ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 Математика. Механика. Информатика Вып. 2 (41)

УДК 510.54

О максимальных антицепях нециклических подгрупп конечных групп

Я.Д. Половицкий, А.А. Волочков
Пермский государственный национальный исследовательский университет
Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15
alg@psu.ru; тел. (342) 239-63-21

Находится максимальная длина антицепей нециклических подгрупп ($d_{\text{н}}$-ширина) ряда известных конечных p-групп.
Ключевые слова: *группа*; *нециклическая подгруппа*; *антицепь*.

DOI: 10.17072/1993-0550-2018-2-16-24

Введение

В работе [1] — [4] получено описание конечных групп, в которых максимальная длина антицепей подгрупп (d-ширина) не превосходит пяти, и найдена d-ширина ряда известных групп.

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с максимальной длиной антицепей нециклических подгрупп ($d_{\text{н}}$-шириной) конечных групп. Найдена $d_{\text{н}}$-ширина ряда известных p-групп (в частности, имеющих циклическую подгруппу индекса p). Наряду со стандартными обозначениями в работе используются и следующие: группа типа $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_s$ — прямое произведение циклических групп порядков $k_1, k_2, \ldots, k_s$; $\square$ — конец доказательства.

1. Некоторые общие утверждения о $d_{\text{н}}$-ширине групп

Определение 1. $d_{\text{н}}$-*шириной* группы G назовем наибольшую из длин антицепей ее нециклических подгрупп (обозначать ее будем через $d_{\text{н}}(G)$, иногда через $d_{\text{н}}$).

Другими словами, $d_{\text{н}}(G)$ — это число неинцидентных нециклических подгрупп группы G, обладающее свойством: из любого большего числа нециклических подгрупп этой группы хотя бы две инцидентны.

В частности, группа $d_{\text{н}}$-ширины 1 — это в точности нециклические группы с условием инцидентности для нециклических подгрупп. Локально ступенчатые группы с этим условием описаны в [5].

Определение 2. Антицепь из m нециклических подгрупп группы G назовем m-*нециклической* антицепью.

Определение 3. Если $d_{\text{н}}(G) = n$, то любую n-нециклическую антицепь группы G назовем $d_{\text{н}}$-*базисом* G.

Я.Д. Половицким в [1] введено понятие ранга инцидентности (I-ранга) группы. Как отмечено в [4], в дальнейшем ему стало известно, что оно равносильно введенному еще в 1965 г. Л.Н. Шевриным в работе по полугруппам понятию d-ширины группы (полугруппы). С 2014 г (см. [4]) в работах Я.Д. Половицкого вместо понятия ранга инцидентности используется понятие d-ширины группы.

Определение 4. (Л.Н. Шеврин) Максимальная длина антицепей в решетке подполугрупп (подгрупп) некоторой полугруппы (группы) называется *d-шириной* этой полугруппы (группы). d-ширину группы G будем обозначать через $d(G)$.

Определение 5. Антицепь подгрупп группы G длины $d(G)$ назовем *d-базисом* G.

Некоторые результаты о d-ширине группы из [1] — [4] мы будем использовать в настоящей работе. Это связано с доказанными ниже леммами 1 и 2.

Лемма 1. *Пусть $N \triangleleft G$ и N содержится во всех нециклических подгруппах группы G. Тогда $d_н(G) \leq d(G/N)$ (1). Если N — нециклическая группа, то $d_н(G) = d(G/N)$ (2).*

Доказательство. Введем обозначения:

$n = d_{\text{н}}(G)$ (3), $m = d(G/N)$ (4). Пусть $\{B_j | j = \overline{1,n}\}$ — $d_{\text{н}}$-базис G. Тогда, так как он является антицепью и в силу условия леммы $B_j \supset N$, то $\{B_j/N | j = \overline{1,n}\}$ является антицепью из n подгрупп группы G/N и потому ввиду (4) $n \leq m$ (5), то есть выполняется (1).

Пусть подгруппа N — нециклическая. Если $\{G_i/N | i = \overline{1,m}\}$ — d-базис группы G/N, то $\{G_i | i = \overline{1,m}\}$ — антицепь нециклических подгрупп группы G (ибо N нециклическая и $G_i \supset N$). В силу определения $d_{\text{н}}$-ширины и (3) имеем: $m \leq n$, откуда и из (5) следует $m = n$, то есть справедливо (2). □

Следствие. *Если G — группа типа $p^n \times p^2$ $(n \geq 2)$, то*

$$d_н(G) = (p-1)(n-1) + 2. \tag{1.1}$$

Доказательство. В такой группе G нижний слой

$$G_1 \cong E_{p^2} \tag{1.2}$$

содержится во всех ее нециклических родгруппах. Поэтому в силу леммы 1,

$$d_{\text{н}}(G) = d(G/G_1). \tag{1.3}$$

Из 1.3 и условия следствия вытекает, что G/G_1 — группа типа $p^{n-1} \times p$, и по теореме 7 из [3] $d(G/G_1) = p(n-1) - (n-1) + 2 = (p-1)(n-1) + 2$. Отсюда и из 1.3 следует справедливость равенства 1.1. □

Лемма 2. *Пусть $N \triangleleft G$ и подгруппа N — нециклическая. Тогда $d(G/N) \leq d_н(G)$ (1) и для всякого d-базиса $\{G_i/N | i = 1, \ldots, m\}$ (2) группы G/N множество $\{G_i | i = 1, \ldots, m\}$ (3) является антицепью нециклических подгрупп группы G, содержащих N.*

