ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2018 Математика. Механика. Информатика Вып. 2 (41)

УДК 519.2

Улучшенная схема МШРПС для анализа систем линейных стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями

И. Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г.Пермь, ул.Букирева, 15
polosk@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

Представлена модифицированная по отношению к исходной схема, сочетающая классический метод шагов и расширение пространства состояния (МШРПС) и предназначенная для анализа линейных стохастических систем нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями. Получено векторно-матричное представление уравнений для векторов функций математического ожидания и матриц функций ковариации цепочки расширенных векторов состояния, позволяющих полностью описать стохастическую динамику таких систем.

Ключевые слова: *стохастическая система*; *стохастическое дифференциальное уравнение*; *запаздывание*; *нейтральный тип*; *моментные функции.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-2-47-53

Введение

В теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (ДУсОА) принято деление рассматриваемых уравнений на три класса: с запаздыванием (ДУсЗ), опережением и нейтрального типа (ДУНТ), хотя четко установленных общих критериев такого разграничения нет [1]. В приложениях наиболее часто встречаются уравнения с запаздывающим аргументом, реже – уравнения нейтрального типа. Число прикладных задач, сводящихся к уравнениям с опережением, невелико.

Детерминированные уравнения нейтрального типа, включающие производные неизвестной функции не только при текущем, но и запаздывающем аргументе, по свойствам и по области приложений занимают промежуточное положение между обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), не разрешенными относительно производной, и уравнениями запаздывающего типа. Первые теоремы общей теории для ОДУНТ получены Г.А. Каменским [2]. Известно, что при доказательстве разрешимости задачи Коши возникает существенное затруднение, которое состоит в том, что построенные по задаче интегральные операторы в общем не являются вполне непрерывными [1].

Детерминированные ОДУНТ нередко возникают при моделировании двух или более простых колебательных систем с определенными взаимосвязями между ними. Среди них отметим задачи о передаче энергии без потерь [3], колебании масс, связанных упругим стержнем [4], проблемы столкновения двух частиц в электродинамике [5], систем химической технологии, теории аэроупругости [6, 7] и др.

В последние десятилетия, наряду с теорией детерминированных ДУсОА, интенсивно развивается аппарат анализа стохастических ДУсОА, включая стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения нейтрального типа (СОДУНТ). Общие формы, определение решения, постановка задачи Коши, условия существования и единственности решения этой задачи для системы таких уравнений, вопросы оценки роста начальных моментных функций, экспоненциальной устойчивости и иные проблемы рассмотрены в [8, 9] и других работах.

Поскольку большинство СОДУНТ не могут быть решены явно, важной задачей при изучении таких уравнений является разработка алгоритмов численного решения, таких, как метод Эйлера–Маруямы [10,11], полунеявный [12] и неявный [13] методы Эйлера, θ-методы [14] и др.

Известно, что основными вероятностными характеристиками векторов состояний стохастических систем с сосредоточенными параметрами с запаздываниями или без них являются многомерные плотности вероятности, зависящие от пространственных и временны́х координат. Но в настоящее время невозможно получить точные аналитические представления таких функций для векторов состояния произвольных систем СОДУ и СОДУсЗ. В ряде случаев можно ограничиться вычислением моментных характеристик векторов состояния. Анализ систем существенно упрощается, когда исследуемые системы могут быть описаны линейным СОДУ и аддитивными флуктуациями [15,16]. Такое же упрощение позволяет существенно продвинуться при построении расчетных процедур и для решения СОДУсЗ и, в частности, СОДУНТ.

