ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Математика. Механика. Информатика Вып. 2(41)

УДК 512.544

Группы, насыщенные инвариантными подгруппами

Я. Д. Половицкий, Т. М. Коневских
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
alg@psu.ru; 8(342) 236-82-83

Описаны локально конечные группы, в которых для достаточно больших множеств пар *(A, B)* инцидентных подгрупп группы *G* существуют инвариантные в *G* подгруппы *N*, такие, что $A \le N \le B$.

Ключевые слова: *группа; инцидентная подгруппа; инвариантная подгруппа.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-2-31-37

Введение

В работе вводится несколько условий, обеспечивающих насыщенность группы инвариантными подгруппами. В классе локально конечных групп эти условия оказались эквивалентными и определяют группы, содержащиеся в классе групп с инвариантными нециклическими подгруппами.

Используются следующие обозначения:
G^p – подгруппа, порожденная *p*-ми степенями всех элементов группы *G*;
$A \leftthreetimes B$ – полупрямое произведение групп *A* и *B;*
B^g – подгруппа $g^{-1}Bg$ ($B \le G$, $g \in G$);
b^g – элемент $g^{-1}bg$ группы *G;*
E_{p^n} – элементарная абелева группа порядка p^n;
□ – конец доказательства;
p, q, r – различные простые числа;
$A \ntriangleleft B$ – подгруппа *A* неинвариантна в *G*.

Основные определения и некоторые связи между рассматриваемыми классами

Определение 1. В группе *G* выполняется M_I-*условие*, если для любой пары *(C, D)* ее подгрупп, из которых $C \lessdot D$, хотя бы одна из этих подгрупп инвариантна в *G*. Группу с M_I-*условием* назовем M_I-*группой*.

Определение 2. В группе *G* выполняется B_I-*условие*, если для любой пары ее инцидентных подгрупп $C < D$ существует подгруппа $N \triangleleft G$ такая, что $C \le N \le D$. Группу с B_I-*условием* назовем B_I-*группой*.

Определение 3. В группе *G* выполняется O_I-*условие*, если из любой пары ее инцидентных подгрупп хотя бы одна инвариантна в *G*. Группу с O_I-*условием* назовем O_I-*группой*.

Определение 4. В группе *G* выполняется I_n-*условие*, если все ее нециклические подгруппы инвариантны в *G*. Группу с I_n-*условием* назовем I_n-*группой*.

Из определений 1–4 видно, что каждое из введенных там условий переносится на подгруппы и фактор-группы.

Очевидно, класс O_I-*групп* содержится в классе B_I-*групп*, а последний – в классе M_I-*групп*.

Конечные I_n-*группы* изучены в работах [1–3], причем в [2] и [3] изучены и локально конечные группы с этим условием. Точнее, там описаны локально конечные $\overline{H}$ -*группы*.

Определение 5 (см. [2]). Неабелева группа *G*, имеющая истинную нециклическую подгруппу, называется $\overline{H}$ -*группой*, если все нециклические подгруппы группы *G* инвариантны в *G*.

Из определений 4 и 5 видно, что класс I_n-*групп* – это объединение классов $\overline{H}$ -*групп*, абелевых групп и групп, все истинные подгруппы которых циклические.

Лемма 1. Пусть G – конечная M_I-*группа*, $A < G$ и $A \ntriangleleft G$ (1). Тогда A – примарная циклическая группа и всякая истинная подгруппа C группы A инвариантна в G (последнее утверждение верно и для любой циклической подгруппы бесконечной р-группы G с M_I-*условием*).