Доказательство. Действительно, если бы $G_i \supset G_j$ для некоторой пары (i, j), то $G_i/N \supset G_j/N$, в противоречие с тем, что (2) является антицепью. Значит, (3) есть m-нециклическая антицепь G, где $m = d(G/N)$, и по определению числа $d_{\text{н}}(G)$ выполняется (1). □

Следствие 1. *Пусть G — группа типа $2^m \times 2^n$, где $m \geq 3$ и $n \geq 3$. Тогда $d_н(G) \geq 7$ (9).*

Доказательство. Из условий следствия видно, что $G \supset N$, где N — группа типа $2^{m-2} \times 2^{n-2}$ и N — нециклическая. Так как G/N — группа типа 4×4, то в силу следствия 1 леммы 7 из [4] $d(G/N) = 7$, а тогда из неравенства (1) леммы 2 вытекает справедливость (4). □

Следствие 2. *Пусть $G = P \times Q$ (5), где $P \cong E_{p^2}$, $Q \cong E_{q^2}$. Тогда $d_н(G) = p+q+2 \geq 7$ (6).*

Доказательство. Нетрудно видеть, что каждая истинная нециклическая подгруппа группы G содержит либо P, либо Q, но ввиду (5) не может содержать одновременно и P, и Q. Так как $G/P \cong E_{q^2}$ и $G/Q \cong E_{p^2}$, то попарно неинцидентных подгрупп, содержащих P, в силу леммы 1 из [2] в G равно $q + 1$, а содержащих Q — $(p + 1)$. Так как первые имеют порядок $q^2 p$, а вторые $p^2 q$, то все указанные выше подгруппы попарно неинцидентны и вместе составляют $d_{\text{н}}$-базис G. Поэтому справедливо (6). □

Следствие 3. *Пусть $G = E_{p^2} \times Q_8$, где $p \neq 2$. Тогда $d_н(G) = p + 4 \geq 7$ (7).*

Доказательство. Как и при доказательстве следствия 2, нетрудно получить, что объединение множеств всех подгрупп порядка $4p^2$ (их 3) и $8p$ (их $p+1$) является $d_н$-базисом G (мы используем лемму 2 и то, что $d(Q_8) = 3$ и $d(E_{p^2}) = p+1$) и он состоит из $(p+1)+3 = p+4$ подгрупп. Отсюда следует справедливость равенства (7). □

Лемма 3. *Пусть G — конечная нециклическая непримарная нильпотентная группа. Если $d_н(G) < 6$ (1), то $G = P \times S$ (2), где P — нециклическая p-группа, S — циклическая p'-группа.*

Доказательство. Если в G существует две силовские подгруппы P и Q, в каждой из которых более одной подгруппы простого порядка, то G содержит подгруппу $R = E_{p^2} \times E_{q^2}$ и в силу следствия 2 леммы 2 $d_н(R) \geq 7$, в противоречие с (1). Значит, такая силовская подгруппа P либо единственна, либо такой подгруппы в G нет.

Если наряду с такой p-подгруппой P, где $p \neq 2$, силовская 2-подгрупа P_2 группы G нециклическая, то в P_2 по доказанному выше подгруппа порядка 2 единственна и потому $P_2 \cong Q_{2^n}$, $n \geq 3$. Значит P_2 содержит подгруппу Q_8. Но тогда G содержит подгруппу $F = E_{p^2} \times Q_8$, а по следствию 3 леммы 2 $d_н(F) \geq 7$, противоречие с (1). Значит, так как G нециклическая, в ней ровно одна нециклическая силовская подгруппа (P или P_2) и потому справедливо утверждение леммы. □

Лемма 4. *Число максимальных подгрупп группы E_{p^n} равно $\frac{p^n-1}{p-1}$ (1).*

Доказательство. Действительно, в такой группе количество подгрупп порядка p равно, очевидно, числу (1), а, как известно, этому числу равно и число ее максимальных подгрупп. □

Следствие 1. *Если в конечной p-группе G $|G/\Phi(G)| = p^n$, то в G ровно $s = \frac{p^n-1}{p-1}$ максимальных подгрупп. Если G нециклическая p-группа, то $s \geq 3$.*

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из того, что при условии следствия $G/\Phi(G) \cong E_{p^n}$, и леммы 4. □

Следствие 2. $d_н(E_{p^3}) = p^2+p+1 \geq 7$ *(2).*

Доказательство. Действительно, в группе E_{p^3} $d_н$-базис — это множество всех ее максимальных подгрупп, и из леммы 4 следует справедливость следствия 2. □

Следствие 3. *Пусть G — конечная нециклическая p-группа и $d_н(G) \leq 6$ (3). Тогда $|G/\Phi(G)| = p^2$ (4). Если все максимальные подгруппы группы G нециклические, то $d_н(G) \geq p+1 \geq 3$.*

Доказательство. Из условий данного следствия и неравенства (2) следствия 2 леммы 4 вытекает, что $|G/\Phi(G)| \leq p^2$, и, так как G нециклическая, справедливо (4). В силу следствия 1 и леммы 4, в G ровно $(p+1)$ максимальных подгрупп. Если все они нециклические, то составляют $(p+1)$-нециклическую антицепь, и потому справедливо (4). □

