ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2018 **Математика. Механика. Информатика** **Вып. 2 (41)**

УДК 510.54

Конечные нильпотентные группы $d_{\text{н}}$-ширина которых не превосходит трех

Я.Д. Половицкий, А.А. Волочков

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
alg@psu.ru; тел. (342) 239-63-21

Описаны конечные нильпотентные группы, в которых максимальная длина антицепей нециклических подгрупп не превосходит трех.

Ключевые слова: *нильпотентная группа*; *нециклическая подгруппа*; *антицепь.*

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-2-25-30

Введение

В настоящей статье описываются конечные нильпотентные группы в которых максимальная длина антицепей нециклических подгрупп ($d_{\text{н}}$-ширина) не превосходит трех. Описание получено на базе статьи [1]. Там приведены все необходимые определения и используемые обозначения. Для удобства здесь мы продолжим нумерацию лемм, теорем и.т.п. из [1]. При ссылке, например, на лемму 2, если она не помещена в настоящей статье, мы имеем ввиду лемму 2 из [1].

1. Конечные неабелевы p-группы, $d_{\text{н}}$-ширина которых не превосходит трех

Теорема 3. *Конечная неабелева p-группа G, $d_н$-ширина которой не превосходит трех, это одна из следующих групп, и только такая группа: $d_н = 1$: 1. Q_8; 2. M_{p^n}, $p^n \neq 8$; $d_н = 2$: 3. D_8; 4. Q_{16}; $d_н = 3$: 5. $G/\Phi(G) \cong E_4$, $\Phi(G) \cong E_4$, $|Z(G)| = 2$, одна максимальная подгруппа группы G — группа типа 2×4 остальные две максимальные подгруппы изоморфны D_8; 6. $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $a^4 = b^4 = 1$, $b^{-1}ab = a^{-1}$(одна из групп Миллера—Морено); 7. $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $a^8 = b^8 = 1$, $a^4 = b^4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$ (две ее максимальные подгруппы изоморфны M_{16}, а третья — группа типа 2×8); 8. SD_{16}.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $d_{\text{н}} = d_{\text{н}}(G) \leq 3$. Рассмотрим отдельно каждую из этих возможностей для $d_{\text{н}}$.

1. $d_{\text{н}} = 1$.

Если в такой p-группе G все истинные подгруппы циклические, то, так как она неабелева, $G \cong Q_8$, то есть G — группа типа 1 теоремы 3.

Пусть в G существует истинная нециклическая подгруппа. Тогда из условия пункта 1 следует, что G — группа с единственной максимальной нециклической подгруппой, и так как G неабелева p-группа, то, как известно (см., напр., [2], задача 17.24), G — группа типа 2 теоремы 3.

2. $d_{\text{н}} = 2$.

Такая группа, в силу следствия 5 леммы 9, является группой типа 3 или 4 теоремы 3.

3. $d_{\text{н}} = 3$. Если в G есть циклическая максимальная подгруппа, то в силу следствия 4 леммы 9 $G \cong SD_{16}$, то есть G — группа типа 8 теоремы 3. Пусть все максимальные

подгруппы группы G — нециклические. Тогда из следствия 3 леммы 4 получаем, что $d_н(G) \geq p+1$ и для $\Phi = \Phi(G)$ $|G/\Phi| = p^2$. Отсюда и из условия 3 следует, что $3 \geq p+1$, то есть $p = 2$ и $|G/\Phi| = 4$, и потому $G/\Phi \cong E_4$ (1). Значит, G — 2-группа, в G всего три максимальные подгруппы M_1, M_2, M_3 (2), и так как они нециклические и $d_н(G) = 3$, то (2) — это $d_н$-базис G и $d_н(M_i) \leq 3$ (3), $i = \overline{1,3}$. Из (1) также следует, что $M_i \cap M_j = \Phi$ (4) при любых $i \neq j$, $i, j = \overline{1,3}$. Из (4) и леммы 9 следует, что если хотя бы для одного i $d_н(M_i) \geq 2$, то Φ — нециклическая группа (ибо иначе ввиду леммы 9 $d_н(G) \geq 4$). Если в G подгруппа порядка 2 единственна, то, так как G неабелева, она изоморфна Q_8, в противоречие с условием пункта 3 (ибо $d_н(Q_8) = 1$). Значит, в G существует подгруппа Клейна.

