ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2018 Математика. Механика. Информатика Вып. 2(41)

УДК 517.977

# Теорема Боля–Перрона и обратная к ней об асимптотической устойчивости для гибридных линейных систем с последействием*

**П. М. Симонов**

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15

simpm@mail.ru; 8(342)2396849

Рассматривается абстрактная гибридная система функционально-дифференциальных уравнений. Одно уравнение по части переменных функционально-дифференциальное, по другой части переменных – разностное, второе уравнение по части переменных разностное, по другой части переменных – функционально-дифференциальное. Возникает система двух уравнений с двумя неизвестными. Применен W-метод Н.В. Азбелева к двум уравнениям. Изучены два модельных уравнения: одно – это система функционально-дифференциальных уравнений, второе – это система разностных уравнений. Изучены пространства решений. Получена теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости для гибридной системы функционально-дифференциальных уравнений. Сформулирована теорема об обращении.

**Ключевые слова:** *теорема Боля–Перрона; гибридная линейная система функционально-дифференциальных уравнений; асимптотическая устойчивость; метод модельных уравнений, теорема об обращении.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-2-38-43

## Введение

Исследованию по устойчивости решений гибридных линейных систем с последействием (ГЛФДСП) к настоящему времени посвящено крайне мало работ.

В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений линейных стационарных ГЛФДСП. Для систем вида

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t),$$
$$x_2(t) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t-h),$$
$$x_1(0) = x_{10} \in \mathbb{R}^k, \quad x_2(\tau) = \psi(\tau), \ \tau \in [-h,0),$$

$A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{k\times(n-k)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$, $\psi:[-h,0) \to \mathbb{R}^{n-k}$ – кусочно-непрерывная вектор-функция, получены необходимые и достаточное условия экспоненциальной устойчивости [1].

Предложенная статья продолжает исследование, начатое в [2–7]. Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [8–10] позволила дать ясное и лаконичное описание основных свойств решений, в том числе свойства устойчивости решений. В то же время широкие и актуальные для приложений классы систем ГЛФДСП, а именно, гибридных линейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием, формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. Ниже предлагаются гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости, в частности, теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости и ее обращение.

## 1. Схема W-метода

Обозначим через

$$y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$$

бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots$ размерами $n$, а



*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, № 18-01-00332 А.

через $g=\{g(0),g(1),...,g(N),\dots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $g(0),g(1),...,g(N),\dots$ размерами *n*.

Каждой бесконечной матрице

$$y=\{y(-1),y(0),y(1),...,y(N),\dots\}$$

можно сопоставить вектор-функцию

$$y(t)=y(-1)\chi_{[-1,0)}(t)+y(0)\chi_{[0,1)}(t)+$$
$$y(1)\chi_{[1,2)}(t)+...+y(N)\chi_{[N,N+1)}(t)+\dots$$

Аналогично, каждой бесконечной матрице $g=\{g(0),g(1),...,g(N),\dots\}$ можно сопоставить вектор-функцию

$$g(t)=g(0)\chi_{[0,1)}(t)+g(1)\chi_{[1,2)}(t)+...$$
$$+g(N)\chi_{[N,N+1)}(t)+\dots$$

Символом $y(t)=y[t]$ обозначим вектор-функцию $y(t)=y([t])$, $t\in[-1,\infty)$. Символом $g[t]$ обозначим вектор-функцию $g(t)=g([t])$, $t\in[0,\infty)$.

Множество таких вектор-функций $y[\cdot]$ обозначим символом $\ell_0$. Множество таких вектор-функций $g[\cdot]$ обозначим символом $\ell$.

