{df_1}{dx} = g_1, \quad \dfrac{df_3}{dx} = g_3, \quad \Lambda[f_2] = g_2.$

Легко проверить, что функции g_2 и g_3 почти везде равны нулю, причем g_3 непрерывна, а g_2 не принимает отрицательных значений. Таким образом, для каждой из функций g_2 и g_3 в отдельности применимы рассуждения, приведенные в вышерассмотренном примере. Повторяя эти рассуждения, заключаем, что на $[a,b]$ f_2 и f_3 постоянные, откуда следует, что

$$\frac{df}{dx} = \frac{df_1}{dx} = g_1,$$

и значит f – непрерывно дифференцируема.

Для завершения доказательства осталось только оправдать представление функции f в виде суммы трех функций. Справедливость такого представления следует из того факта, что функция $\bar{f} = f - f_1$ является непрерывной, как разность двух непрерывных функций, и функция $\Lambda[\bar{f}](x) = \Lambda[f](x) - g_1(x)$ почти везде равна нулю.

4. Теоремы о среднем

В дальнейшем будем предполагать, что все правые производные числа функции f равны между собой, т.е. будем предполагать, что функция f имеет правую производную. Для выделенного класса функций докажем теоремы, являющиеся аналогом теорем Ролля и Лагранжа.

Теорема 11. Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, имеет в (a,b) непрерывную правую производную и на концах отрезка принимает равные значения, то существует точка $x_0 \in (a,b)$, в которой $f'^{+}(x_0) = 0$.

Доказательство. Поскольку функция f непрерывна, то в некоторой внутренней точке x_0 отрезка $[a,b]$ она достигает своего экстремума. По условию теоремы f'^{+} является непрерывной в окрестности точки x_0 функцией, что, в силу теоремы 6, влечет за собой равенство нулю правой производной в самой точке x_0.

Теорема 12. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет в (a,b) правую производную. Тогда существуют точки $x_1 \in (a,b)$ и $x_2 \in (a,b)$, для которых выполняются неравенства

$$f'^{+}(x_1) \le \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le f'^{+}(x_2).$$

Если же f имеет в (a,b) непрерывную правую производную, то существует точка $x_0 \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'^{+}(x_0).$$

Доказательство. Пусть в каждой точке промежутка (a,b) функция f имеет правую производную, и пусть, вопреки утверждению теоремы, точки $x_2 \in (a,b)$ такой, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le f'^{+}(x_2),$$

не существует.

Тогда для любого $x \in (a,b)$ будет

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} - f'^{+}(x) = \alpha(x) > 0.$$

Построим функцию

$$\phi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) - f(x).$$

Функция ϕ непрерывна, так как является линейной комбинацией непрерывных функций, и, как нетрудно проверить, $f'^{+}(x) = \alpha(x)$ для всех $x \in (a,b)$. По предположению для всех $x \in (a,b)$ $\alpha(x) > 0$, и, следовательно, в силу теоремы 8, функция ϕ строго возрастающая. Но если ϕ непрерывна и строго возрастает, то обязательно должно выполняться неравенство $\phi(a) < \phi(b)$, в то время, как прямая подстановка показывает, что $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Полученное противоречие и доказывает существование точки $x_2 \in (a,b)$, о которой говорится в теореме.

Аналогично, рассуждением от противного, доказывается существование точки $x_1 \in (a,b)$ такой, что

$$f'^{+}(x_1) \le \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Объединяя эти два неравенства, приходим к требуемому результату.

Если же дополнительно известно, что функция f'^{+} непрерывна на (a,b), то, как нетрудно видеть, построенная выше функция ϕ удовлетворяет всем требованиям теоремы 11, и, следовательно, в силу этой последней, в (a,b) должна существовать точка x_0, в которой ϕ'^{+} обращается в нуль. Но

$$\phi'^{+}(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} - f'^{+}(x_0),$$

откуда и получается требуемое равенство.

5. Теорема о выпуклой функции

Функция f называется выпуклой, если из условия $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $\alpha \in [0,1]$, следует справедливость неравенства

$$f(x) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Если же для всех $\alpha \in (0,1)$ имеет место строгое неравенство, т.е.

$$f(x) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2),$$

то функция f называется строго выпуклой.

Основной целью этого пункта является доказательство теоремы, дающей необходимые и достаточные условия того, что функция f является выпуклой. Но прежде чем приступать к доказательству этой теоремы, докажем вспомогательное утверждение о восстановлении функции по значениям ее правой производной.

Теорема 13. Пусть непрерывная функция f в каждой точке $x \in [a,b]$ имеет правую производную $f^{'+}(x)$. Если $f^{'+}$ ограничена на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$ и для любого $x \in [a,b]$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f^{'+}(y)dy.$$

Доказательство. Построим функцию g, положив

$$g(x) = f(x), x \in [a,b] f(b) +$$
$$(x-b) f^{'+}(b), x > b.$$

Очевидно, что функция g непрерывна и имеет конечную правую производную на $[a,b+1]$. Для $x \in [a,b]$ и $n = 1$, 2, введем функцию

$$\phi_n(x) = n[g(x+\frac{1}{n}) - g(x)].$$

В каждой точке $x \in [a,b]$ будет

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = g^{'+}(x) = f^{'+}(x),$$

а так как каждая из функций ϕ_n, будучи непрерывной, измерима, то измерима и $f^{'+}$, откуда следует интегрируемость этой, по условию ограниченной, функции.