Отметим также, что ввиду (1) к G применима лемма 8 и потому среди максимальных подгрупп (2) не может быть ровно двух абелевых.

Дальнейшее рассмотрение разобьем на два случая.

3.1. Хотя бы одна из максимальных подгрупп (2) имеет $d_н$-ширину 2.

Пусть $d_н(M_1) = 2$ (5). Тогда в силу теоремы 1 M_1 — неабелева группа, и из доказанного в пункте 2 следует, что M_1 изоморфна либо D_8, либо Q_{16}. Как показано перед пунктом 3.1, из (5) следует, что Φ — нециклическая группа.

Рассмотрим каждую из возможностей для M_1.

3.1.1 $M_1 \cong D_8$.

Тогда $|M_i| = 8$ (6), $i = \overline{1,3}$, $|G| = 16$ (7) и $|\Phi| = 4$. Так как Φ — нециклическая группа, то $\Phi \cong E_4$ (8). Отсюда следует, что $M_i \ncong Q_8$, и потому в силу (6) каждая из подгрупп M_i ($i = \overline{1,3}$) изоморфна либо D_8, либо абелева порядка 8.

Пусть $M_i \cong D_8$ для всех $i = \overline{1,3}$. Так как в группе D_8 только один $d_н$-базис из двух подгрупп Клейна и одна из них в силу (8) есть Φ, то для каждой M_i он имеет вид $\{S_i, \Phi\}$, $i = \overline{1,3}$. Но тогда $\{S_1, S_2, S_3, \Phi\}$ — 4-нециклическая антицепь, в противоречие с условием 3.

Значит, в силу 3.1.1 хотя бы одна из подгрупп M_2 или M_3 (пусть это будет M_2) абелева. Так как она нециклическая (что отмечено в начале пункта 3), справедливо (6), и в силу условия 3 и следствия 2 леммы 4 $M_i \ncong E_8$, то M_2 — группа типа 2×4. Далее, как отмечено перед пунктом 3.1, M_i неабелева, и потому $M_3 \cong D_8$ (9). Из полученного вида максимальных подгрупп группы G следует, что $exp(G) = 4$.

Так как G неабелева, то G/Z нециклическая, и потому ввиду (7) $|Z|$ равен 4 или 2. Если $|Z| = 4$, то ввиду (7) $G/Z \cong E_4$, а тогда все M_i содержат Φ ($i = \overline{1,3}$) и из $|Z| = |\Phi|$ следует, что $Z = \Phi$, значит G — группа Миллера—Морено, вопреки условию 3.1.1. Из доказанного следует, что $|Z| = 2$, и G — группа типа 5 теоремы 3.

3.1.2. $M_1 \cong Q_{16}$.

Тогда в M_1 есть единственная циклическая максимальная подгруппа A порядка 8, и из $M_1 \triangleleft G$ следует, что $A \triangleleft G$. Как отмечено перед пунктом 3.1, в G более одной подгруппы порядка 2, и потому существует $B < G$ такая, что $B \not\subset A$ и $|B| = 2$. Рассмотрим подгруппу $M = A \rtimes B$. Так как $|M| = 16$, то в силу условия 3.1.2 $M \lessdot G$. Но $M \cap M_1 = A$ — циклическая группа, а тогда и Φ циклическая, в противоречие с тем, что отмечено в начале пункта 3. Значит, случай 3.1.2 невозможен. Рассмотрение случая 3.1 закончено.

3.2. Среди подгрупп M_i ($i = \overline{1,3}$) нет групп $d_н$-ширины 2.

Здесь возможны два подслучая.

3.2.1. $d_н(M_1) = 3$.