Обозначим

$$(\Delta y)(t)=y(t)-y(t-1)=y[t]-y[t-1] \text{ при } t\geq 1,$$
$$(\Delta y)(t)=y(t)=y[t]=y(0) \text{ при } t\in[0,1).$$

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{11}x+\mathcal{L}_{12}y=\dot{x}-F_{11}x-F_{12}y=f,\\&\mathcal{L}_{21}x+\mathcal{L}_{22}y=\Delta y-F_{21}x-F_{22}y=g.\end{aligned}\qquad(1)$$

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ – пространство векторов $\alpha=\mathrm{col}\{\alpha^1,...,\alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{R^n}$. Пусть пространство $L$ локально суммируемых $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с полунормами $\|f\|_{L[0,T]}=\int_0^T\|f(t)\|_{R^n}dt$ для всех $T>0$. Пространство $D$ локально абсолютно непрерывных функций $x:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с полунормами $\|x\|_{D[0,T]}=\|\dot{x}\|_{L[0,T]}+\|x(0)\|_{R^n}$ для всех $T>0$.

Пусть пространство $\ell$ бесконечных матриц $g=\{g(0),g(1),...,g(N),\dots\}$ с полунормами $\|g\|_{\ell_T}=\sum_{i=0}^{T}\|g_i\|_{R^n}$ для всех $T\geq 0$. Пространство $\ell_0$ бесконечных матриц $y=\{y(-1),y(0),y(1),...,y(N),\dots\}$ с полунормами $\|y\|_{\ell_{0T}}=\sum_{i=-1}^{T}\|y_i\|_{R^n}$ для всех $T\geq -1$. Операторы $\mathcal{L}_{11},F_{11}:D\to L$, $\mathcal{L}_{12},F_{12}:\ell_0\to L$, $\mathcal{L}_{21},F_{21}:D\to\ell$, $\mathcal{L}_{22},F_{22}:\ell_0\to\ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Если элементы $\mathrm{col}\{x,y\}$ $:[0,\infty)\times[-1,\infty)\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ образуют банахово пространство $\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0\cong(\mathbf{B}\times\mathbb{R}^n)\times(\mathbf{M}\times\mathbb{R}^n)$ (пространство $\mathbf{D}\subset D$, пространство $\mathbf{B}\subset L$, пространство $\mathbf{M}\subset\ell$, $\mathbf{B},\mathbf{M}$ – банаховые пространства) обладают какими-нибудь специфическими свойствами, например $\sup_{t\geq 0}\|x(t)\|_{R^n}+\sup_{k=-1,0,1,\dots}\|y(k)\|_{R^n}<\infty$, и для уравнения $\mathcal{L}\{x,y\}=\mathrm{col}\{f,g\}$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L}:\mathbf{D}\times\mathbf{M}_0\to\mathbf{B}\times\mathbf{M}$ однозначно разрешима задача Коши, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами.

Пусть модельное уравнение [8–10] $\mathcal{L}_{11}x=z$ и банахово пространство $\mathbf{B}$ с элементами из пространства $L$ ($\mathbf{B}\subset L$ и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами.

Например, $\sup_{t\geq 0}\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}<\infty$. Тогда, положив $\mathcal{L}_{11}x\stackrel{def}{=}\dot{x}+x=z$, принимаем в качестве банахова пространства $\mathbf{B}$ банахово пространство $L_\infty$ измеримых и ограниченных в существенном функций $z:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\operatorname{vrai}\sup_{t\geq 0}\|z(t)\|_{\mathbb{R}^n}<\infty$. Пространство $D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений вида

$$x(t)=(W_{11}z)(t)+(U_{11}\alpha)(t)=$$
$$=\int_0^t e^{-(t-s)}z(s)ds+\alpha e^{-t}$$
$$(\alpha\in\mathbb{R}^n,\ z\in L_\infty).$$

Эти решения ограничены ($\sup_{t\geq 0}\|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}<\infty$) и их производная $\dot{x}=-x+z$ принадлежит пространству $L_\infty$. Все решения этого уравнения образуют банахово пространство с нормой

$$\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11},L_\infty)}=$$
$$=\operatorname{vrai}\sup_{t\geq 0}\|\dot{x}(t)+x(t)\|_{\mathbb{R}^n}+\|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}<\infty,$$

которое линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W^{(1)}_{\infty}[0,\infty)$ с нормой

$$\|x\|_{W^{(1)}_{\infty}[0,\infty)} =$$

$$= \sup_{t\ge 0} \|x(t)\|_{R^n} + \operatorname{vrai}\sup_{t\ge 0} \|\dot{x}(t)\|_{R^n}.$$

Дальше будем это пространство обозначать как $W_{L_\infty}$. При этом $W_{L_\infty} \subset D$, и это вложение непрерывно.