2. Конечные абелевы группы, $d_н$-ширина которых не превосходит пяти

Лемма 5. *Пусть G — группа типа $p^m \times p^n$, $p \neq 2$ (1) с n, m большими 1, и $d_н(G) \leq 5$ (2). Тогда G — группа типа $p^2 \times p^2$.*

Доказательство. Пусть заключение леммы не выполняется, то есть, например, $n \geq 3$ (3). В этом случае в G существует нециклическая подгруппа N типа $p^{m-1} \times p$ (ибо $m > 1$) и G/N — группа типа $p \times p^{n-1}$ (4), где $(n-1) \geq 2$ (5) — в виду (3). В силу леммы 2 $d_н(G) \geq d(G/N)$ (6). Из (4) и теоремы 7 из [3] имеем: $d(G/N) = p(n-1)-(n-1)+2 = (p-1)(n-1)+2 \geq 6$ (мы использовали (1) и (5)), что в силу (6) противоречит условию (2). Значит, справедливо (3). □

Теорема 1. *Конечные нециклические абелевы p-группы, $d_н$-ширина которых не превосходит пяти, это группы следующих типов, и только они:*

1. $d_н = 1 : p \times p^n$;
2. $d_н = 2$ *— не существует;*
3. $d_н = 3 : 2^2 \times 2^2$;
4. $d_н = 4 : 2^2 \times 2^3$ *и* $3^2 \times 3^2$;

5. $d_н = 5 : 2^2 \times 2^4$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — конечная абелева p-группа, не являющаяся циклической, и $d_{\text{н}}(G) \leq 5$ (1). Рассмотрим подгруппу $G_1 = \Omega_1(G)$.

Если $|G_1| \geq p^3$, то в G_1 содержится подгруппа $R \cong E_{p^3}$, а в силу следствия 2 леммы 4 $d_{\text{н}}(R) \geq 7$, в противоречие с (1). Значит, $|G_1| \leq p^2$. Если $|G_1| = p$, то так как G абелева, она является циклической вопреки условию теоремы. Значит, $|G| = p^2$, и потому G — группа типа $p^m \times p^n$ (2). Если m, n отличны от 1, то в силу условия (1) из леммы 5 (при $p \neq 2$) и следствия 1 леммы 2 (при $p = 2$) получается, что $m \leq 2$. Поэтому возможны два случая.

1. $m = 1$. Тогда G — группа типа $p \times p^n$ (3) и $d_{\text{н}}(G) = 1$. Нетрудно видеть, что всякая группа типа (2) при $d_{\text{н}}(G) = 1$ имеет тип (3).

2. $n \neq 1, m = 2$. Тогда G — группа типа $p^2 \times p^n$ (4) и $n \geq 2$ (5). Поэтому в силу условия леммы 1 $d_{\text{н}} = (p-1)(n-1) + 2$ (6), то есть $(p-1)(n-1) = d_{\text{н}} - 2$ (7). Отсюда в силу (5) $d_{\text{н}} \neq 2$, что и отмечено в теореме.

Для $d_{\text{н}} \geq 3$ из (7) имеем: $(n-1)|(d_{\text{н}} - 2)$ (8) и $(p-1)|(d_{\text{н}} - 2)$ (9). Из условий (7)—(9) мы можем найти все типы групп G, для которых $3 \leq d_{\text{н}}(G) \leq 5$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

2.1. $d_{\text{н}}(G) = 3$. Тогда из (7) и (8) следует, что $n = 2, p = 2$, то есть G — группа типа $2^2 \times 2^2$.

2.2. $d_{\text{н}}(G) = 4$. Учитывая (7), имеем: $(p-1)(n-1) = 2$, то есть либо $p = 2$ и $n = 3$, либо $p = 3$ и $n = 2$ — получаем группы типов $2^2 \times 2^3$ и $3^2 \times 3^2$.

2.3. $d_{\text{н}}(G) = 5$. Тогда в силу (7) $(p-1)(n-1) = 3$, откуда $p = 2$, $n = 4$ и G — группа типа $2^2 \times 2^4$. Небходимость доказана.

Достаточность. Пусть G — группа одного из указанных в теореме 1 типов. В группе G типа $p \times p^n$ все нециклические подгруппы инцидентны, и потому $d_{\text{н}}(G) = 1$. Для всех остальных типов групп, указанных в теореме 1, справедливо равенство (7), и в силу следствия леммы 1, эти типы имеют указанную в теореме 1 $d_{\text{н}}$-ширину. □

Следствие. *Пусть P — конечная абелева p-группа. $3 \leq d_н(P) \leq 5$ тогда и только тогда, когда P — группа типа $2^2 \times 2^k$, где $2 \leq k \leq 4$, или $3^2 \times 3^2$.*