По доказанному в начале пункта 3 в G существует подгруппа Клейна S. Рассмотрим $R = N(S)$. Из условия 3 и следствия леммы 11 получим, что $|G : R| = 2^t \leq 3$, то есть $|G : R| \leq 2$ (10). Отсюда, в частности, видно, что $R \triangleleft G$ (11). В силу леммы 2 и условия 3 $d(R/S) \leq d_н(R) \leq 3$ (12). Отсюда и из леммы 6 получаем, что R/S — группа одного из следующих типов: I циклическая группа; II группа Клейна; III изоморфна Q_8.

Разобьем их рассмотрение на две части.

3.2.1.1. R/S изоморфна E_4 или Q_8 (это случаи II и III).

Тогда $d(R/S) = 3$ (13) и в силу (12) $d_н(R) = 3$ (14). В рассматриваемом случае в R есть три максимальные нециклические подгруппы R_1, R_2, R_3 (15), содержащие S.

В случае II $|R| = 16$, а $exp(R) = 4$, а в случае III $|R| = 32$, а $exp(R) \leq 8$. Поэтому в обоих этих случаях в R нет циклических максимальных подгрупп. Тогда в силу (14) множество (15) — это $d_н$-базис R. Далее рассмотрение случаев II и III продолжим отдельно.

II. $R/S \cong E_4$.

Тогда в силу сказанного выше о максимальных подгруппах группы R имеем: $S = \Phi(R)$ и, так как справедливо (11), $S \lhd G$. Поэтому $R = N(S) = G$ и $S = \Phi(G) \cong E_4$, а тогда $d_н(\Phi(G)) = 1$. Мы видим, что G удовлетворяет всем условиям следствия 1 леммы 12 и в силу этой леммы $d_н(M_1) \leq 2$, в противоречие с условием 3.2.1. Значит, случай II невозможен.

III. $R/S \cong Q_8$.

Тогда существует $F/S < R/S$ такая, что $|F/S| = 2$ (16), $|F| = 8$ (17) и F содержится в подгруппах R_i $(i = \overline{1,3})$. Так как ввиду условия III $R/F \cong E_4$, то $F = \Phi(R)$ (18) и $F \lhd G$ (19).

Предположим, что подгруппа F абелева. Тогда, так как она нециклическая и справедливо (17), F — группа типа 2×4 (ибо в силу следствия 2 леммы 4 и условия 3 F не изоморфна E_8). Поэтому $S = \Omega_1(F)$ и в силу (19) $S \lhd G$, а тогда $R = G$. Так как $d_н(F) = 1$ и ввиду (18) $F = \Phi(G)$, то, как и в конце пункта II, получаем, что $d_н(F) = 1$ и ввиду (18) $F = \Phi(G)$, то, как и в конце пункта II получаем, что $d_н(M_1) \leq 2$, в противоречие с условием 3.2.1.

Значит, подгруппа F неабелева. Она содержит подгруппу Клейна и имеет порядок 8 (в силу (17)), и потому $F \cong D_8$ (20). Тогда $d_н(F) = 2$. Всякая максимальная подгруппа R_i группы R в силу (18) содержит F. Если $d_н(R_i) = 2$, то в силу следствия 5 леммы 9 $R_i \cong Q_{16}$, а в такой группе в силу (20) не может содержаться F. Значит, $d_н(R_i) = 3$ $(i = \overline{1,3})$. Мы видим, что R удовлетворяет всем условиям леммы 13, и по этой лемме $d_н(R) \geq 4$, в противоречие с условием 3. Значит, случай III невозможен, и так как невозможен и II, то и случай 3.2.1.1 невозможен.

3.2.1.2. R/S — циклическая группа (случай I из отмеченных в начале пункта 3.2.1)

Если все максимальные подгруппы группы R нециклические, то по лемме 14 $d_н(R) \geq 7$, в противоречие с условием 3.