Аналогично для банахова пространства $\mathbf{B} \subset L$ можно ввести банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11},\mathbf{B})$ с нормой

$$\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11},\mathbf{B})} = \|\dot{x}+x\|_{\mathbf{B}} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Здесь вложение $\mathbf{B} \subset L$ непрерывно. Предположим, что оператор $W_{11}$ непрерывно действует из пространства $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{B}$, и оператор $U_{11}$ действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbf{B}$. Это условие эквивалентно тому [8, 10], что пространство $D(\mathcal{L}_{11},\mathbf{B})$ линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W^{(1)}_{\mathbf{B}}[0,\infty)$ с нормой

$$\|x\|_{W^{(1)}_{\mathbf{B}}[0,\infty)} = \|\dot{x}\|_{\mathbf{B}} + \|x\|_{\mathbf{B}}.$$

Дальше будем это пространство обозначать как $\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}}$. При этом $\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}} \subset D$, и это вложение непрерывно.

Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11}) \to \mathbf{B}$ $D(\mathcal{L}_{11},\mathbf{B})$-устойчиво, если для каждой правой части $z \in \mathbf{B}$ каждое решение $x \in D(\mathcal{L}_{11},\mathbf{B})$ [8]. $D(\mathcal{L}_{11}) \subset D$ – область определения оператора $\mathcal{L}_{11}$.

Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : D(\mathcal{L}_{11},\mathbf{B}) \to \mathbf{B}$, удовлетворяющему условию выше, $D(\mathcal{L}_{11},\mathbf{B})$-устойчиво тогда и только тогда, если оно сильно $\mathbf{B}$-устойчиво. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ сильно $\mathbf{B}$-устойчиво, если для любого $z \in \mathbf{B}$ каждое решение $x$ этого уравнения обладает свойством: $x \in \mathbf{B}$ и $\dot{x} \in \mathbf{B}$ [8, гл. IV, § 4.6; 10].

Операторы $\mathcal{L}_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22} : \ell_0 \to \ell$ рассматриваются как приведения на пары $(\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}},\mathbf{B})$, $(\mathbf{M}_0,\mathbf{B})$, $(\boldsymbol{W}_{\mathbf{B}},\mathbf{M})$, $(\mathbf{M}_0,\mathbf{M})$. Эти операторы предполагаются линейные вольтерровые и ограниченные.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \mathbf{M}$ принадлежит пространству $\mathbf{M}_0$ и представляется формулой Коши: $y[t] = (Y_{22}y(-1))[t] + (C_{22}g)[t] =$

$$= Y_{22}[t]y(-1) + \sum_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]g[s].$$

Обозначим пространства:

$$\ell_{\infty 0} = \{y \in \ell_0 : \|y\|_{\ell_{\infty 0}} =$$

$$= \sup_{k=-1,0,1,\cdots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\},$$

$$\ell_{\infty} = \{g \in \ell : \|g\|_{\ell_{\infty}} =$$

$$= \sup_{k=0,1,\cdots} \|g(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\}.$$

Банаховы пространства $\ell_{\infty 0}$ и $\ell_{\infty}$ – это примеры пространств типа $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{M}$.

Обозначим: $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}$.

Тогда (1) записывается в виде $\mathcal{L}\{x,y\} = \operatorname{col}\{f,g\}$.

Предположим, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(-1) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешима задача Коши для "модельной" системы

$$\dot{x} = F^0_{11}x + F^0_{12}y + z,\quad \Delta y = F^0_{21}x + F^0_{22}y + u,$$

где операторы $F^0_{11} : D \to L$, $F^0_{12} : \ell_0 \to L$, $F^0_{21} : D \to \ell$, $F^0_{22} : \ell_0 \to \ell$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми.