В данной работе представлена модифицированная по отношению к исходной [17] схема, сочетающая классический метод шагов и расширение пространства состояния (МШРПС) и предназначенная для анализа линейных стохастических систем нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями. Общие положения данной схемы представлены в наших работах [18–23] и др., где построены различные формы МШРПС, ориентированные на изучение стохастических систем со специальными формами запаздывания. В отличие от известных методов [24] изложенная схема не предполагает предварительного изменения уравнений исследуемого объекта с целью исключения запаздывания.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему СОДУ нейтрального типа с кратными постоянными запаздываниями $\tau > 0$ следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \sum_{\ell=0}^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\ell}(t)\, \boldsymbol{X}\bigl(t-(\nu-\ell)\,\tau\bigr)+ \\ +\sum_{\ell=0}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(t)\, \dot{\boldsymbol{X}}\bigl(t-(\nu-\ell)\,\tau\bigr)+ \\ +\boldsymbol{c}_{\nu}(t)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu\nu}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \\ t_\nu = t_0+\nu\,\tau < t \leqslant T < +\infty, \qquad (1.1)\end{aligned}$$

где τ – постоянное запаздывание, $\nu > 0$ – целое, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^m$ – вектор независимых стандартных белых шумов с единичными интенсивностями, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\ell}(\cdot) = \{q_{\nu\ell ij}(\cdot)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(\cdot) = \{r_{\nu\ell ij}(\cdot)\}$: $[t_0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu\nu}(\cdot) = \{g_{\nu\nu ij}(\cdot)\} : [t_0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{c}_\nu(\cdot) = \{c_{\nu i}(\cdot)\} : [t_0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ – детерминированные непрерывные матричные и векторная функции аргумента t.

Предположим, что на полуинтервалах $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, ..., $(t_{\nu-1}, t_\nu]$ вектор состояния $\boldsymbol{X}(t)$, характеризуемый одноточечной плотностью вероятности $p(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяет следующим системам СОДУ и СОДУНТ:

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(t)\,\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{c}_0(t)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}(t)\,\boldsymbol{V}(t), \\ t_0 < t \leqslant t_1, \quad \boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{X}^0, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\end{gathered}$$

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\sum_{\ell=0}^{k}\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k\ell}(t)\,\boldsymbol{X}\big(t-(k-\ell)\,\tau\big)+$$
$$+\sum_{\ell=0}^{k-1}\boldsymbol{\mathcal{R}}_{k\ell}(t)\,\dot{\boldsymbol{X}}\big(t-(k-\ell)\,\tau\big)+$$
$$+\boldsymbol{c}_k(t)+\boldsymbol{\mathcal{G}}_{kk}(t)\,\boldsymbol{V}(t),\qquad t_k<t\leqslant t_{k+1},$$
$$t_k=t_0+k\,\tau,\qquad k=1,2,...,\nu-1,$$

где $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(\cdot)=\{q_{00ij}(\cdot)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{k\ell}(\cdot)=\{q_{k\ell ij}(\cdot)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{k\ell}(\cdot)=\{r_{k\ell ij}(\cdot)\}$: $[t_0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}(\cdot)=\{g_{00ij}(\cdot)\}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{kk}(\cdot)=\{g_{kkij}(\cdot)\}$: $[t_0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{c}_0(\cdot)=\{c_{0i}(\cdot)\}$, $\boldsymbol{c}_k(\cdot)=\{c_{ki}(\cdot)\}$: $[t_0,\infty)\mapsto\mathbb{R}^n$ – детерминированные непрерывные матричные и векторные функции аргумента t.

Построим системы ОДУ для компонент вектора функций математического ожидания $\boldsymbol{m}_X(t)=\mathbb{E}[\boldsymbol{X}(t)]$ и матрицы ковариаций $\boldsymbol{\mathcal{D}}(t)=\mathbb{E}\big[\mathring{\boldsymbol{X}}(t)\,\mathring{\boldsymbol{X}}^{\intercal}(t)\big]$ вектора состояний $\boldsymbol{X}$ при любом $t>t_0$, если в момент времени t_0 заданы значения элементов вектора математических ожиданий $\boldsymbol{m}^0=\mathbb{E}\big[\boldsymbol{X}^0\big]$ и ковариационной матрицы $\boldsymbol{\mathcal{D}}^0=\mathbb{E}\big[\mathring{\boldsymbol{X}}^0\,\mathring{\boldsymbol{X}}^{0\intercal}\big]$, где $\mathring{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_X$, $\mathbb{E}[...]$ и $\intercal$ – символы оператора математического ожидания и транспонирования матрицы соответственно.