Доказательство. Пусть $M <\cdot A$. Тогда из (1) и M_I-*условия* для G следует, что $M \triangleleft G$ (2). Если A не является примарной циклической, то ввиду конечности A в ней существует по крайней мере две максимальные подгруппы M_1 и M_2. В силу доказанного выше $M_i \triangleleft G$ (i=1, 2), и, так как $A=M_1M_2$, то $A \triangleleft G$, в противоречие с условием (1). Значит, A – циклическая р-группа. Тогда любая ее истинная подгруппа C содержится в M и является характеристической подгруппой группы M. Отсюда и из (2) следует, что $C \triangleleft G$. Это утверждение для р-подгруппы A верно и для бесконечной р-группы G с M_I-*условием*. □

Следствие 1. Всякая конечная M_I-*группа* G является I_n-*группой*.

Доказательство. Действительно, в силу леммы 1 в G всякая нециклическая подгруппа инвариантна, и поэтому G есть I_n-*группа*.

Следствие 2. Для конечных групп условия M_I, O_I и B_I равносильны.

Доказательство. Докажем равносильность условий M_I и O_I. В силу определений 1 и 3 достаточно доказать, что всякая M_I-*группа* является O_I-*группой*. Пусть $C < D$ (3) – две инцидентные подгруппы M_I-*группы* G. Если $D \ntriangleleft G$, то в силу леммы 1 D – циклическая р-группа, а тогда из (3) и леммы 1 следует, что $C \triangleleft G$, и потому G является O_I-*группой*. Значит, классы конечных M_I-*групп* и O_I-*групп* совпадают. Так как класс B_I-*групп* расположен между ними, то утверждение следствия 2 справедливо. □

Лемма 2. В периодической недедекиндовой M_I-*группе* G порядок любой элементарной абелевой р-подгруппы делит p^2.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда в G содержится подгруппа $B = B_1 \times B_2 \times B_3$ (1), где $|B_i| = p$ (2), i=1, 2, 3. Для каждой подгруппы $< b > \subset B$, как нетрудно видеть, найдутся такие подгруппы C_1 и C_2 группы B, изоморфные E_{p^2}, что $C_1 \cap C_2 = < b >$ (3). Так как подгруппы C_i нециклические, то по лемме 1 $C_i \triangleleft G$, а тогда из (3) следует, что $< b > \triangleleft G$. Так как $|b| = p$ и G – р-группа, то $< b > \subset Z = Z(G)$ (4).

Пусть g – произвольный элемент из G\1. В силу (1) и (2) $|< g > \cap B| \mid p$, и потому найдется подгруппа D группы B такая, что $D = D_1 \times D_2$ (5), $|D_i| = p$ (6), $i = 1,2$ и $< g > \cap D = 1$ (7). В силу (4) $D_i \subset Z$, и потому в G существуют подгруппы $H_i = D_i \times < g >$ (8), $i = 1,2$. Они нециклические и потому по лемме 1 $H_i \triangleleft G$ (9), $i = 1,2$. Если $H_1 = H_2$, то $H_i \supset D$ и в силу (8) и (5) тогда $(< g > \cap D) \neq 1$, в противоречие с (7). Значит, $H_1 \neq H_2$. Так как из (8) и (6) следует, что $< g > <\cdot H_i$, то из (8) и (9) получается, что $H_1 \cap H_2 = < g >$. Отсюда и из (9) следует, что $< g > \triangleleft G$. Из произвольности $< g >$ теперь получаем, что группа G дедекиндова, в противоречие с условием леммы 2. Этим доказана справедливость утверждения леммы 2. □

Непримарные локально конечные M_I-*группы*

Теорема 1. Конечная недедекиндова непримарная группа G является M_I-*группой* тогда и только тогда, когда она – группа одного из следующих типов: 1. $G=A \rtimes B$, $|A| = p$, B – циклическая q-группа, $Z(G) <\cdot B$; 2. $G=A \rtimes B$, $|B| = q$, $A \cong E_{p^2}$, A является минимальной нормальной подгруппой группы G.