Тогда модельную систему можно коротко записать так: $\mathcal{L}_0\{x,y\} = \operatorname{col}\{z,u\}$.

Пусть ее решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{W} : L \times \ell \to D \times \ell_0$ – непрерывный вольтерров оператор Коши для системы, $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$, $U : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to D \times \ell_0$ – фундаментальная матрица для системы,

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}.$$

## 2. Теоремы Боля–Перрона

Для обыкновенного дифференциального уравнения еще в монографиях [11, 12], отмечались явления, которые в терминах $D(\mathcal{L}^0_{11},\mathbf{B})$-устойчивости можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях относительно оператора $\mathcal{L}_{11}$ из $D(\mathcal{L}^0_{11},\mathbf{B})$-устойчивости следует более тонкое асимптотическое свойство, а именно

$D(\mathcal{L}^0_{11},\mathbf{B}_1)$-устойчивость, где $\mathbf{B}_1$ – некоторое подпространство пространства $\mathbf{B}$.

Следуя традиции Пермского семинара [8–10], соответствующие утверждения будем называть *теоремами Боля–Перрона*. В основе следующих доказательств таких теорем лежат свойства подпространства $\mathbf{B}\subset L$, вытекающие из их *порядковой структуры*, которую определим следующим образом. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *частичную упорядоченность*: $\alpha=\mathrm{col}\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}\geq 0$, если $\alpha_i\geq 0$, $i=1,\ldots,n$; $\alpha\geq\beta$, если, $\alpha-\beta\geq 0$.

Через $|\alpha|$ будем обозначать вектор, определяемый равенством $|\alpha|$ = $\mathrm{col}\{|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_n|\}$. Будем предполагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирована норма $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, обладающая свойством *монотонности*: $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}\leq\|\beta\|_{\mathbb{R}^n}$, если $|\alpha|\leq|\beta|$. В соответствии с порядком в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *отношение порядка* в пространстве $L$. А именно $y\geq 0$, если $y(t)\geq 0$ почти всюду на $[0,\infty)$; $y\geq z$, если $y-z\geq 0$. Через $\mathbf{|} y \mathbf{|}$ будем обозначать функцию, почти всюду на $[0,\infty)$ определяемую равенством $\mathbf{|} y\mathbf{|}(t)=|y(t)|$. Относительно банахова пространства $\mathbf{B}\subset L$ будем предполагать, что норма в пространстве $\mathbf{B}$ согласована с порядком через условие *идеальности*: если $z\in L$, $y\in\mathbf{B}$ и $\mathbf{|}z\mathbf{|}\leq\mathbf{|}y\mathbf{|}$, то $z\in\mathbf{B}$ и $\|z\|_{\mathbf{B}}\leq\|y\|_{\mathbf{B}}$.

Среди прочих свойств пространств, удовлетворяющих этому условию (*банаховых идеальных пространств* [13]), отметим следующие:

1) норма в таком пространстве $\mathbf{B}$ обладает свойством монотонности;

2) любое ограниченное по порядку подмножество пространства $\mathbf{B}$ имеет точные грани ($\mathbf{B}$ – $K$*-пространство*);

3) в пространстве $\mathbf{B}$ определены "*срезки*" – операторы умножения на характеристические функции $\chi_M$ измеримого множества $M\subset[0,\infty)$; 4) вложение $\mathbf{B}\subset L$ непрерывно.

## 3. Асимптотическая устойчивость

Введем подмножество $\mathbf{B}_0\subset\mathbf{B}$ всех таких функций $z\in\mathbf{B}$, что для каждой функции $z$ выполняется равенство $\lim\limits_{s\to\infty}\|\chi_{[s,\infty)}z\|_{\mathbf{B}}=0$. Иначе говоря, пространство $\mathbf{B}_0$ состоит из всех функций $z\in\mathbf{B}$, стремящихся при $t\to\infty$ к нулю по метрике пространства $\mathbf{B}$, причем нетрудно показать, что $\mathbf{B}_0$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{B}$ и совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{B}}$ линейного многообразия всех финитных функций $z\in\mathbf{B}$. Здесь и ниже $C$ – пространство непрерывных и ограниченных функций $x:[0.\infty)\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C=\sup\limits_{t\geq 0}|x(t)|$. Пусть далее $C_0$ – это подпространство пространства $C$, состоящее из всех таких $x\in C$, для которых $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$, $\|x\|_{C_0}=\|x\|_C$.