2. Уравнения для расширенного вектора состояния

Для получения СОДУ без запаздывания, как и выше, применим метод расширения пространства состояний, сводя немарковский векторный процесс к марковскому. Для этого воспользуемся следующими обозначениями:

$$s\in[0,\tau],\quad t_q=t_0+q\,\tau,$$
$$q=0,1,2,...,N+1,\quad t_{N+1}\geqslant T,$$
$$\Delta_q=(t_q,t_{q+1}],\quad \overline{\Delta}_q=[t_q,t_{q+1}],$$
$$\boldsymbol{X}_q(s)=\boldsymbol{X}(s+t_q),\quad \boldsymbol{X}_q(0)=\boldsymbol{X}_{q-1}(\tau),$$
$$\boldsymbol{Y}(s)\equiv\boldsymbol{X}^0,$$
$$\boldsymbol{V}_q(s)=\boldsymbol{V}(s+t_q),\quad \boldsymbol{V}_q(0)=\boldsymbol{V}_{q-1}(\tau),$$
$$\boldsymbol{Z}_0(s)=\mathrm{col}\,\big(\boldsymbol{Y}(s),\boldsymbol{X}_0(s)\big),$$
$$\boldsymbol{Z}_1(s)=\mathrm{col}\,\big(\boldsymbol{Y}(s),\boldsymbol{X}_0(s),\boldsymbol{X}_1(s)\big)\equiv$$
$$\equiv\mathrm{col}\,\big(\boldsymbol{Z}_0(s),\boldsymbol{X}_1(s)\big),$$
$$\boldsymbol{Z}_2(s)=\mathrm{col}\,\big(\boldsymbol{Z}_1(s),\boldsymbol{X}_2(s)\big),\quad ...,$$
$$\boldsymbol{Z}_N(s)=\mathrm{col}\,\big(\boldsymbol{Z}_{N-1}(s),\boldsymbol{X}_N(s)\big),$$
$$\mathrm{col}\,\big(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\big)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{k_1\times k_2}$ – матрица размерности $k_1\times k_2$, причем равенство векторных случайных процессов в точке понимается в смысле сходимости почти наверное, и построим цепочку уравнений линейных СОДУ без запаздывания для векторов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, $\boldsymbol{Z}_2(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$, принадлежащих семейству вложенных пространств состояния $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{2n}\subset\mathbb{R}^{3n}\subset...\subset\mathbb{R}^{n(N+1)}$.

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q.

0°. На сегменте Δ_0 систему СОДУ, решением которой является случайная векторная функция $\boldsymbol{Z}_0(s)$, можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\boldsymbol{Z}_0(s)}{ds}=\boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s)\,\boldsymbol{Z}_0(s)+\boldsymbol{f}_0(s)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s)\,\boldsymbol{U}_0(s),$$

где

$$\boldsymbol{Z}_0(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}(s)\\\boldsymbol{X}_0(s)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_0(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\\boldsymbol{V}_0(s)\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{f}_0(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\\boldsymbol{c}_0^+\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\mathcal{A}}_0(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}&\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}&\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}^+\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_0(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}&\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}&\boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}^+\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{c}_0^+=\boldsymbol{c}_0(s_0),\quad \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}^+=\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}(s_0),\quad \boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}^+=\boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}(s_0).$$

1°. На сегментах Δ_0 и Δ_1 систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_1(s)$ можно представить так:

$$\frac{d\boldsymbol{Z}_1(s)}{ds}=\boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s)\,\boldsymbol{Z}_1(s)+\boldsymbol{f}_1(s)+\boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s)\,\boldsymbol{U}_1(s),$$