Значит, в R есть циклическая максимальная подгруппа и потому $R \neq G$ (21) и в силу (10) $R \lessdot G$ (22). Если R абелева, то из условия 3 и следствия 2 леммы 4 вытекает, что $R \not\supset E_8$, и поэтому $S = \Omega_1(R)$, а тогда ввиду $R \lhd G$ имеем: $S \lhd G$ и $R = G$, в противоречие с (21). Значит, R — неабелева группа. Если $d_н(R) = 3$, то в силу следствия 4 леммы 9 $R \cong SD_{16}$. Но тогда R' — циклическая группа порядка 4 (см. [2], задача 17.22), в противоречие с 3.2.1.2 (ибо $S \cong E_4$). Значит, $d_н(R) \leq 2$. Но из (22) и условия пункта 3.2 следует, что $d_н(R) \neq 2$, и потому $d_н(R) = 1$. В силу (22) $\Phi < R$, и потому $d_н(\Phi) \leq 1$.

Мы видим, что G удовлетворяет всем условиям следствия 1 леммы 12, и в силу этого следствия $d_н(M_i) \leq 2$, в противоречие с условием 3.2.1. Значит, случай 3.2.1.2 невозможен, и из невозможности 3.2.1.1 следует, что и случай 3.2.1 невозможен.

3.2.2. $d_н(M_i) = 1$, $i = \overline{1,3}$.

Как показано в начале пункта 3, G есть 2-группа. В силу доказанного в пункте 1 этой теоремы неабелевы подгруппы M_i изоморфны Q_8 или M_{2^n} $(n \geq 4)$, а абелева по теореме 1 — группа типа 2×2^n. В каждой из таких подгрупп нет нециклических подгрупп одинаковых порядков, и потому все нециклические подгруппы группы G инвариантны в G.

Как отмечено в начале пункта 1, в G существует подгруппа Клейна S, а ввиду сказанного выше $S \lhd G$. Так же, как и в начале пункта 3.2.1 (для R) получаем, что G/S — группа одного из типов I—III, приведенных в пункте 3.2.1 (то есть либо циклическая, либо изоморфна E_4 или Q_8).

Рассмотрим две возможности для Φ.

3.2.2.1. Φ — нециклическая группа.

Так как $\Phi < M_i$, то из сказанного в начале пункта 3.2.2 о виде подгруппы M_i следует, что $\Phi \ncong Q_8$, а тогда Φ содержит группу Клейна, то есть можно считать, что $S \leq \Phi$ (23). Поэтому G/S — нециклическая группа (то есть случай I невозможен) и изоморфна либо E_4 (случай II), либо Q_8 (случай III). Поэтому M_i/S — циклическая группа $(i = \overline{1,3})$. Возможны два подслучая.

3.2.2.1.1. $S \subset Z$.

Тогда в силу сказанного выше все M_i абелевы, то есть G — 2-группа Миллера—Морено. Описание и свойства таких групп хорошо известны (см., напр., [2], задачи 17.28 и 17.29). Как там отмечено, в такой группе $Z = \Phi$, и потому в случае II $Z = \Phi = S$, а тогда, как следует из результатов Редеи (см., напр., задачу 17.29 из [2]), G — группа типа 6 теоремы 3. Для случая III таких групп Миллера—Морено, как нетрудно проверить, нет.

3.2.2.1.2. $S \not\subset Z$.

Так как $S \cong E_4$, то $Aut(S) \cong S_3$. Отсюда и из того, что G — 2-группа следует, что $|G/C(S)| = 2$. Значит, $C(S) = M_1$ и ввиду сказанного перед пунктом 3.2.2.1 о M_i, подгруппа M_1 абелева. Так как в силу 3.3.2 $d_{\text{н}}(M_1) = 1$, то M_1 — группа типа 2×4 в случае II и типа 2×8 в случае III, и ввиду $\Phi < M_1$ Φ — абелева группа. Если бы еще хотя бы одна из подгрупп M_2 и M_3 была абелевой, то, так как G удовлетворяет условию (1), в силу леммы 9 она является группой Миллера—Морено, а тогда $Z = \Phi$, и в силу (23) $S \subset Z$, вопреки условию пункта 3.2.2.1.2.