Будем предполагать, что для пространства $\mathbf{B}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}^0_{11}x=z$ выполнены условия:

а) оператор Коши $W_{11}$ действует из пространства $\mathbf{B}_0$ в пространство $C_0$ и ограничен;

б) столбцы фундаментальной матрицы $U_{11}$ уравнения $\mathcal{L}^0_{11}x=z$ принадлежат пространству $C_0$.

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $D(\mathcal{L}^0_{11},\mathbf{B}_0)\subset C_0$ и асимптотическая устойчивость модельного уравнения.

**Лемма 1.** *Имеет место непрерывное вложение* $D(\mathcal{L}^0_{11},\mathbf{B})\subset C$.

Таким образом, в указанных предположениях относительно пространства $\mathbf{B}$ и модельного уравнения, $D(\mathcal{L}^0_{11},\mathbf{B})$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}_{11}x=z$ гарантирует устойчивость по Ляпунову, а $D(\mathcal{L}^0_{11},\mathbf{B}_0)$-устойчивость – асимптотическую устойчивость.

Сформулируем распространение теоремы Боля–Перрона на уравнение $\mathcal{L}_{11}x=f$ [8, гл. IV, § 4.3; 9].

**Теорема 1.** *Пусть уравнение* $\mathcal{L}_{11}x=z$ $D(\mathcal{L}^0_{11},\mathbf{B})$ *– устойчиво и оператор* $\mathcal{L}_{11}:D(\mathcal{L}_{11})\to L$ *действует из пространства* $D(\mathcal{L}^0_{11},\mathbf{B}_0)$ *в пространство* $\mathbf{B}_0$ *и ограничен. Тогда это уравнение* $D(\mathcal{L}^0_{11},\mathbf{B}_0)$ *– устойчиво.*

Обозначим $Q_{11}=\mathcal{L}_{11}W_{11}$. Справедливы леммы.

**Лемма 2.** *Для линейного ограниченного вольтеррова оператора* $Q_{11}:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ *справедливо включение* $Q_{11}^{*}\mathbf{B}_0^{*}\subset\mathbf{B}_0^{*}$.

**Лемма 3.** *Пусть линейный ограниченный оператор* $Q_{11}:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ *вольтерров и* $Q_{11}\mathbf{B}_0\subset\mathbf{B}_0$. *Тогда если этот оператор имеет обратный оператор* $Q_{11}^{-1}:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$, *то* $Q_{11}^{-1}\mathbf{B}_0\subset\mathbf{B}_0$.

Теорема 1 допускает обращение, если пространство $\mathbf{B}$ обладает следующим свойством ($\mathbf{B}0$): если $z\in L$ и $\sup\limits_{s\geq 0}\|[z]_s\|_{\mathbf{B}}<\infty$, то $z\in\mathbf{B}$ и $\|z\|_{\mathbf{B}}=\sup\limits_{s\geq 0}\|[z]_s\|_{\mathbf{B}}$

**Лемма 4.** *Пусть пространство* $\mathbf{B}$ *обладает свойством* ($\mathbf{B}0$). *Тогда любой линейный ограниченный вольтерров оператор* $Q_{110}:\mathbf{B}_0\to\mathbf{B}_0$ *допускает единственное ограниченное вольтеррово распространение* $Q_{11}:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$, *причем* $\|Q_{11}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{B}}=\|Q_{110}\|_{\mathbf{B_0}\to\mathbf{B_0}}$.