где

$$\boldsymbol{Z}_1(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}(s)\\\boldsymbol{X}_0(s)\\\boldsymbol{X}_1(s)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{U}_1(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\\boldsymbol{V}_0(s)\\\boldsymbol{V}_1(s)\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{f}_1(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n\\\boldsymbol{c}_0^+\\\boldsymbol{c}_1^+\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_1(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}&\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}&\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}&\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{00}^+&\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\\\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}&\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{10}^+&\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{11}^+\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_1(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}&\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}&\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}&\boldsymbol{\mathcal{G}}_{00}^+&\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\\\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}&\boldsymbol{\mathcal{G}}_{10}^+&\boldsymbol{\mathcal{G}}_{11}^+\end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q}_{10}^{+} = \mathcal{Q}_{10}(s_1) + \mathcal{R}_{10}(s_1)\,\mathcal{Q}_{00}^{+},$$
$$\mathcal{Q}_{11}^{+} = \mathcal{Q}_{11}(s_1),$$
$$\boldsymbol{c}_1^{+} = \boldsymbol{c}_1(s_1) + \mathcal{R}_{10}(s_1)\,\boldsymbol{c}_0^{+},$$
$$\mathcal{G}_{10}^{+} = \mathcal{R}_{10}(s_1)\,\mathcal{G}_{00}^{+},$$
$$\mathcal{G}_{11}^{+} = \mathcal{G}_{11}(s_1).$$

2°. Рассматривая сегменты Δ_0, Δ_1 и Δ_2 совместно, запишем систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_2(s)$:

$$\frac{d\boldsymbol{Z}_2(s)}{ds} = \mathcal{A}_2(s)\,\boldsymbol{Z}_2(s) + \boldsymbol{f}_2(s) + \mathcal{B}_2(s)\,\boldsymbol{U}_2(s),$$

где

$$\boldsymbol{Z}_2(s) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1(s)\\ \boldsymbol{X}_2(s)\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}_2(s) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_1(s)\\ \boldsymbol{V}_2(s)\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{f}_2(s) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1(s)\\ \boldsymbol{c}_2^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{A}_2(s) = \begin{bmatrix}\mathcal{A}_1(s) & \mathcal{O}_{3n\times n}\\ \mathcal{A}_2^{+} & \mathcal{Q}_{22}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B}_2(s) = \begin{bmatrix}\mathcal{B}_1(s) & \mathcal{O}_{3n\times m}\\ \mathcal{B}_2^{+} & \mathcal{G}_{22}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{A}_2^{+} = \begin{bmatrix}\mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{Q}_{20}^{+} & \mathcal{Q}_{21}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B}_2^{+} = \begin{bmatrix}\mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{G}_{20}^{+} & \mathcal{G}_{21}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{Q}_{20}^{+} = \mathcal{Q}_{20}(s_2) + \mathcal{R}_{20}(s_2)\,\mathcal{Q}_{00}^{+} + \mathcal{R}_{21}(s_2)\,\mathcal{Q}_{10}^{+},$$
$$\mathcal{Q}_{21}^{+} = \mathcal{Q}_{21}(s_2) + \mathcal{R}_{21}(s_2)\,\mathcal{Q}_{11}^{+},$$
$$\mathcal{Q}_{22}^{+} = \mathcal{Q}_{22}(s_2),$$
$$\boldsymbol{c}_2^{+} = \boldsymbol{c}_2(s_2) + \mathcal{R}_{20}(s_2)\,\boldsymbol{c}_0^{+} + \mathcal{R}_{21}(s_2)\,\boldsymbol{c}_1^{+},$$
$$\mathcal{G}_{20}^{+} = \mathcal{R}_{20}(s_2)\,\mathcal{G}_{00}^{+} + \mathcal{R}_{21}(s_2)\,\mathcal{G}_{10}^{+},$$
$$\mathcal{G}_{21}^{+} = \mathcal{R}_{21}(s_2)\,\mathcal{G}_{11}^{+},$$
$$\mathcal{G}_{22}^{+} = \mathcal{G}_{22}(s_2).$$

... ...

$\boldsymbol{\nu}$°. Продолжая подобным образом и далее, для сегментов Δ_0, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_ν запишем систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_\nu(s)$:

$$\frac{d\boldsymbol{Z}_\nu(s)}{ds} = \mathcal{A}_\nu(s)\,\boldsymbol{Z}_\nu(s) + \boldsymbol{f}_\nu(s) + \mathcal{B}_\nu(s)\,\boldsymbol{U}_\nu(s),$$