Значит, M_1 и M_3 неабелевы группы $d_{\text{н}}$-ширины 1. По доказанному в пункте 1 данной теоремы в случае II, так как $|M_i| = 8$, то $M_i \cong Q_8$ $(i = \overline{2,3})$, а тогда Φ — циклическая группа, в противоречие с условием 3.2.2.1.

Остается рассмотреть случай III. Тогда $G/S \cong Q_8$, $M_i \cong M_{16}$ $(i = \overline{2,3})$, а M_1 — группа типа 2×8. Отметим, что $|\Phi/S| = 2$ и Φ — группа типа 2×4. Так как все инволюции группы G содержатся в Φ и $S \subset \Phi$, то $S = \Omega_1(G)$. Как отмечено выше, в G все нециклические подгруппы инвариантны и из описания таких 2-групп в [4], леммы 1 из [3] и полученного выше следует, что G — группа типа 2 теоремы 1 из [7], то есть является группой типа 7 теоремы 3. Случай 3.2.2.1 рассмотрен.

3.2.2.1.2. Φ — циклическая группа.

Если G/S изоморфна E_4 или Q_8, то в ней существует три максимальные подгруппы R_i/S $(i = \overline{1,3})$, а тогда $\{R_1, R_2, R_3\}$ (24) — 3-нециклическая антицепь из максимальных подгрупп группы G. Как отмечено в начале пункта 3, все максимальные подгруппы группы G нециклические, и потому (24) — это все максимальные подгруппы группы G, а тогда $S \subset \Phi$, что невозможно, ибо S — нециклическая группа, а Φ в силу условия 3.2.2.1.2 циклическая. Из сказанного в начале пункта 3.2.2 следует, что осталось рассмотреть случай, когда G/S — циклическая группа. Тогда в силу леммы 14 $d_{\text{н}}(G) \geq 7$, в противоречие с условием 3. Значит, случай 3.2.2.1.2 невозможен.

Все возможные случаи рассмотрены. Необходимость доказана.

Достаточность. Для групп типов 1 и 2 достаточность очевидна. Для групп типов 3 и 4 она доказана в следствии 5 леммы 9, а для групп типа 8 — в следствии 4 леммы 9. Пусть G — группа типа 5. В ее максимальных подгруппах M_1 и M_2, изоморфных D_8, всего по две истинных нециклических подгруппы — это $\{S_1, \Phi\}$ и $\{S_2, \Phi\}$ соответственно, а в M_3 (типа 2×4) — только одна Φ. Поэтому $\{S_1, S_2, \Phi\}$ — $d_{\text{н}}$-базис G и $d_{\text{н}}(G) = 3$ (24). Пусть G — группа типа 6. Ее порядок 16, нециклическая подгруппа порядка 4 единственна — это Φ, и потому $d_{\text{н}}$-базис G состоит из трех ее максимальных подгрупп, то есть тоже справедливо (24).

Пусть G — типа 7. Тогда $|G| = 32$, нециклические подгруппы порядков 4 и 8 единственны — это, соответственно, $\Omega_1(G) = \langle a^4 \rangle \times \langle a^2 b^2 \rangle$ и $\Phi(G)$, причем $\Omega_1(G) \subset \Phi(G)$. Поэтому $d_{\text{н}}$-базис G состоит из трех ее максимальных подгрупп и выполняется (24). $\square$

2. Конечные неабелевы непримарные нильпотентные группы, $d_{\text{н}}$-ширина которых не превосходит трех

Лемма 15. *Пусть G — конечная группа, $G = A \times B$ (1), $d_н(A) = n \geq 1$, $d(B) = m$ и в A существует $d_н$-базис $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ где $A_i \neq A$ (2), $i = \overline{1,n}$. Тогда $d_н(G) \geq nm + 1 > n$ (3). Если B непримарна, то $d_н(G) \geq 2n + 1$ (4).*