На основании этой леммы и теоремы 4 можно сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть пространство* $\mathbf{B}$ *обладает свойством* ($\mathbf{B}0$). *Тогда эквивалентны утверждения:*

*а) уравнение* $\mathcal{L}_{11}x=f$ $D(\mathcal{L}_{11}^{0},\mathbf{B}_0)-$*устойчиво;*

*б) уравнение* $\mathcal{L}_{11}x=f$ $D(\mathcal{L}_{11}^{0},\mathbf{B})-$*устойчиво и оператор* $\mathcal{L}_{11}:D(\mathcal{L}_{11})\to L$ *действует из пространства* $D(\mathcal{L}_{11}^{0},\mathbf{B})$ *в пространство* $\mathbf{B}_0$.

Введем банахово пространство всех таких функций $g\in\ell_{\infty}^{0}\subset\ell_{\infty}$ ($g\in\ell_{\infty 0}^{0}\subset\ell_{\infty 0}$), что для каждой функции $g$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\|\chi_{[n,n+1,\cdots,\infty)}g\|_{\ell_\infty}=0$$

$$(\lim_{n\to\infty}\|\chi_{[n,n+1,\cdots,\infty)}g\|_{\ell_{\infty 0}}=0).$$

Пусть банахово пространство $\mathbf{b}\subset\ell$ бесконечных матриц

$$g=\{g(0),g(1),...,g(N),\ldots\}$$

с нормой $\|g\|_{\mathbf{b}}$. Банахово пространство $\mathbf{b_0}\subset\ell_0$ бесконечных матриц $y=\{y(-1),y(0),y(1),...,y(N),\ldots\}$ с нормой $\|y\|_{\mathbf{b}_0}$. Причем вложение $\mathbf{b}\subset\ell$ ($\mathbf{b_0}\subset\ell_0$). Пусть в банаховом пространстве $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b_0}$) выполнены все предыдущие в п. 2 условия.

Введем подмножество $\mathbf{b^0}\subset\mathbf{b}$ всех таких функций $g\in\mathbf{b}$, что для каждой функции $g$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\|\chi_{[n,n+1,\cdots,\infty)}g\|_{\mathbf{b}}=0$.

Иначе говоря, пространство $\mathbf{b^0}$ состоит из всех функций $g\in\mathbf{b}$, стремящихся при $t\to\infty$ к нулю по метрике пространства $\mathbf{b}$, причем нетрудно показать, что $\mathbf{b^0}$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{b}$ и совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{b}}$ линейного многообразия всех финитных функций $g\in\mathbf{b}$. Аналогично определяем пространство $\mathbf{b_0^0}$.

Будем предполагать, что для пространства $\mathbf{b}$ и модельного уравнения $\mathcal{L}_{22}^{0}y=g$ выполнены условия:

а) оператор Коши $W_{22}$ действует из пространства $\mathbf{b}^0$ в пространство $\ell_{\infty 0}^{0}$ и ограничен;

б) столбцы фундаментальной матрицы $U_{22}$ уравнения $\mathcal{L}_{22}^{0}y=g$ принадлежат пространству $\ell_{\infty 0}^{0}$.

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $D(\mathcal{L}_{22}^{0},\mathbf{b}^0)\subset\ell_{\infty 0}^{0}$ и асимптотическая устойчивость второго модельного уравнения.

**Лемма 5.** *Имеет место непрерывное вложение* $D(\mathcal{L}_{22}^{0},\mathbf{b})\subset\ell_{\infty 0}$.

Сформулируем распространение теоремы Боля–Перрона на уравнение $\mathcal{L}\{x,y\}=\{f,g\}$.