где

$$\boldsymbol{Z}_\nu(s) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{\nu-1}(s)\\ \boldsymbol{X}_\nu(s)\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}_\nu(s) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_{\nu-1}(s)\\ \boldsymbol{V}_\nu(s)\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{f}_\nu(s) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_{\nu-1}(s)\\ \boldsymbol{c}_\nu^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{A}_\nu(s) = \begin{bmatrix}\mathcal{A}_{\nu-1}(s) & \mathcal{O}_{(\nu+1)n\times n}\\ \mathcal{A}_\nu^{+} & \mathcal{Q}_{\nu\nu}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B}_\nu(s) = \begin{bmatrix}\mathcal{B}_{\nu-1}(s) & \mathcal{O}_{(\nu+1)n\times m}\\ \mathcal{B}_\nu^{+} & \mathcal{G}_{\nu\nu}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{A}_\nu^{+} = \begin{bmatrix}\mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{Q}_{\nu0}^{+} & \mathcal{Q}_{\nu1}^{+} & \dots & \mathcal{Q}_{\nu,\nu-1}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B}_\nu^{+} = \begin{bmatrix}\mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{G}_{\nu0}^{+} & \mathcal{G}_{\nu1}^{+} & \dots & \mathcal{G}_{\nu,\nu-1}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{Q}_{\nu j}^{+} = \mathcal{Q}_{\nu j}(s_\nu) + \sum_{\ell=j}^{\nu-1}\mathcal{R}_{\nu\ell}(s_\nu)\,\mathcal{Q}_{\ell j}^{+},$$
$$\mathcal{G}_{\nu j}^{+} = \sum_{\ell=j}^{\nu-1}\mathcal{R}_{\nu\ell}(s_\nu)\,\mathcal{G}_{\ell j}^{+}, \quad j = 0, 1, \dots, \nu-1,$$
$$\boldsymbol{c}_\nu^{+} = \boldsymbol{c}_\nu(s_\nu) + \sum_{\ell=0}^{\nu-1}\mathcal{R}_{\nu\ell}(s_\nu)\,\boldsymbol{c}_\ell^{+},$$
$$\mathcal{Q}_{\nu\nu}^{+} = \mathcal{Q}_{\nu\nu}(s_\nu), \quad \mathcal{G}_{\nu\nu}^{+} = \mathcal{G}_{\nu\nu}(s_\nu).$$

... ...

$(\boldsymbol{\nu}+\mathbf{1})$°. Теперь для сегментов Δ_0, Δ_1, Δ_2, ..., Δ_ν, $\Delta_{\nu+1}$ запишем систему СОДУ для вычисления вектора $\boldsymbol{Z}_{\nu+1}(s)$:

$$\frac{d\boldsymbol{Z}_{\nu+1}(s)}{ds} = \mathcal{A}_{\nu+1}(s)\,\boldsymbol{Z}_{\nu+1}(s) + {} + \boldsymbol{f}_{\nu+1}(s) + \mathcal{B}_{\nu+1}(s)\,\boldsymbol{U}_{\nu+1}(s),$$

где

$$\boldsymbol{Z}_{\nu+1}(s) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_\nu(s)\\ \boldsymbol{X}_{\nu+1}(s)\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{U}_{\nu+1}(s) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_\nu(s)\\ \boldsymbol{V}_{\nu+1}(s)\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_{\nu+1}(s) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_\nu(s)\\ \boldsymbol{c}_{\nu+1}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{A}_{\nu+1}(s) = \begin{bmatrix}\mathcal{A}_\nu(s) & \mathcal{O}_{(\nu+2)n\times n}\\ \mathcal{A}_{\nu+1}^{+} & \mathcal{Q}_{\nu+1,\nu+1}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B}_{\nu+1}(s) = \begin{bmatrix}\mathcal{B}_\nu(s) & \mathcal{O}_{(\nu+2)n\times m}\\ \mathcal{B}_{\nu+1}^{+} & \mathcal{G}_{\nu+1,\nu+1}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{A}_{\nu+1}^{+} = \begin{bmatrix}\mathcal{O}_{n\times n} & \mathcal{Q}_{\nu+1,0}^{+} & \mathcal{Q}_{\nu+1,1}^{+} & \dots & \mathcal{Q}_{\nu+1,\nu}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{B}_{\nu+1}^{+} = \begin{bmatrix}\mathcal{O}_{n\times m} & \mathcal{G}_{\nu+1,0}^{+} & \mathcal{G}_{\nu+1,1}^{+} & \dots & \mathcal{G}_{\nu+1,\nu}^{+}\end{bmatrix},$$
$$\mathcal{Q}_{\nu+1,j}^{+} = (1-\delta_{j0})\,\mathcal{Q}_{\nu,j-1}(s_{\nu+1}) + {} + \sum_{\ell=\max\{0,j-1\}}^{\nu-1}\mathcal{R}_{\nu\ell}(s_{\nu+1})\,\mathcal{Q}_{\ell+1,j}^{+},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+1,j} = \sum_{\ell=\max\{0,j-1\}}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_{\nu+1})\,\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\ell+1,j},$$
$$j = 0,1,...,\nu,$$
$$\boldsymbol{c}^{+}_{\nu+1} = \boldsymbol{c}_{\nu}(s_{\nu+1}) + \sum_{\ell=0}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_{\nu+1})\,\boldsymbol{c}^{+}_{\ell+1},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+1,\nu+1} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\nu}(s_{\nu+1}),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+1,\nu+1} = \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu\nu}(s_{\nu+1}).$$