Необходимость. Пусть конечная непримарная недедекиндова группа G является M_I-*группой*. Обозначим через R произведение всех инвариантных силовских подгрупп группы G. В силу леммы 1 в R содержатся все нециклические силовские подгруппы группы G. Если все силовские подгруппы группы G циклические, то, как известно, в G тоже есть инвариантная силовская подгруппа. Из сказанного следует, что всегда $R \neq 1$ и $R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k$ (1), где P_i – силовская p_i-подгруппа группы G, $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$ $i, j = \overline{1,k}$ и $P_i \triangleleft G$.

Возможны два случая:

1. R=G, то есть G – нильпотентная группа.

Так как по условию теоремы 1 группа G непримарна, то из условия 1 и (1) следует, что $k \geq 2$ (2). Рассмотрим произвольный p_i-

элемент $g_i \in (P_i \setminus 1)$ (3). В силу (2) и (1) существует элемент $g_j \in (P_j \setminus 1)$ (4) при $i \neq j$ (5). Тогда подгруппа $H = <g_i, g_j> = <g_i> \times <g_j>$ (6) непримарна, и в силу леммы 1 $H \lhd G$ (7). Но ввиду (3)–(5) $(|g_i|, |g_j|) = 1$, а тогда из (6) и (7) следует, что $<g_i> \lhd G$. Значит, при любом $i = \overline{1,k}$ все циклические p_i-подгруппы группы *G* инвариантны в *G*. Отсюда легко получается, что в *G* инвариантны все подгруппы, а тогда *G* дедекиндова, в противоречие с условием теоремы.

Значит, случай 1 невозможен.

2. $R \neq G$.

Тогда из определения *R* следует, что $(|R|, |G/R|) = 1$ (8), и по теореме Шура $G = R \rightthreetimes B$ (9). Отсюда и из (8) следует, что $(|R|, |B|) = 1$ (10).

Если $B \lhd G$, то $G = R \times B$, и, так как *B* является *M_I-группой*, из доказанного перед пунктом 1 и (10) следует, что в *B* существует инвариантная силовская подгруппа *P* группы *G*, а тогда по определению *R* имеем $P < R$, вопреки (9). Значит, $B \ntriangleleft G$ (11). Отсюда и из леммы 1 следует, что *B* – циклическая q-группа и если $M <\cdot B$ (12), то $M \lhd G$, а тогда $R \rightthreetimes M = R \times M$. Учитывая, что *B* – циклическая группа, отсюда и из (9) получаем, что $M \subset Z$, где $Z = Z(G)$, и так как $B \not\subset Z$ (ввиду (11)), то $(Z \cap B) <\cdot B$ (13).

Пусть $N(B) \neq B$ (14). Тогда отсюда, из (9) и (11) следует, что $N(B) = R_0 \times B$ (15), где $1 < R_0 < R$. Поэтому подгруппа $N(B)$ непримарна и в силу леммы 1 $N(B) \lhd G$. Теперь отсюда, из (15) и (10) получаем, что $B \lhd G$, в противоречие с (11). Значит, $N(B) = B$ (16).

Пусть *P* – силовская p-подгруппа группы *R*. Так как *R* нильпотентна, то $P \lhd G$. Так как *P* – конечная p-группа, то $Z(P) \neq 1$, и потому нижний слой *A* группы $Z(P)$ отличен от 1. Очевидно, $A \lhd G$ (17), как характеристическая подгруппа группы *P*. Непримарная (в силу (8)) подгруппа $F = A \rightthreetimes B$ по лемме 1 инвариантна в *G*.

Если $F \neq G$, то по теореме Фраттини $G = F \cdot N(B) = A \cdot N(B) = A \rightthreetimes B$ (в силу (16)). Теперь отсюда, из (9) и (10) получаем, что $F = G$, в противоречие с предположением. Значит, $A = R$, то есть *R* – элементарная абелева p-группа. В силу леммы 2 $|R| \mid p^2$ (18).

Если $|R| = p$, то так как ввиду (9) и (11) $R \not\subset Z$, в силу (13) $Z <\cdot B$, и *G* – группа типа 1 теоремы 1.