Доказательство. Пусть $\{B_1, \ldots, B_m\}$ — d-базис B. Отметим, что $m \neq 0$. Тогда

$\{S_{i,j} = A_i \times B_j | i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}\}$ (4) — nm-нециклическая антицепь, которая, учитывая (2), вместе с A составляет $(nm+1)$-нециклическую антицепь, и потому справедливо (3). Если B непримарна, то $m \geq 2$ и справедливо (4). □

Следствие. *Пусть G — конечная группа, $G = A \times B$ (1), в A есть истинная нециклическая пдгруппа. Тогда $d_н(A) < d_н(G)$ (9).*

Доказательство. Пусть $d_{\text{н}}(A) = n$. Из условия для A следует, что $n \geq 1$ и в A существует $d_{\text{н}}$-базис из подгрупп, отличных от A. Теперь из леммы 15 получаем, что $d_{\text{н}}(G) > n = d_{\text{н}}(A)$, то есть выполняется (9). □

Конечные абелевы группы малой $d_{\text{н}}$-ширины (не превосходящей пяти), описаны в теоремах 1 и 2. Конечные неабелевы p-группы, $d_{\text{н}}$-ширины, не превосходящей трех, описаны в теореме 3.

Ниже доказывается теорема 4, завершающая описание конечных нильпотентных групп, $d_{\text{н}}$-ширина которых не превосходит трех.

Теорема 4. *Пусть G — конечная неабелева непримарная нильпотентная группа. $d_н(G) \leq 3$ (1) тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов (всюду p, q, r, t — различные простые числа): $d_н(G) = 1$: 1. $G = Q_8 \times Z_{q^m}$, $q \neq 2$; $d_н(G) = 2$: 2. $G = M_{p^3} \leftthreetimes Z_{q^m}$, $p \neq 2$; 3. $G = M_{p^n} \times Z_q$, $p^n \neq 8$; 4. $G = Q_8 \times Z_{rq^m}$, $r \neq 2$, $q \neq 2$; $d_н(G) = 3$: 5. $G = Q_8 \times Z_k$, где $2 \nmid k$ и $k = qrt$ или $k = r^2q^m$ $(m \geq 2)$; 6. $G = M_{p^3} \times Z_{qr}$, $p \neq 2$; 7. $G = M_{p^4} \times Z_{q^m}$, $m \geq 2$; 8. $G = M_{p^n} \times Z_{q^2}$, $n \geq 4$; 9. $G = P \times Z_{q^m}$, где $P \cong D_8$ или $P \cong Q_{16}$, $q \neq 2$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть для группы G, удовлетворяющей условиям теоремы, выполняется (1). Тогда в силу леммы 3 $G = P \times Z_k$ (2), где P — неабелева p-группа (ибо G неабелева), $(k,p) = 1$ (3). Поэтому $d_{\text{н}}(P) \geq 1$ (4), а в силу (1) $d_{\text{н}}(P) \leq 3$ (5).

Рассмотрим возможности для P (учитывая (4) и (5)):

1. $d_{\text{н}}(P) = 1$.

Так как P неабелева, то в силу теоремы 3 либо $P \cong Q_8$ (6), либо $P \cong M_{p^n}$ (7), где $p^n \neq 8$ (8) и $n \geq 3$ (9). Обозначим через S минимальную нециклическую подгруппу группы P (в случае (6) $S = P$ (10), а в случае (7-9) $S \cong E_{p^2}$ (11)). В обоих видах (6) и (7) группы P всякая нециклическая подгруппа группы G, как видно из (2), содержит S, и по лемме 1 $d(G/S) = d_{\text{н}}(G)$ (12). Далее случаи (6) и (7) рассмотрим отдельно.

1.1. $P \cong Q_8$.