... ...

$(\boldsymbol{\nu}+k)^{\circ}$. Рассматривая по аналогии сегменты Δ_0, Δ_1, ..., Δ_ν, $\Delta_{\nu+1}$, ..., $\Delta_{\nu+k}$ ($k = 1$, 2, ..., $N-\nu$), получим

$$\frac{d\boldsymbol{Z}_{\nu+k}(s)}{ds} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu+k}(s)\,\boldsymbol{Z}_{\nu+k}(s) + \boldsymbol{f}_{\nu+k}(s) + {} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu+k}(s)\,\boldsymbol{U}_{\nu+k}(s),$$

где

$$\boldsymbol{Z}_{\nu+k}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}_{\nu+k-1}(s) \\ \boldsymbol{X}_{\nu+k}(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{U}_{\nu+k}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{\nu+k-1}(s) \\ \boldsymbol{V}_{\nu+k}(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{f}_{\nu+k}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_{\nu+k-1}(s) \\ \boldsymbol{c}^{+}_{\nu+k} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu+k}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\nu+k-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(\nu+k+1)n\times n} \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{\nu+k} & \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,\nu+k} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu+k}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\nu+k-1}(s) & \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(\nu+k+1)n\times m} \\ \boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{\nu+k} & \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,\nu+k} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{+}_{\nu+k} = \big[\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times n}\ \ \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,0}\ \ \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,1}\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,\nu+k-1}\big],$$
$$\boldsymbol{\mathcal{B}}^{+}_{\nu+k} = \big[\boldsymbol{\mathcal{O}}_{n\times m}\ \ \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,0}\ \ \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,1}\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ \boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,\nu+k-1}\big],$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,j} = \mathbb{1}(j-k)\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu,j-k}(s_{\nu+k}) + {} + \sum_{\ell=\max\{0,j-k\}}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_{\nu+k})\,\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\ell+k,j},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,j} = \sum_{\ell=\max\{0,j-k\}}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_{\nu+k})\,\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\ell+k,j},$$
$$j = 0,1,...,\nu+k-1,$$
$$\boldsymbol{c}^{+}_{\nu+k} = \boldsymbol{c}_{\nu}(s_{\nu+k}) + \sum_{\ell=0}^{\nu-1} \boldsymbol{\mathcal{R}}_{\nu\ell}(s_{\nu+k})\,\boldsymbol{c}^{+}_{\ell+k},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Q}}^{+}_{\nu+k,\nu+k} = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_{\nu\nu}(s_{\nu+k}),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{+}_{\nu+k,\nu+k} = \boldsymbol{\mathcal{G}}_{\nu\nu}(s_{\nu+k}),$$

где $\mathbb{1}(\cdot)$ – функция единичного скачка.