В силу (18) остается рассмотреть случай, когда $|R| = p^2$, то есть (ввиду сказанного выше) когда $R \cong E_{p^2}$. Предположим, что в *R* существует собственная *B* – допустимая подгруппа R_1. Тогда, учитывая (8) и (9), по теореме Машке получаем: $R = R_1 \times R_2$ (19), где R_2 также *B* – допустима, и $|R_i| = p$, $i = 1,2$ Непримарные подгруппы $R_i \rightthreetimes B$ по лемме 1 инвариантна в *G*, а тогда, учитывая (10) и (19), имеем: $(R_1 \rightthreetimes B) \cap (R_2 \rightthreetimes B) = B \lhd G$, вопреки (11).

Значит, в *R* нет собственных *B*-допустимых подгрупп. В частности, $(Z \cap R) = 1$, и ввиду (9) $Z \subset B$. Пусть $Z \neq 1$. Рассмотрим подгруппу $C = <a> \times <z>$ (20), где $a \in (R \setminus 1)$ и $z \in (Z \setminus 1)$. По лемме 1 *C* инвариантная в *G*, а тогда из $(|a|, |z|) = 1$ (ибо $z \subset B$) и (20) следует, что $<a> \lhd G$, то есть подгруппа $<a>$ группы *R B* – допустима, вопреки доказанному выше (ибо *R* нециклическая и потому $<a> \neq R$). Значит, $Z = 1$. Отсюда и из (13) получаем, что $|B| = q$. Значит, *G* – группа типа 2 теоремы 1. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть *G* – группа типа 1 теоремы 1. Тогда всякая ее непримарная подгруппа *N* содержит *A* и так как G/A абелева, то $N \lhd G$. Всякая примарная подгруппа *C* непростого порядка группы *G* является циклической q-группой. Если $C \ntriangleleft G$, то в силу описания группы типа 1 $C = B^x$ для некоторого $x \in G$, а тогда $Z(G) <\cdot B^x$. Так как в B^x нет других максимальных подгрупп, то отсюда следует, что *G* является *M_I-группой*.

В группе *G* типа 2 теоремы 1 единственной собственной нециклической подгруппой является *A* (ибо в *G* нет подгрупп порядка *pq*), а все циклические подгруппы имеют простые порядки. Так как $A \cong E_{p^2}$, то нетрудно видеть, что *G* является *M_I-группой*. □

Замечание 1. Отметим, что в группе типа 1 все собственные подгруппы циклические.

Лемма 3. Если недедекиндова непримарная локально конечная группа *G* является *M_I-группой*, то *G* – конечная группа.

Доказательство. Предположим, что G – бесконечная группа. Пусть g_1, g_2 – любые отличные от 1 элементы группы G. Так как G по условию леммы непримарна, то в ней существуют p-элемент a и q-элемент b. Тогда $S = < g_1, g_2, a, b >$ – непримарная конечная подгруппа группы G, содержащая g_1 и g_2. Так как G – M_I-*группа*, то ее подгруппа S является M_I-*группой*. Если бы все такие подгруппы были дедекиндовыми, то $g_2^{-1} g_1 g_2 \subset < g_1 >$ $\forall g_2 \in (G \setminus 1)$ и $\forall g_1 \in (G \setminus 1)$, а тогда $< g_1 > \lhd G$ и группа G дедекиндова, в противоречие с условием леммы. Значит, среди таких непримарных конечных подгрупп группы G существует недедекиндова M_I-*подгруппа* F. По теореме 1 F – группа одного из типов 1 или 2 этой теоремы.

Если F – группа типа 2, то есть группа порядка $p^2 q$ с нециклической силовской p-подгруппой, то она не может содержаться как в группе типа 1 (ибо в последней все силовские подгруппы циклические), так и в группе типа 2 большего порядка; но тогда $F <\cdot G$, а в бесконечной локально конечной группе не может быть конечных максимальных подгрупп.