Тогда, как отмечено выше, справедливо (10), и потому из (12) и (2) следует: $d(G/P) = d(Z_k) = d_{\text{н}}(G)$ (13). В лемме 6 приведены порядки всех циклических групп Z_k, для которых $d(Z_k) \leq 3$. Учитывая это и (13), получаем: при $d_{\text{н}}(G) = 1$ $k = q^m$ и G — группа типа 1; при $d_{\text{н}}(G) = 2$ $k = rq^m$, и G — группа типа 4; при $d_{\text{н}}(G) = 3$ число k равно qrt или r^2q^m $(m \geq 2)$ и G — группа типа 5. Случай 1.1 рассмотрен.

1.2. $P \cong M_{p^n}$, $p^n \neq 8$, $n \geq 3$.

Тогда $S = \Omega_1(P)$ и как отмечено выше, справедливо (11), и потому P/S — циклическая группа порядка p^{n-2}. В силу (2) $G/S = (P/S) \times (Z_kS/S)$ — циклическая группа и $|G/S| = p^{n-2}k$, причем $n-2 > 0$ ввиду условия 1.2. Теперь отсюда и из (12), используя приведенные в лемме 6 порядки непримарных циклических групп, d-ширина которых не превосходит 3, получаем: равенство $d_{\text{н}}(G) = 1$ невозможно (ибо иначе G/S была бы примарной); если $d_{\text{н}}(G) = 2$, то либо $n-2 = 1$ и $k = q^m$ (и тогда G — группа типа 2), либо $k = q$ и G — группа типа 3; если $d_{\text{н}}(G) = 3$, то возможны 3 случая: a) $n = 3$. $k = qr$ — тогда G — группа типа 6; b) $n = 4$, $k = q^m$ $(m \geq 2)$, и G — группа типа 7; c) $n \geq 4$, $k = q^2$, и G — группа типа 8. Случай 1 рассмотрен.

2. $d_{\text{н}}(P) > 1$.

В такой группе P есть истинная нециклическая подгруппа. Тогда из (2) и следствия леммы 15 вытекает, что $d_{\text{н}}(P) < d_{\text{н}}(G) \leq 3$, и потому ввиду условия 2 $d_{\text{н}}(P) = 2$ (14). Так как P неабелева, то отсюда и из теоремы 3 следует, что P изоморфна D_8 или Q_{16}. Так как группа G удовлетворяет условиям леммы 15 (при $A = P$), то из (14) и этой леммы следует, что Z_k — примарная группа (ибо иначе по лемме 15 $d_н(G) \geq (2d_н(P) + 1) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, в противоречие с условием (1)). Значит, $k = q^m$. Из доказанного следует, что G — группа типа 9. Необходимость доказана.

Достаточность легко проверяется, если использовать введенную при доказательстве необходимости подгруппу S, равенство (12) и лемму 6. □

Замечание. Так как для рассматриваемой в теореме 4 группы G в силу леммы 3 равенство (2) справедливо при $d_н(G) \leq 6$, то, используя теорему 3 и лемму 6, можно получить и все типы неабелевых непримарных нильпотентных групп G, для которых $d_н(G) = 4$ (ибо тогда в силу следствия леммы 15 $d_н(P) < 4$, а такие P описаны в теореме 3).

Заключение

На базе результатов данной статьи получено описание конечных ненильпотентных групп, $d_н$-ширина которых не превосходит трех, оно будет приведено в следующей статье.

Список литературы

1. *Половицкий Я.Д., Волочков А.А.* О максимальных антицепях нециклических подгрупп конечных групп // В настоящем сборнике.
2. *Белоногов В.А.* Задачник по теории групп. М.:Наука, 2000. 230 С.
3. *Половицкий Я.Д.* Группы, имеющие небольшие ранги инцидентности // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Вып. 5. С. 65-69.
4. *Лиман Ф.Н.* 2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами // метем. заметки 1968. Т.4 вып 1. С. 74—83.

About finite nilpotent groups of $d_н$-width less or equel 3

Ja.D. Polovitsky, A.A. Volochkov
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
alg@psu.ru; (342) 239 63 21

Finite nilpotent groups of $d_н$-width less or equel 3 are described.

Keywords: *nilpotent group*; *noncyclic subgroup*; *antichain.*