Лемма 6. *(см. теоремы 1 и 14 из [3] и теоремы 4 и 5 из [4]) Конечные группы, d-ширина d которых не превосходит трех и конечные абелевы группы d ширины 4 и 5 — это группы следующих видов, и только они: $d = 1 : \mathbb{Z}_{p^n}$; $d = 2 : \mathbb{Z}_{pq^n}$ $n \geq 2$, $\mathbb{Z}_{pqr}$, Q_8, группа Клейна; $d = 3$: $\mathbb{Z}_{p^2q^n}$ $(n \geq 2)$, $\mathbb{Z}_{pqr}$, $\mathbb{Q}_8$, группа Клейна; $d = 4$: группы типов 2×4, 3×3, $2 \times 2 \times 2 \times p$ $(p \neq 2)$, $\mathbb{Z}_{p^nqr}$ $(n \geq 2)$, $\mathbb{Z}_{p^3q^n}$ $(n \geq 3)$; $d = 5 : \mathbb{Z}_{p^4q^n}$ $(n \geq 4)$, $\mathbb{Z}_{p^2q^2r}$, типов $2 \times 2 \times q^n$ $(q \neq 2, n \geq 2)$, $2^3 \times 2$, $3 \times 3 \times q$ $(q \neq 3)$.*

Замечание. В теореме 5 из [4] уточнены два типа непримарных абелевых групп d-ширины 4, приведенные ранее в теоремах 10 и 14 из [3].

Теорема 2. *Конечные непримарные абелевы группы с условием $0 < d_н \leq 5$ (1) — это группы следующих типов, и только они (p, q, r, t — различные простые числа): $d_н = 1 : p \times p \times q^m$; $d_н = 2 : p \times p \times qr^m$, $p \times p^2 \times q^n$, $p \times p^n \times q$ $(n \geq 2)$; $d_н = 3 : p \times p \times qrt$, $p \times p^2 \times qr$, $p \times p \times q^2r^n$ $(n \geq 2)$, $p \times p^3 \times q^n$ $(n \geq 2)$, $p \times p^m \times q^2$ $(m \geq 3)$; $d_н = 4 : p \times p \times q^nrt$ $(n \geq 2)$, $p \times p^2 \times q^nr$ $(n \geq 2)$, $p \times p^m \times qr$ $(m \geq 3)$, $4 \times 4 \times p$ $(p \neq 2)$, $p \times p^m \times q^3$ $(m \geq 4)$; $d_н = 5 : p \times p \times q^4r^n$ $(n \geq 4)$, $p \times p^5 \times q^n$ $(n \geq 4)$, $p \times p^n \times q^4$ $(n \geq 5)$, $p \times p \times q^2r^2t$, $p \times p^2 \times q^2r^2$, $p \times p^2 \times q^2t$, $2^2 \times 2^2 \times q^n$ $(q \neq 2, n \geq 2)$, $3^2 \times 3^2 \times q$ $(q \neq 3)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы. Из условия (1) и леммы (3) следует, что $G = P \times S$ (2), где P — нециклическая p-группа, S — циклическая p'-группа и $d_{\text{н}}(P) \leq 5$. В силу теоремы 1 P — группа типа $p^m \times p^n$ и $m \leq 2$. Поэтому подгруппа $P_1 = \Omega_1(P) \cong E_{p^2}$ и содержится во всех нециклических подгруппах группы G. В силу леммы 1 $d_{\text{н}}(G) = d(G/P_1)$ (3), причем ввиду (2) в G/P_1 все p'-подгруппы циклические. Теперь из (1) — (3), абелевости G и описания групп d-ширины, не превосходящей пяти (в работах [1] — [4]), необходимые для нас сведения из которого приведены выше в лемме 6, нетрудно получаются все типы изучаемых в теореме 2 групп (они приведены там для каждого рассматриваемого значения $d_н$). Отметим, что при получении указанных типов учитывается и возможность того, что $p \in \pi(G/P_1)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Если G имеет один из указанных в теореме 2 типов, то, учитывая, что P_1 имеет тип $p \times p$, из (2), (3) и леммы 6, без труда проверяется, что такая группа G имеет указанную в теореме 2 $d_н$-ширину. □

3. О $d_н$-ширине некоторых конечных неабелевых p-групп

Хорошо известно следующее утверждение:

Лемма 7. *(см. например, [6], задача 17.28). Конечная p-группа G тогда и только тогда является группой Миллера—Морено, когда $|G/Z(G)| = p^2$ и $Z(G) = \Phi(G)$.*

Следствие. *Пусть G — конечная неабелева p-группа, $d_н(G) \leq 6$ (1), $Z = Z(G)$ — нециклическая группа, подгруппа $S = \Omega_1(G)$ содержится во всех нециклических подгруппах группы G и $G/S \cong E_{p^2}$ (2). Тогда G является группой Миллера—Морено, $S \cong E_{p^2}$ (3), $d_н(G) = p+1$ (4) и $p \in \{2, 3, 5\}$ (5).*

Доказательство. В силу условий следствия $S \subset Z$, а тогда из (2) и неабелевости G получаем, что $S = Z$ (6). Далее, из того, что Z нециклическая и G неабелева, следует, что все максимальные подгруппы группы G — нециклические, а тогда из условия следствия для S получаем, что $S \subset \Phi(G)$, и в силу (3) $S = \Phi(G)$. Отсюда и из (6) следует $Z = \Phi(G)$. Отсюда и из условия (2) в силу (6) и леммы 7 получаем, что G — группа Миллера—Морено. В силу (6) подгруппа S абелева и нециклическая, а тогда из ее определения следует, что $S \cong E_{p^n}$ $(n \geq 2)$. Но ввиду условия (1) и следствия 2 леммы 4 $n \leq 2$, и поэтому $n = 2$ и выполняется (3). По лемме 1 $d_н(G) = d(G/S)$, а последнее число ввиду (2) равно $(p+1)$. Этим доказано (4). Так как ввиду (1) $(p+1) \leq 6$, то справедливо (5). □