Значит, F – группа типа 1 теоремы 1, и любая содержащая ее конечная подгруппа F_1 группы G также является группой типа 1. Так как F не максимальная в G, то такая F_1 существует. Но в силу замечания 1 все собственные подгруппы группы F_1 циклические, то есть и F – циклическая группа, в противоречие с определением группы типа 1.

Этим доказано, что G не может быть бесконечной группой, то есть $|G| < \infty$. □

Следствие 1. Бесконечная непримарная локально конечная M_I-*группа* дедекиндова.

Следствие 2. Для любой непримарной локально конечной группы G условия M_I, O_I и B_I равносильны.

Доказательство. Для дедекиндовых групп это утверждение верно. Пусть G недедекиндова и является M_I-*группой*. В силу леммы 3 группа G конечна, а тогда из следствия 2 леммы 1 вытекает справедливость утверждения данного следствия. □

Следствие 3. Пусть G – недедекиндова непримарная локально конечная группа. В группе G тогда и только тогда инвариантны все подгруппы непростых порядков, когда G – группа одного из следующих типов:

1. неабелева группа порядка pq;
2. группа типа 2 теоремы 1.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть в G все подгруппы непростых порядков инвариантны. Если $1 < A <\cdot B < G$, то подгруппа B имеет непростой порядок, и в силу условия следствия 3, $B \lhd G$. Это означает, что G является M_I-*группой*. В силу леммы 3 группа G конечна, а тогда по теореме 1 G – группа типа 1 или 2 теоремы 1. Если G – группа типа 1 этой теоремы, то, так как $B \ntriangleleft G$, по нашему условию $|B| = q$, то есть G – неабелева группа порядка pq. □

Замечание 2. Из теоремы 1 и леммы 3 видно, что класс непримарных локально конечных M_I-*групп* отличается от класса непримарных дедекиндовых групп только двумя типами групп, приведенными в теореме 1. С другой стороны, класс таких M_I-*групп* содержится в силу леммы 3 и следствия 1 леммы 1 в классе конечных непримарных I_n-*групп*, содержащих класс таких $\overline{H}$-*групп*. В силу теоремы 1 непримарными локально конечными M_I-*группами*, входящими в класс $\overline{H}$-*групп*, являются только группы типа 2 теоремы 1.

Локально конечные p-группы с M_I-*условием*

Установим одно интересное свойство примарных локально конечных I_n-*групп*.

Теорема 2. Пусть G – локально конечная p-группа с I_n-*условием*. Если $A = < g >$ – произвольная ее циклическая подгруппа, то каждая истинная подгруппа C группы A инвариантна в G.

Доказательство. Для дедекиндовой группы G справедливость утверждения теоремы очевидна.

Пусть группа G недедекиндова. Так как G локально конечная, то $|A| < \infty$.

Если $A \lhd G$ (1), то так как A циклическая p-группа, любая ее подгруппа C является характеристической подгруппой группы A, а тогда из (1) следует, что $C \lhd G$.

Пусть $A \ntriangleleft G$ (2). Если $|A| = p$, то утверждение теоремы верно. Пусть $|A| = p^n$ (3), где $n \geq 2$ (4).

Возможны два случая:

1. В группе G более одной подгруппы порядка p.

Так как G – локально конечная p-группа, то в G есть конечная подгруппа с условием 1 и потому в G существует подгруппа $N \cong E_{p^2}$ (5). В силу I_n*-условия* $N \lhd G$. Рассмотрим подгруппу $R = NA$ (6). В силу (3) – (5) $A \not\subset N$ и $N \not\subset A$, то есть $R \neq N$ (7) и $R \neq A$ (8). Подгруппа R нециклическая, и в силу I_n*-условия* $R \lhd G$ (9).

Возможны два подслучая:

1.1. $(A \cap N) \neq 1$.