Далее, в силу теоремы 12,

$$g^{'+}(x+\frac{\theta^{'}}{n}) \le \phi_n(x) = [g(x+\frac{1}{n}) - g(x)]$$
$$\le g^{'+}(x+\frac{\theta^{''}}{n}), \qquad \theta^{'}, \theta^{''} \in (0,1),$$

так что все функции ϕ_n ограничены одним числом и, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла,

$$\int_a^b f^{'+}(x)dx = \int_a^b g^{'+}(x)dx =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)dx.$$

Но

$$\int_a^b \phi_n(x)dx$$
$$= n\int_a^b g(x+\frac{1}{n})dx - n\int_a^b g(x)dx$$
$$= n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} g(x)dx - n\int_a^b g(x)dx$$
$$= n\int_b^{b+\frac{1}{n}} g(x)dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} g(x)dx.$$

Применяя теорему о среднем к каждому из последних двух интегралов, получим

$$\int_a^b \phi_n(x)dx = g(b+\frac{\theta_n^{'}}{n}) - g(a+\frac{\theta_n^{''}}{n}),$$
$$\theta_n^{'}, \theta_n^{''} \in (0,1),$$

откуда, на основании непрерывности функции g,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)dx = \int_a^b g^{'+}(x)dx$$
$$= \int_a^b f^{'+}(x)dx$$
$$= g(b) - g(a) = f(b) - f(a).$$

Заменяя b на произвольное $x \in [a,b]$, получаем требуемое в условии теоремы равенство.

В заключение отметим, что замена переменной в интеграле и применение теоремы о среднем при доказательстве теоремы допустимы, так как в обоих случаях под интегралом стояли непрерывные функции.

Теорема 14. Для того чтобы ограниченная на (a,b) функция f была строго выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной и имела строго возрастающую правую производную $f^{'+}$, ограниченную в каждой точке.

Доказательство.

Необходимость. Если функция f выпуклая и ограниченная на (a,b), то она непрерывна на любом интервале $[p,q] \subset (a,b)$ [4], а следовательно она непрерывна и на (a,b).

Далее, в каждой точке интервала (a,b) непрерывная выпуклая функция имеет ограниченную правую производную [6].

Покажем, что эта производная есть функция строго возрастающая, если f строго выпуклая.

Выберем две произвольные точки x и $y > x$. Положим $\alpha = \frac{1}{2}(y - x)$ и обозначим через z точку $x + \alpha = y - \alpha$. Для правой производной выпуклой функции в каждой точке $x_0 \in (a,b)$ справедливы оценки [6]

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta)}{\beta} \le f'^{+}(x_0)$$
$$\le \frac{f(x_0 + \beta) - f(x_0)}{\beta},$$

где $\beta > 0$ столь мало, что $[x_0 - \beta, x_0 + \beta] \subset (a,b)$.

Применяя эти оценки к функции f в точках x и y при $\beta = \alpha$, получим два неравенства:

$$f'^{+}(x) \le \alpha^{-1}(f(z) - f(x)) = u,$$
$$f'^{+}(y) \ge \alpha^{-1}(f(y) - f(z)) = v.$$

По условию f – строго выпуклая, и в силу этого имеет место неравенство

$$u - v = \alpha^{-1}(2f(z) - f(x) - f(y)) < 0,$$

т.е. доказано неравенство $u < v$.

Но, как отмечалось выше,

$$f'^{+}(x) \le u \quad \text{и} \quad v \le f'^{+}(y),$$

откуда окончательно будем иметь

$$f'^{+}(x) \le u < v \le f'^{+}(y),$$

и, следовательно, $f'^{+}(x) < f'^{+}(y)$, что, ввиду произвольности выбора точек x и y, и доказывает строгое возрастание f.

Достаточность. Пусть f непрерывна на (a,b) и в каждой его точке имеет ограниченную правую производную, которая является строго возрастающей на (a,b) функцией.

Прежде всего отметим, что f'^{+} ограничена на каждом интервале $[p,q] \subset (a,b)$. действительно, выберем в (a, p) произвольную точку x_1, а в (q,b) произвольную точку x_2. Тогда, в силу монотонности функции f'^{+}, для любого $x \in [p,q]$ будет справедлива оценка

$$f'^{+}(x_1) < f'^{+}(x) < f'^{+}(x_2).$$

Замечание, что в точках x_1 и x_2 функция f'^{+} принимает конечные значения, и доказывает справедливость нашего утверждения.