3. Уравнения для первых моментных функций расширенного вектора состояния

Теперь построенную выше цепочку линейных СДУ без запаздывания на основе применяемой схемы можно использовать для получения новой последовательности уравнений – последовательности систем ОДУ для первых моментов векторов $\boldsymbol{Z}_0(s)$, $\boldsymbol{Z}_1(s)$, ..., $\boldsymbol{Z}_N(s)$. Для этого введем следующие обозначения:

$$\boldsymbol{m}_\ell(s) = \mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_\ell(s)] = {} = \operatorname{col}\big(\boldsymbol{m}_Y(s), \boldsymbol{m}_{X_0}(s), \boldsymbol{m}_{X_1}(s), ..., \boldsymbol{m}_{X_\ell}(s)\big),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_\ell(s) = \mathbb{E}\big[\mathring{\boldsymbol{Z}}_\ell(s)\,\mathring{\boldsymbol{Z}}^{\mathsf{T}}_\ell(s)\big] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 11} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 12} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 21} & \ldots & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 22} \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 11} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{YY}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{YX_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{YX_1}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0X_1}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_1Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_1X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_1X_1}(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 12} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{YX_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{YX_\ell}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0X_\ell}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_1X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_1X_\ell}(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 21} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-1}Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-1}X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-1}X_1}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_\ell Y}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_\ell X_0}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_\ell X_1}(s) \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 22} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-1}X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-1}X_\ell}(s) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_\ell X_{\ell-1}}(s) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_\ell X_\ell}(s) \end{bmatrix},$$
$$\ell = 0,1,2,...,N.$$

В результате этого решение остающейся части поставленной задачи можно привести к уже стандартной процедуре, тем более, что как и выше, вектор $\boldsymbol{m}_{X_\ell}(s)$ и матрица $\boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_\ell X_\ell}(s)$ являются блоками вектора $\boldsymbol{m}_\ell(s)$ и матрицы $\boldsymbol{\mathcal{D}}_\ell(s)$ соответственно, а поэтому после вычисления последних просто требуется выбрать из них необходимые блоки.

Если применить соотношения корреляционной теории, то из предыдущих рассуждений следует, что на шаге ℓ числовые характеристики вектора $\boldsymbol{Z}_\ell^+(s)$ являются решениями следующих задач Коши:

$$\frac{d\boldsymbol{m}_\ell(s)}{ds} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^+(s)\,\boldsymbol{m}_\ell(s) + \boldsymbol{f}_\ell^+(s),$$

$$\boldsymbol{m}_\ell(0) = \mathrm{col}\big(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{m}_{X_0}(\tau), \boldsymbol{m}_{X_1}(\tau), ..., \boldsymbol{m}_{X_{\ell-2}}(\tau), \boldsymbol{m}_{X_{\ell-1}}(\tau)\big),$$

$$\frac{d\boldsymbol{\mathcal{D}}_\ell(s)}{ds} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_\ell(s) + \big[\boldsymbol{\mathcal{A}}_\ell^+(s)\,\boldsymbol{\mathcal{D}}_\ell(s)\big]^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell^+(s)\,\big[\boldsymbol{\mathcal{B}}_\ell^+(s)\big]^{\mathsf{T}},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_\ell(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 11}(0) & ... & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 12}(0) \\ ... & ... & ... \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 21}(0) & ... & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 22}(0) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 11}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{D}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{YX_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{D}}^0 & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{YX_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0X_0}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 12}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{YX_{\ell-2}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{YX_{\ell-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{YX_{\ell-2}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{YX_{\ell-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0X_{\ell-2}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_0X_{\ell-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 21}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-2}Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-2}Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-2}X_0}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-1}Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-1}Y}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-1}X_0}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\ell 22}(0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-2}X_{\ell-2}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-2}X_{\ell-1}}(\tau) \\ \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-1}X_{\ell-2}}(\tau) & \boldsymbol{\mathcal{D}}_{X_{\ell-1}X_{\ell-1}}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\ell = 0, 1, 2, ..., N.$$

Заключение

Итак, в работе получено векторно-матричное представление уравнений для векторов функций математического ожидания и матриц функций ковариации цепочки расширенных векторов состояния, позволяющих полностью описать стохастическую динамику линейной дифференциальной системы нейтрального типа с кратными запаздываниями. Представленный алгоритм без особого труда может быть реализован на любом программном языке высокого уровня.