Тогда из (5), (7) и (8) следует, что $|A \cap N| = p$ (10). Из (3) – (6) получаем:

$$|R| = \frac{|N| \cdot |A|}{|A \cap N|} = \frac{p^2 \cdot p^n}{p} = p^{n+1}.$$

Отсюда и из (3) следует, что $A <\cdot R$ и, так как R – конечная p-группа, то $A \lhd R$. Так как $|R/A| = p$, то $\forall r \subset (R/A)$ имеем: $r^p \subset A$ (11). Если $< r^p >=< g >$, то $A << r >$ и, так как $A <\cdot R$ то $< r >= R$, в противоречие с тем, что R нециклическая. Значит, $r^p \subset< g^p >= M$ (12). Отсюда вытекает, что $R^p = M$ (13), а тогда, так как R^p – характеристическая подгруппа группы R, то ввиду (9) $R^p \lhd G$, то есть в силу (13) $M \lhd G$ (14). Так как ввиду (12) $M <\cdot A$ и A – циклическая p-группа, а $C < A$, то отсюда следует, что $C \leq M$. Но C – характеристическая подгруппа группы M и справедливо (14), и потому $C \lhd G$. Значит, в случае 1.1 теорема верна.

1.2. $(A \cap N) = 1$.

Тогда $R = N \rtimes A$ (15). Так как $R \lhd G$ и R – конечная p-группа, то $(N \cap Z(R)) \ni z$ (16), где $|z| = p$ (17). В силу (15) и (16) имеем $S =< z, g >=< z > \times < g >$ (18). Так S нециклическая, то ввиду I_n*-условия* $S \lhd G$. В силу (17) и (18) $S^p =< g^p >$, и потому из (19) следует, что $< g^p > \lhd G$. Теперь так же, как и в конце пункта 1.1, получаем, что $C \lhd G$ (20). Итак, в случае 1 теорема верна.

2. G содержит единственную подгруппу порядка p.

Возможны два случая:

2.1. G – конечная группа.

Тогда, так как G нециклическая, то, как известно, она изоморфна обобщенной группе кватернионов Q_{2^n}, причем $n \geq 4$ (ибо G негамильтонова). В такой группе всякая неинвариантная циклическая подгруппа $< g >$, как известно (см., напр. [5] задача 17.21) имеет порядок 4. Но тогда $|g^2| = 2$, и потому $< g^2 >= Z(G) \lhd G$. Отсюда, так как $|C| \leq 2$, следует, что $C \leq< g^2 >$, и потому $C \lhd G$.

2.2. G – бесконечная группа.

Тогда из единственности подгруппы порядка p в G следует, что G имеет конечную максимальную элементарную абелеву подгруппу, и потому, как показано в [4], группа G черниковская. Ввиду условия 2 полная часть P группы G квазициклическая. Так как G недедекиндова, то $G \neq P$.

Рассмотрим подгруппу $H=PA$ (21) группы G. Если $A \subset P$, то $A \lhd G$, вопреки предположению (2). Значит, $A \not\subset P$, и потому $H \neq P$ (22). Так как $P \cong C_{p^\infty}$, то $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ (23), где P_k – циклические группы. Из $P \lhd G$ следует, что $P_k \lhd G$. Если все подгруппы $H_k = P_k A$ (24) циклические, то из (21) и (23) следует, что H – абелева группа, и, так как по условию 2 ее нижний слой имеет порядок p, то $H = P$, вопреки (22). Значит, хотя бы одна из подгрупп H_k нециклическая. Так как G является I_n*-группой*, то $H_k \lhd H$, а тогда из конечности H_k следует, что $|H/C_H(H_k)| < \infty$, и потому $P \subset C(H_k)$, а ввиду $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$, получаем, что $P \subset C(H)$. Отсюда и из (21) следует, что подгруппа H абелева, что, как и выше, приводит к противоречию.

Значит, случай 2.2 невозможен.

Из доказанного в случаях 1 и 2.1 вытекает справедливость утверждения теоремы. □

Следствие. Если локально конечная p-группа G является I_n*-группой*, то G – O_I*-группа*.