Лемма 8. *Пусть G — конечная неабелева p-группа, $|G/\Phi(G)| = p^2$ (1) и в G существуют две абелевы максимальные подгруппы. Тогда G — группа Миллера—Морено.*

Доказательство. Из существования в G двух абелевых максимальных подгрупп следует (см. напр. [6], задача 17.25), что G имеет точно $(p+1)$ абелевых максимальных подгрупп. Но из (1) видно, что в G всего $(p+1)$ максимальных подгрупп, и поэтому G — группа Миллера—Морено. □

Ниже мы найдем $d_н$-ширину конечных нециклических p-групп, имеющих циклическую максимальную подгруппу. Все типы таких групп известны (см. напр., [6], задача 17.17). В группах типа $p \times p^n$ и M_{p^n} $(p^n \neq 8)$ все нециклические подгруппы инцидентны, и потому там $d_н = 1$. Далее, $d_н(M_8) = 2$, ибо в M_8 всего две собственные нециклические подгруппы и они не инцидентны.

Для нахождения $d_н$-ширины остальных типов упомянутых выше групп (это D_{2^n}, Q_{2^n} и SD_{2^n}) удобно использовать следующую лемму:

Лемма 9. *Пусть в конечной группе G любые две максимальные подгруппы имеют циклическое пересечение. Если $\{M_1, \ldots, M_k\}$ — множество всех максимальных нециклических подгрупп группы G, $R_1, \ldots, R_k$ — их $d_н$-базисы, то $R_i \cap R_j = \emptyset$ (1) для любых i, j при $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,k})$, множество $R = \cup_{i=1}^{k} R_i$ (2) — $d_н$-базис G и $d_н(G) = \sum_{i=1}^{k} d_н(M_i)$ (3).*

Доказательство. Пусть B_i, B_j — любые антицепи нециклических подгрупп соответственно из групп M_i, M_j. Покажем, что $B_i \cap B_j = \emptyset$ (4) при $i \neq j$. Предположим, что $B_i \cap B_j \supset B$. Тогда, так как $B_i \subset M_i$, $B_j \subset M_j$, то $B \leq M_i \cap M_j$ (5). Но последнее пересечение по условию леммы — циклическая группа, а подгруппа B, входящая в антицепь нециклических подгрупп, нециклическая. Значит (5) невозможно, и потому выполняется (4). Из доказанного следует справедливость равенства (1).

Проверим, что множество R вида (2) является антицепью. Так как справедливо (1), то в R нет повторяющихся подгрупп. Предположим, что существуют H_1, H_2 из R, такие, что $H_1 < H_2$ (6). Тогда в силу (2) $H_1 \subset R$, $H_2 \subset R_j$ и потому $H_1 \subset M_i$ (8), $H_2 \subset M_j$ (9), причем $i \neq j$ (ибо каждая R_i есть антицепь). Но из (6) и (9) следует, что $H_1 \subset M_j$, а тогда в силу (7) $H_1 \subset R_i \cap R_j$, в противоречие с (1). Значит, R — антицепь.

Введем обозначения: $d_{\text{н}}(M_i) = m_i$ (10), где $i = \overline{1,k}$. Тогда R_i — множество из m_i элементов, и в силу (2) и (1) $|R| = \sum_{i=1}^{k} m_i$ (11).

Покажем, что R есть $d_{\text{н}}$-базис G. Пусть S — любая антицепь нециклических подгрупп группы G. Тогда, очевидно, $S = \cup_{i=1}^{k} B_i$ (12), где $B_i = S \cap M_i$ ибо каждая нециклическая подгруппа группы G содержится в некоторой M_i. Так как S — антицепь, то B_i — антицепь нециклических подгрупп, содержащихся в M_i. В силу (10) $|B_i| \leq m_i$ (14), $i = \overline{1,k}$. Но по доказанному выше справедливо (4), и потому из (11) и (12) следует, что $|S| \leq m_1 + \ldots + m_k = |R|$. Значит, в антицепи R наибольшее число нециклических подгрупп группы G, то есть R — $d_{\text{н}}$-базис G и $d_{\text{н}}(G) = |R|$, а из (10) и (11) тогда следует справедливость равенства (3). □

Следствие 1. *$d_н$-ширина группы D_{2^n} ($n \geq 3$) равна 2^{n-2}. Один из $d_н$-базисов этой группы — множество всех ее четверных подгрупп.*

Доказательство. Как отмечено в [6] (задачи 17.20, пункты 9 и 10) группа $G \cong D_{2^n}$ имеет два класса сопряженных четверных подгрупп, а нормализатор каждой такой подгруппы изоморфен D_8, то есть имеет порядок 8. Поэтому в каждом таком классе сопряженности 2^{n-3} подгрупп. Объединение F этих двух классов — это 2^{n-2}-нециклическая антицепь. Так как эти подгруппы являются максимальными нециклическими, то можно предположить, что F — это $d_{\text{н}}$-базис G и $d_{\text{н}}(D_{2^n}) = 2^{n-2}$ (13). Докажем эти два утверждения для всех $n \geq 3$ индукцией по n. При $n = 3$ в D_{2^3} всего две нециклических собственных подгрупп. Эти четверные подгруппы составляют $d_{\text{н}}$-базис этой группы, и поэтому при $n = 3$ и равенство (13) выполняется.