Список литературы

1. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С. и др.* Теория уравнений нейтрального типа // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 1982. Т. 19. С. 55–126.
2. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
3. *Brayton R.K.* Nonlinear oscillations in a distributed network // Quarterly of Applied Mathematics. 1967. Vol. 24, № 24. P. 289–301.
4. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
5. *Driver R.D.* A functional differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics // International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics. New York, London: Academic Press, 1963. P. 474–484.
6. *Kolmanovskii V.B., Nosov V.R.* Stability of functional differential equations. London: Academic Press, 1986. XIV, 217 p.
7. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied theory of functional differential equations. Mathematics and its Applications. Dordrecht: Springer, 1992. XVI, 234 p.
8. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
9. *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. 2nd ed. Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011. XVIII, 422 p.
10. *Wu F., Mao X.* Numerical solutions of neutral stochastic functional differential equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2008. Vol. 46, № 4. P. 1821–1841.
11. *Zhou Sh., Wu F.* Convergence of numerical solutions to neutral stochastic delay differential equations with Markovian switching // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. Vol. 229, № 1. P. 85–96.
12. *Wang W., Chen Y.* Mean-square stability of semi-implicit Euler method for nonlinear neutral stochastic delay differential equations // Applied Numerical Mathematics. 2011. Vol. 61, № 5. P. 696–701.
13. *Singh S., Raha S.* An implicit method for some NSDDEs of Itô's form // Journal of Numerical Mathematics and Stochastics. 2010. Vol. 2, № 1. P. 45–53.
14. *Gan S., Schurz H., Zhang H.* Mean square convergence of stochastic θ-methods for nonlinear neutral stochastic differential delay equations // International Journal of Numerical Analysis and Modeling. 2011. Vol. 8, № 2. P. 201–213.

15. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах: учеб. пособие. Ижевск: РХД, 2005. 296 с.
16. *Полосков И.Е.* Стохастический анализ динамических систем [Электронный ресурс]: монография. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2016. 772 с.
17. *Malanin V.V., Poloskov I.E.* About some schemes of study for systems with different forms of time aftereffect // Proc. of the IUTAM Symp. on Nonlin. Stochastic Dynamics and Control (Hangzhou, China) / W.Q. Zhu, Y.K. Lin, G.C. Cai (eds.): IUTAM Bookseries, Vol. 29. Dordrecht: Springer, 2011. P. 55–64.
18. *Полосков И.Е.* Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 58–73.
19. *Полосков И.Е.* Компьютерное моделирование динамики загрязнения бассейна реки с учетом запаздывания и случайных факторов // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 1. С. 103–115.
20. *Полосков И.Е.* Движение транспортного средства по дороге со случайным профилем с учетом запаздывания // Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 3. С. 3–14.
21. *Poloskov I.E.* Symbolic-numeric algorithms for analysis of stochastic systems with different forms of aftereffect // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM). 2007. Vol. 7, № 1. P. 2080011–2080012.
22. *Полосков И.Е.* Стохастические дифференциальные системы со случайными запаздываниями в форме дискретных цепей Маркова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, вып. 4. С. 501–516.
23. *Poloskov I., Malanin V.* A scheme for study of linear stochastic time-delay dynamical systems under continuous and impulsive fluctuations // International Journal of Dynamics and Control. 2016. Vol. 4, № 2. P. 195–203.
24. *Elbeyli O., Sun J.Q., Ünal G.* A semi-discretization method for delayed stochastic systems // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2005. Vol. 10, № 1. P. 85–94.

Improved MSSSE scheme for analysis of systems of linear stochastic ordinary differential equations of neutral type with multiple constant delays

I. E. Poloskov
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
polosk@psu.ru; (342) 239 65 60

The paper presents a new form of the scheme combining the classical method of steps and an extension of the state space (MSSSE) and intended for analysis of linear stochastic systems of neutral type with multiple constant delays. We have obtained a vector-matrix representation of the equations for the vectors of the mathematical expectation and matrices of the covariance functions for the chain of extended state vectors. This representation allows to design a full description for the stochastic dynamics of such systems.

Keywords: *stochastic system*; *stochastic differential equation*; *delay*; *neutral type*; *moment functions.*