Таким образом, показано, что на произвольном интервале

$$[p,q] \subset (a,b)$$

выполнены все условия теоремы 13, и потому для любого $x \in [p,q]$ имеет место представление:

$$f(x) = f(p) + \int_p^x f'^{+}(y)dy.$$

По условию функция f'^{+} строго возрастающая, и, следовательно, функция f строго выпуклая на $[p,q]$ [4]. Поскольку $[p,q]$ – произвольный интервал, принадлежащий (a,b), то f строго выпукла на (a,b).

Замечание. Ограниченностью функции f на (a,b) мы воспользовались только для доказательства ее непрерывности.

Таким образом, если заранее известно, что функция f непрерывна на (a,b), то требование ее ограниченности на этом интервале можно опустить.

Список литературы

1. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1974.
2. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. М.: Наука, 1974.
3. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Исследование структуры предельного инвариантного множества одного класса стационарных систем с векторным управлением // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2016. № 48. С. 93–99.
4. *Иванов Г.Г.* К вопросу устойчивости линейно однородных систем с переключениями // Устойчивость и процессы управления: матер. III Междунар. конф. 2015. С. 33–34.
5. *Ivanov G.G., Sharlay A.S.* On Stability of Linear Homogeneous Switched Systems // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. P. 13–15.
6. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Условия устойчивости линейных однородных систем с переключениями //

Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. № 3(34). С. 37–48.

7. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений // Вестник Пермского университета. Серия: Математи-ка. Механика. Информатика. 2017. № 2(37). С. 25–30.
8. *Иванов Г.Г., Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В.* Исследование структуры предельных инвариантных множеств стационарных управляемых систем с нелинейностями гистерезисного типа // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого): матер. XIII Междунар. конф. 2016. С. 163–165.
9. *Ефимова П.А., Алфёров Г.В., Иванов Г.Г.* Стабилизация программного движения объекта управления с упруго присоединенными элементами // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4, № 1. С. 139–143.
10. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The Structural Study Of Limited Invariant Sets Of Relay Stabilized Systems // Mechanical Systems: Research, Applications and Technology 2017. P. 101–164.
11. *Ivanov G., Alferov G., Sharlay A., Efimova P.* Conditions Of Asymptotic Stability For Linear Homogeneous Switched Systems // AIP Conference Proceedings Сер. "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2016" 2017. P. 080002.
12. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study On The Structure Of Limit Invariant Sets Of Stationary Control Systems With Nonlinearity Of Hysteresis Type // AIP Conference Proceedings Сер. "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2016" 2017. P. 080003.
13. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Интегрируемость негладких функций одной переменной // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics / Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы: тез. докл. междунар. конф., посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова. 2017. С. 149–153.
14. *Ivanov G., Alferov G., Efimova P.* Integrability Of Nonsmooth One-Variable Functions // 2017 Constructive Nonsmooth analysis and related topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA) 2017. P. 7973965.
15. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S.* Stability of Linear Systems With Multitask Right – Hand Member, Chapter, 203759. Stohastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering. 2018. P. 74–112.
16. *Kulakov F., Alferov G.V., Efimova P., Chernakova S., Shymanchuk D.* Modeling and Control Of Robot Manipulators With The Constraints At The Moving Objects // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. P. 102–105.
17. *Ефимова П.А., Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Шиманчук Д.В., Шарлай А.С.* Управление многозвенными манипуляционными роботами при наличии связей у перемещаемых ими объектов // Устойчивость и процессы управления: матер. III Междунар. конф. 2015. С. 121–122.
18. *Ефимова П.А., Шиманчук Д.В.* Моделирование движения космического манипуляционного робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2014. № 46. С. 20–30.
19. *Kulakov F., Alferov G., Efimova P.* Methods of remote control over space robots // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading 2015. P. 7106742.
20. *Ефимова П.А.* Кинематическая модель космического манипуляционного робота // Молодой ученый. 2015. № 6(86). С. 1–7.
21. *Efimova P., Shymanchuk D.* Dynamic Model of Space Robot Manipulator // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9, № 96. P. 4653–4659.
22. *Ефимова П.А.* Динамическая модель космического манипуляционного робота // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2, № 1. С. 173–179.
23. *Пичугин Ю.А., Малафеев О.А., Алфёров Г.В.* Оценивание параметров в задачах конструирования механизмов роботов-манипуляторов // Устойчивость и процесссы управления: матер. III Междунар. конф. 2015. С. 141–142.
24. *Alferov G.V., Malafeyev O.A., Maltseva A.S.* Programming The Robot In Tasks Of Inspection And Interception // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading 2015. P. 7106713.

25. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В.* Математические модели гибкого робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. № 27. Пермь, 1995. С. 92–97.

Derivative numbers of functions of one variable

G. G. Ivanov, G. V. Alferov, P. A. Gorovenko
Saint Petersburg State University; 7/9, Universitetskaya naberezhnaya, St. Petersburg, 199034, Russia
alferovgv@gmail.com; +7-911-246-57-87

The Fermat, Roll, and Lagrange theorems are generalized to the class of nondifferentiable functions, necessary and sufficient conditions for the monotonicity and convexity of functions of one variable are given.

Keywords: *the derived number; periodic solutions; almost periodic solutions; Nonsmooth analysis, Dini-Holder derivatives.*