Пусть наши два утверждения верны для $n-1$, то есть $d_{\text{н}}(D_{2^{n-1}}) = 2^{n-3}$ (14) и все четверные подгруппы группы $D_{2^{n-1}}$ составляют ее $d_{\text{н}}$-базис.

Как известно (см. напр., [6], задача 17.20, пункт 4), в D_{2^n} всего две максимальные нециклические подгруппы M_1 и M_2, $M_i \cong D_{2^{n-1}}$ (15), $i = 1, 2$ и $M_1 \cap M_2$ — циклическая группа. Пусть B_1 и B_2 — множества всех четверных подгрупп, соответственно, групп M_1 и M_2. В силу предположения индукции и леммы 9 множество $B = B_1 \cup B_2$ всех четверных подгрупп группы D_{2^n} является ее $d_{\text{н}}$-базисом и $d_{\text{н}}(D_{2^n}) = d_{\text{н}}(M_1) + d_{\text{н}}(M_2) = 2 \cdot 2^{n-3} = 2^{n-2}$ (мы использовали (15) и (14)). Этим доказано равенство (13) и существование в D_{2^n} $d_{\text{н}}$-базиса из всех ее четверных пдгрупп, то есть утверждение следствия 1 верно для любого $n \geq 3$. □

Следствие 2. *Если $G \cong Q_{2^n}$ ($n \geq 4$), то $d_н(G) = 2^{n-3}$ (16) и множество всех подгрупп группы G, изоморфных группе кватернионов, составляет ее $d_н$-базис.*

Доказательство. Из определения G имеем: $G/Z \cong D_{2^{n-1}}$, где $Z = Z(G)$ — единственная подгруппа порядка 2 группы G и Z содержится во всех ее подгруппах. Если A — нециклическая подгруппа группы G и A/Z — циклическая, то A абелева и, так как содержит единственную инволюцию, циклическая, в противоречие с выбором A. Значит, A/Z также нециклическая. Поэтому если $d_{\text{н}}(G) = m$ (18), и $\left\{G_i | i = \overline{1,m}\right\}$ — $d_{\text{н}}$-базис G, то $\left\{G_i/Z | i = \overline{1,m}\right\}$ — m-нециклическая антицепь группы G/Z, и потому если $d_{\text{н}}(G/Z) = s$ (19), то $m \leq s$ (20). Обратно, если $\left\{B_i/Z | i = \overline{1,s}\right\}$ — $d_{\text{н}}$-базис G/Z, то $\left\{B_i | i = \overline{1,s}\right\}$ — s-нециклическая антицепь G, и потому в силу (18) $s \leq m$, откуда ввиду (20) $s = m$, то есть $s = d_{\text{н}}(G) = d_{\text{н}}(G/Z)$ (21). Но в силу (17) и следствия 1 леммы 9 $d_{\text{н}}(G/Z) = 2^{(n-1)-2} = 2^{n-3}$, и поэтому ввиду (21) выполняется (16), и в силу этого же следствия $d_{\text{н}}$-базис группы G/Z состоит из всех ее четверных подгрупп B_i/Z, $i = \overline{1,s}$. Но тогда $|B_i| = 8$, в B_i — единственная подгруппа порядка 2 и B_i нециклическая, то есть $B_i \cong Q_8$. В силу доказанного выше (см. (21)) $\left\{B_i | i = \overline{1,s}\right\}$ — $d_{\text{н}}$-

базис G. Он состоит из подгрупп, изоморфных Q_8, причем из всех таких подгрупп (ибо из $C \cong Q_8$ следует, что C/Z — четверная группа). $\square$

Следствие 3. *Если $G \cong SD_{2^n}$ $(n \geq 4)$, то $d_н(G) = 3 \cdot 2^{n-4}$ и в G существует $d_н$-базис, состоящий из всех ее подгрупп, изоморфных Q_8, и всех четверных подгрупп (то есть всех минимальных нециклических подгрупп группы G).*

Доказательство. Известно (см. напр., [6], задача 17.12, пункт 4), что в такой группе G всего две максимальные нециклические подгруппы — $M_1 \cong D_{2^{n-1}}$ и $M_2 \cong Q_{2^{n-1}}$, причем $M_1 \cap M_2$ — циклическая группа. Отсюда в силу леммы 9 и ее следствий 1 и 2 получаем существование в G указанного в следствии 3 $d_н$-базиса (являющегося объединением $d_н$-базисов M_1 и M_2) и справедливость равенства $d_н(G) = d_н(M_1) + d_н(M_2) = 2^{n-3} + 2^{n-4} = 3 \cdot 2^{n-4}$. $\square$

Следствие 4. *Пусть G — конечная нециклическая p-группа, имеющая циклическую максимальную подгруппу. $d_н(G) = 3$ (22) тогда и только тогда, когда $G \cong SD_{16}$ (23)*

Доказательство. Необходимость. Пусть $d_н(G) = 3$. Так как в G существует циклическая максимальная подгруппа, то, (см., напр., [6], задача 17.17), G изоморфна одной из следующих групп: типа $p \times p^{n-1}$, M_{p^4}, D_{2^n}, Q_{2^n} или SD_{2^n} (группы (24)). У первых двух типов $d_н \neq 3$ — это отмечено перед леммой 9, у D_{2^n} и Q_{2^n} число $d_н$ четное (следствия 1,2 леммы 9). По следствию 3 леммы 9 $d_н(SD_{2^n}) = 3 \cdot 2^{n-4}$ и из (22) следует, что $n = 4$, то есть справедливо (23). Необходимость доказана.