**Теорема 3.** *Пусть пространство* $\mathbf{B}$ *обладает свойством* ($\mathbf{B}0$). *Операторы* $\mathcal{L}_{12}:D(\mathcal{L}_{22}^{0},\mathbf{b})\to\mathbf{B}$, $\mathcal{L}_{21}:D(\mathcal{L}_{11}^{0},\mathbf{B})\to\mathbf{b}$ *ограничен, причем* $\mathcal{L}_{12}(D(\mathcal{L}_{22}^{0},\mathbf{b^0}))\subset\mathbf{B_0}$, $\mathcal{L}_{21}(D(\mathcal{L}_{11}^{0},\mathbf{B}_0))\subset\mathbf{b^0}$. *Пусть, уравнение* $\mathcal{L}_{11}x=f$ $D(\mathcal{L}_{11}^{0},\mathbf{B})-$*устойчиво и уравнение* $\mathcal{L}_{22}y=g$ $D(\mathcal{L}_{22}^{0},\mathbf{b})-$*устойчиво, а операторы* $\mathcal{L}_{11}:D(\mathcal{L}_{11})\to L$, $\mathcal{L}_{22}:D(\mathcal{L}_{22})\to\ell$ *непрерывно действует из пространства* $D(\mathcal{L}_{11}^{0},\mathbf{B}_0)$ *и* $D(\mathcal{L}_{22}^{0},\mathbf{b}^0)$ *в пространства* $\mathbf{B}_0$ *и* $\mathbf{b}^0$. *Пусть, далее, уравнение* $\mathcal{L}_1x=(\mathcal{L}_{11}-\mathcal{L}_{12}C_{22}\mathcal{L}_{21})x=f_1$ $D(\mathcal{L}_{11}^{0},\mathbf{B}_0)-$*устойчиво и оператор* $\mathcal{L}_1W_{11}:\mathbf{B}_0\to\mathbf{B}_0$ *ограничен. Тогда эквивалентны утверждения:*

*а) уравнение* $\mathcal{L}\{x,y\}=\mathrm{col}\{f,g\}$ *будет* $D(\mathcal{L}_0,\mathbf{B}_0\times\mathbf{b^0})-$*устойчиво;*

*б) уравнение* $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ *будет* $D(\mathcal{L}_0, \mathbf{B}\times\mathbf{b})$ *– устойчиво.*

### Список литературы


1. *Марченко В.М., Луазо Ж.Ж.* Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальное уравнение. 2009. Т. 45, № 5. С. 728–740.
2. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона для гибридных линейных систем с последействием // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. № 2(33). С. 56–60.
3. *Симонов П.М.* К вопросу о теореме Боля–Перрона для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 1. С. 75–81.
4. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона для гибридных линейных систем с последействием // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 132. Труды Международного симпозиума "Дифференциальные уравнения – 2016". Пермь, 17–18 мая 2016. М.: ВИНИТИ РАН, 2017. С. 122–126.
5. *Simonov P.M.* The Bohl–Perron theorem for hybrid linear systems with aftereffect // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230, № 5. P. 775–781.
6. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП) // Вестник РАЕН. Темат. номер "Дифференциальные уравнения". 2016. Т. 16, № 3. С. 55–59.
7. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения: материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева (Пермь, 17–19 мая 2017 г.) / Пермь, ПНИПУ, 2018. С. 230–235.
8. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2001. 230 с.
9. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последействием. III // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1659–1668.
10. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.*. Устойчивость линейных систем с последействием. IV // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 2. С. 196–204.
11. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
12. *Массера Х.Л., Шеффер Х.Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970. 456 с.
13. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. 4-е изд., испр. СПб: Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2004. 816 с.


# The Bohl-Perron theorem and the inverse theorem about asymptotic stability for hybrid linear systems with aftereffect

**P. M. Simonov**
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
simpm@mail.ru; 8(342)2396849

The abstract hybrid system of functional differential equations is given. One part of the equation for variable functional differential, according to another of the variables is the difference one, the second part of the equation for variable differential, according to another of the variables is functional differential one. There is a system of two equations with two unknowns. Apply W-method N.V. Azbelev's to two equations. Two model equations were studied: one is a system of functional differential equations, and the second is a system of differential equations. We studied the solutions spaces. The Bohl–Perron theorem on asymptotic stability for a hybrid system of functional differential equations is obtained. The inverse theorem is formulated.

**Keywords:** *theorem of Bohl–Perron; hybrid linear system of functional differential equations; stability, model equations' method, converse theorem.*