Доказательство. Пусть $A < B \leq G$ (25) и G является I_n*-группой*. Если хотя бы одна из подгрупп A и B нециклическая, то в силу I_n*-условия* эта подгруппа инвариантна в G. Если подгруппа B циклическая и $B \ntriangleleft G$, то из теоремы 2 и (25) следует, что $A \lhd G$. Значит, G является O_I*-группой*. □

Теорема 3. Для локально конечной p-группы G равносильны следующие условия: 1. I_n*-условие*; 2. M_I*-условие*; 3. O_I*-условие*; 4. B_I*-условие*.

Доказательство. Если G дедекиндова, то для нее, очевидно, теорема 3 верна.

Рассмотрим недедекиндову группу G. Докажем для нее ряд следующих импликаций:

$1 \to 3$. Доказано в следствии теоремы 2.

$3 \to 2$. Вытекает из определений *O_I-групп* и *M_I-групп*.

$2 \to 1$. Пусть G является *M_I-группой*. Если G конечная, то она является *I_n-группой* в силу следствия 1 леммы 1.

Пусть G бесконечная. Если все конечные подгруппы группы G циклические, то G – локально циклическая p-группа, а тогда, как известно, G – квазициклическая p-группа, то есть дедекиндова, в противоречие с нашим предположением. Значит, в G существует конечная нециклическая подгруппа. Пусть B – произвольная нециклическая подгруппа группы G и $g \subset (G/B)$.

Если $|B| < \infty$, то $S = < B, g >$ – конечная *M_I-группа* (ибо G локально конечная и *M_I-условие* переносится на подгруппы), и в силу следствия 1 леммы 1 $B^g = B$. Так как это справедливо для любого $g \in (G/B)$, то $B \lhd G$ (1), т. е. в G все конечные нециклические подгруппы инвариантны.

Пусть $|B| = \infty$ (2). Возможны два случая:

1. Подгруппа B имеет конечную нециклическую подгруппу.

Тогда ввиду локальной конечности B каждый ее элемент $b \in B$ содержится в некоторой конечной нециклической подгруппе B_1 группы G. По доказанному выше $B_1 \lhd G$, и потому для любого $g \in G$ имеем: $b^g \in B_1 \subset B$. Так как это справедливо для любого $b \in B$, то $B^g \le B$ и потому $B \lhd G$.

2. Все конечные подгруппы группы B циклические.

Тогда, как отмечалось выше, $B \cong C_{p^\infty}$, то есть $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ (3), где $B_n \cong Z_{p^n}$ (4) – циклические группы и $B_{n-1} <\cdot\, B_n$ (5).

Для произвольного элемента $g \in G$ рассмотрим конечные подгруппы $Q_n = < g, B_n >$ (6) для всех $n \ge 2$. Так как G по условию *M_I-группа*, то все Q_n есть *M_I-группы*, а тогда из (5) и (6) следует, что либо $B_{n-1} \lhd Q_n$ (7), либо $B_n \lhd Q_n$ (8). Но в последнем случае, так как B_{n-1} – характеристическая подгруппа группы B_n, также выполняется (7), а тогда ввиду (6) $B_{n-1}^g = B_{n-1}$, т. е. в силу произвольности элемента g $B_{n-1} \lhd G$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Отсюда и из (3) получаем, что $B \lhd G$.

Из доказанного в пунктах 1 и 2 следует, что G является *I_n-группой*, то есть импликация $2 \to 1$ верна.

Теперь из справедливости всех рассмотренных выше импликаций получаем, что для локально конечных p-групп условия I_n, M_I и O_I равносильны. Но класс *B_I-групп* расположен между классами *O_I-групп* и *M_I-групп*, из совпадения которых для локально конечных p-групп следует, что для таких групп *B_I-условие* равносильно каждому из указанных выше трех условий. □

Следствие. Если A – циклическая подгруппа локально конечной p-группы G с *I_n-условием*, то все истинные подгруппы группы A инвариантны в G (это вытекает из леммы 1 и теоремы 3).