Достаточность. В силу следствия 1 леммы 9 $d_н(SD_{16}) = 3 \cdot 2^8 = 3$. $\square$

Следствие 5. *В конечной группе G $d_н(G) = 2$ (25) тогда и только тогда, когда G изоморфна D_8 или Q_{16}.*

Доказательство. Достаточность следует из того, что в D_8 и Q_{16} всего по две не инцидентных нециклических подгрупп. Докажем необходимость. Пусть выполняется (25). Тогда G нециклическая и в ней не более двух максимальных нециклических подгрупп. Но в силу следствия 1 леммы 4 в G не менее трех максимальных подгрупп, и потому в G есть циклическая максимальная подгруппа, то есть G — одна из групп (24). Если она — группа одного из первых двух перечисленных там типов, то, как отмечено перед леммой 9, при условии (25) $G \cong M_8$. Если $G \cong D_{2^n}$, то по следствию 1 леммы 9 $d_н(G) = 2^{n-2} = 2$, откуда $n = 3$ и $G \cong D_8$. Отметим, что $D_8 \cong M_8$, то есть мы пока получим один тип p-групп с условием (25). Если $G \cong Q_{2^n}$, то по следствию 2 леммы 9 $d_н(G) = 2^{n-3} = 2$, откуда $n = 4$ и $G \cong Q_{16}$. Наконец, если $G \cong SD_{2^n}$, то по следствию 3 леммы 9 $d_н(G) = 3 \cdot 2^{n-4} \neq 2$. Мы получили все искомые типы групп. $\square$

Лемма 10. *Пусть в конечной группе G все максимальные подгруппы $M_1, M_2, \ldots, M_n$ нециклические и $d_н(M_i) = 1$ (1), $i = \overline{1,n}$. Тогда $d_н(G) = n$ (2) и $\left\{M_i | i = \overline{1,n}\right\}$ (3) — $d_н$-базис G.*

Доказательство. Покажем, что множество (3) — $d_н$-базис G. Очевидно, что оно является n-нециклической антицепью. Если $\left\{S_j | j = \overline{1,m}\right\}$ — $d_н$-базис G, и $m > n$ (4), то хотя бы две его подгруппы содержатся в одной максимальной подгруппе M_i и в силу условия (1) они инцидентны, в противоречие с определением $d_н$-базиса. Значит, (4) не выполняется и потому (3) — $d_н$ — базис G, а тогда выполняется (2). $\square$

Лемма 11. *Для всякой нециклической подгруппы B конечной группы G справедливы неравенства: $|cl(B)| \leq d_н(G)$ (1) и $d_н(G) \geq d(N(B)/B)$ (2).*

Доказательство. Справедливость (1) следует из того, что $cl(B)$ есть антицепь нециклических подгрупп. Так как все подгруппы группы G, содержащие B, нециклические, то выполняется (2). $\square$

Следствие. *Пусть G — неабелева p-группа, $d_н(G) = s$. Тогда для любой нециклической подгруппы B группы G $|cl(B)| = p^t \leq s$.*

Лемма 12. *Пусть в конечной группе G существует k максимальных нециклических подгрупп $S_1, \dots, S_k$ (1), удовлетворяющих условиям: $S_i \cap S_j = F$ (2) для любых различных i, j $(i, j = \overline{1, k})$, $d_н(S_1) \geq 3$ (3) и $d_н(F) \leq 1$ (4). Тогда $d_н(G) > k$ (5).*

Доказательство. В силу (3) в $d_н$-базисе подгруппы S_1 находится три попарно не инцидентных нециклических подгрупп B_1, B_2, B_3. Из (4) следует, что по крайней мере две из них (пусть это B_1 и B_2) не содержатся в F, и потому в силу (2) B_1 и B_2 не содержатся в каждой из подгрупп $S_2, \dots, S_k$. Отсюда и из того, что $S_i < G$ следует, что $\{B_1, B_2, S_2, \dots, S_k\}$ — $(k+1)$-нециклическая антицепь и потому выполняется (5). □

Следствие 1. *Пусть G — конечная p-группа, $|G/\Phi(G)| = p^2$ (6), множества $\{M_1, \dots, M_{p+1}\}$ всех максимальных подгрупп группы G является ее $d_н$-базисом и $d_н(\Phi(G)) \leq 1$ (7). Тогда $d_н(M_i) \leq 2$ (8) для любого $i = \overline{1, p+1}$.*

Доказательство. Пусть существует такое i_1, что $d_н(M_{i_1}) \geq 3$ (9). В силу (6) $M_i \cap M_j = \Phi(G)$, и $|M_j/\Phi(G)| = p$ (для всех $i, j = \overline{1, p+1}$). Из сказанного выше и условия (7) видно, что для $M_1, \dots, M_{p+1}$ (10) выполняются все условия леммы 12 и по этой лемме $d_н(G) > p+1$, в противоречие с тем, что (10) есть $d_н$-базис G. Значит, (9) не выполняется, то есть справедливо (8) для всех $i = \overline{1, p+1}$. □

Следствие 2. *Пусть G — конечная p-группа, $|G/\Phi(G)| = p^2$, все максимальные подгруппы группы G составляют ее $d_н$-базис и $\exists M_j \lessdot G$, что $d_н(M_j) \geq 3$ (11). Тогда $d_н(\Phi(G)) > 1$ (12).*

Действительно, если предположить, что (12) не выполняется, то в силу следствия 1 леммы 12 $d_н(M_j) \leq 2$, в противоречие с условием (11).

Лемма 13. *Пусть G — конечная p-группа, $\Phi = \Phi(G)$, $|G/\Phi| = p^2$ (1), $d_н(\Phi) \leq 2$ (2) и в G существуют такие три максимальные подгруппы M_1, M_2, M_3, что $d_н(M_i) = 3$, $i = 1, 2, 3$. Тогда $d_н(G) \geq 4$ (4).*

Доказательство. В силу условия (1) в G $p+1$ максимальных подгрупп M_i $(i = \overline{1, p+1})$ и $M_i \cap M_j = \Phi$ (5) при любых $i \neq j$. В каждой из подгрупп M_1, M_2, M_3 выберем по $d_н$-базису (в силу леммы (3) в каждой из них не менее трех подгрупп).

Возможны два случая.

1. Хотя бы в одном из этих трех $d_н$-базисов найдутся две подгруппы, не содержащиеся в Φ (пусть это будут S_1 и S_2 из M_1, это всегда возможно при $d_н(\Phi) < 2$). Тогда $\{S_1, S_2, M_2, M_3\}$ (6) — антицепь (ибо в силу (5) $S_i \not\subset M_j$ при $j = 2, 3$ и $M_j \lessdot G$). Мы нашли 4-нециклическую антицепь и потому выполняется (4).

2. Условие 1 не выполняется, то есть в каждом из трех выбранных $d_н$-базисов группы M_i только одна подгруппа не содержится в Φ (пусть это будут R_1, R_2, R_3 $(R_i < M_i$, $i = 1, 2, 3)$). Тогда, как отмечено в пункте 1 из (2) следует, что $d_н(\Phi) = 2$. В силу следствия 5 леммы 9 Φ изоморфна D_8 или Q_{16}. Но в каждой из таких групп — единственный $d_н$-базис из двух подгрупп (пусть это будет T_1, T_2). Тогда $\{R_i, T_1, T_2\}$ — $d_н$-базис M_i $(i = 1, 2, 3)$, и потому $\{R_1, R_2, R_3, T_1, T_2\}$ — 5-нециклическая антицепь и выполняется (4). □

Лемма 14. *Пусть G/S — циклическая 2-группа, S — группа Клейна и все максимальные подгруппы группы G нециклические. Тогда $d_н(G) \geq 7$ (1) и G содержит подгруппу, изоморфную E_8.*

Доказательство. Так как $G/S = \langle g \rangle$, то $g^{2^k} \in S$. Если $g^{2^k} \neq 1$, то так как $|G| = 2^{k+2}$ и G нециклическая, то $\langle g \rangle \lessdot G$, вопреки условию леммы. Значит, $g^{2^k} = 1$ и потому $G = S \leftthreetimes \langle g \rangle$ (2). Известно (см., напр. [6], задача 11.11), что $Aut(S) \cong S_3$. Отсюда, учитывая, что G — 2-группа, следует, что $|G/C(S)| \leq 2$. Теперь из этого и из (2) получаем, что при $|g| \neq 2$ в G содержится подгруппа $T = S \times \langle g^{2^k} \rangle$, изоморфная E_8, и в силу следствия 2 леммы 4 $d_н(T) \geq 7$, а тогда выполняется и (1).

Если же любой элемент из $G \setminus S$ является инволюцией, то в G все отличные от 1 элементы имеют порядок 2 и потому G — абелева группа. Тогда $G = S \times \langle g \rangle \cong E_8$ и опять выполняется (1) и второе утверждение леммы 4. □

Заключение

Основываясь на полученных в настоящей статье результатах, авторами получено описание конечных групп $d_н$-ширина которых не превосходит 3. Описание конечных неинцидентных групп с этим условием приводится в другой статье из настоящего сборника.

Список литературы

1. *Половицкий Я.Д.* Ранг инцидентности // Алгебра и линейная оптимизация: Тр. междунар. сем. Екатеринбург, 2002. С. 184—186.
2. *Половицкий Я.Д.* Группы, имеющие небольшие ранги инцидентности // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Вып. 5. С. 65-69.
3. *Половицкий Я.Д.* Конечные группы ранга инцидентности 4 // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 2(2). С. 4—14.
4. *Половицкий Я.Д.* d-ширина некоторых групп. Конечные группы d-ширины 5 // Вестник Пермского университета. Сер. 13Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 1(24). С. 13—24.
5. *Черников Н.С., Половицкий Я.Д., Чечулин В.Л.* Группы с условием инцидентности для нециклических подгрупп // Украинский математический журнал. 1996. Т. 48. N4. С. 533—539.
6. *Белоногов В.А.* Задачник по теории групп. М.:Наука, 2000. 230 С.

About maximal antichains of noncyclic subgroups of a finite groups

Ja.D. Polovitsky, A.A. Volochkov
Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia
alg@psu.ru; (342) 239 63 21

A maximal length of antichains of noncyclic subgroups ($d_н$-width) of some known p-groups are found.

Keywords: *group*; *noncyclic subgroup*; *antichain.*