Определение 6. (см. [2]) Неабелева p-группа G, имеющая истинную нециклическую подгруппу, называется *$\overline{H}_p$-группой*, если все нециклические подгруппы группы G инвариантны в G (т. е. *$\overline{H}_p$-группа* – это примарная *$\overline{H}$-группа*).

Теорема 4. Недедекиндова локально конечная p-группа G тогда и только тогда является *M_I-группой*, когда она – *$\overline{H}_p$-группа*.

Необходимость. Пусть G – *M_I-группа*. В силу теоремы 3 она является *I_n-группой*. Если все истинные подгруппы группы G циклические, то, как хорошо известно (см., напр., [6]), G либо циклическая, либо квазициклическая, либо изоморфна E_{p^2}. Но все эти группы дедекиндовы, в противоречие с условием теоремы. Значит, в G есть истинная нециклическая подгруппа, и потому в силу определений 4 и 6 G является *$\overline{H}_p$-группой*. Необходимость доказана.

Достаточность. Если G – *$\overline{H}_p$-группа*, то в силу определений 4 и 6 G является *I_n-группой*, и по теореме 3 G – *M_I-группа*. □

Все возможные типы негамильтоновых локально конечных *$\overline{H}_p$-групп* приведены в работах [2] и [3]. В силу теорем 3 и 4 это и есть все типы негамильтоновых локально конечных p-групп с любым из условий M_I, B_I или O_I.

Замечание 3. Пусть в локально конечной p-группе G все подгруппы непростых порядков инвариантны. Тогда так же, как и в следствии 3 леммы 3, устанавливается, что G является *M_I-группой*. Негамильтоновы группы с *M_I-условием* в силу теоремы 4 являются *$\overline{H}_p$-группами.* Поэтому из описания *$\overline{H}_p$-групп* в [2] и [3] нетрудно выделить все типы локально конечных p-групп, в которых инвариантны все подгруппы непростых порядков.

Заключение

Рассмотренные в работе классы локально конечных групп с условиями M_I, B_I и O_I. оказались совпадающими. Для примарных групп такие группы – это в точности локально конечные p-группы с *I_n-условием*, описание которых известно (*$\overline{H}_p$-группы* в [2] и [3] и гамильтоновы группы). Из теоремы 3, ее следствия и теоремы 4 вытекает справедливость ряда новых свойств *$\overline{H}_p$-групп*.

В случае непримарных групп рассматриваемый класс отличается от дедекиндовых групп только двумя типами конечных групп (они приведены в теореме 1).

Список литературы

1. *Устюжанинов А.Д.* Конечные группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Матем. Записки Уральск. ун-та, 1967. Т. 6(1). С. 107–123.
2. *Лиман Ф.М.* Групи з інваріантними нециклічними підгрупами //ДАН УРСР, 1967. Т. 12. С. 1073–1075.
3. *Лиман Ф.Н.* 2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Матем. заметки, 1968. Т. 4(1). С. 75–83.
4. *Blackburn N.* Some remarks on Černikov p-groups // Illinois Journal of Mathematics, 1962. Т. 6(3). С. 421–433.
5. *Белоногов В. А.* Задачник по теории групп. М.: Наука, 2000. 240 с.
6. *Конторович П. Г., Пекелис А. С., Старостин А. И.* Структурные вопросы теории групп // Матем. Записки Уральск. ун-та, 1961. Т. 3(1). С. 3–50.

Groups saturated with invariant subgroups

Ya. D. Polovitsky, T. M. Konevskikh
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
alg@psu.ru; 8(342) 236−82−83

The paper describes locally finite groups in which for sufficiently large sets of pairs *(A, B)* of incident subgroups of group *G* there are subgroups *N* invariant in *G* such that $A \leq N \leq B$.

Keywords: *group; incident subgroups; normal subgroup*.